

© 2014 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук (vnchest@rambler.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ H_∞ -РЕГУЛЯТОРОВ ПО ЗАДАННОМУ РАДИУСУ ЗАПАСОВ УСТОЙЧИВОСТИ И ВРЕМЕНИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Для линейных многомерных систем строятся дискретные регуляторы по выходу, гарантирующие заданный радиус запасов устойчивости на входе или выходе объекта управления. Помимо этого, учитывается заданное время регулирования. Показано, что решение таких задач сводится к некоторой специальной образом сконструированной стандартной проблеме H_∞ -оптимизации. Численное решение реализовано в MATLAB с использованием пакета Robust Control Toolbox на основе метода линейных матричных неравенств (LMI).

1. Введение

В связи с широким распространением микропроцессорной техники в промышленности, авиации, робототехнике и т.д. проблема синтеза дискретных регуляторов по измеряемому выходу становится все более актуальной. Вместе с тем следует отметить, что системы с малыми запасами устойчивости по фазе и коэффициенту усиления практически не работоспособны. Именно к таким системам могут приводить современные технологии синтеза регуляторов (H_2 , H_∞ , l_1 , μ) [1]. Эти косвенные показатели робастной устойчивости, которые можно определить экспериментально, получили широкое распространение в практике автоматического управления со времени введения их Г. Боде [2]. Обобщением этих понятий является радиус запасов устойчивости, введенный А.Г. Александровым [3], который более адекватно оценивает расстояние годографа Найквиста от критической точки $(-1, j0)$ на плоскости годографа, чем запасы устойчивости по фазе и модулю. Это понятие было детально исследовано в недавних работах А.Г. Александрова [4–6]. Более развернутая характеристика этих понятий в одномерном и многомерном случаях приводится в следующем разделе работы.

Эффективное обобщение понятий запасов устойчивости по фазе и коэффициенту усиления на многомерный случай было предложено в [7] применительно к LQ -оптимальным системам с регуляторами по полному вектору состояния. При этом значительные запасы устойчивости гарантируются только на входе объекта. Но если полный вектор состояния объекта не доступен непосредственному измерению, то запасы устойчивости оптимальных систем с наблюдателями могут быть весьма малы [8, 9]. Это привело к так называемой LTR (Loop Transfer Recovery) технологии построения наблюдателей, когда в системе с наблюдателем запасы устойчивости близки к запасам в системе с регулятором по полному вектору состояния [10–13]. Однако LTR техника применима только тогда, когда объект минимально-фазовый и число измеряемых переменных совпадает с числом управлений. В отличие от

непрерывного случая в системах с дискретными LQ -регуляторами даже при полном измерении вектора состояния объекта запасы устойчивости заведомо не гарантируются [14–19], поскольку их оценки становятся известными только после решения дискретного матричного уравнения Риккати, т.е. после синтеза регулятора. При этом они существенно зависят от свойств объекта [14, 16]. Для устойчивых объектов процедуры синтеза дискретных регуляторов состояния, гарантирующих желаемые запасы устойчивости, предложены в [20, 21], а причины малых запасов устойчивости неустойчивых дискретных объектов с регуляторами состояния вскрыты в [22].

Таким образом, обеспечение запасов устойчивости дискретных систем с регуляторами по выходу представляет серьезную проблему, поскольку даже регуляторы по полному вектору состояния не всегда гарантируют запасы устойчивости, которые могут быть весьма незначительными. Аналоги LTR -процедур существуют и в дискретном случае [23–25]. Однако свойство минимальной фазовости в дискретном случае зачастую не выполняется [18] и LTR -техника не применима. В настоящей работе для обеспечения заданного радиуса запасов устойчивости используется эквивалентная процедура дискретной H_∞ -оптимизации, что без учета времени регулирования придает результатам работы необходимый и достаточный характер. Заметим, что система с регулятором по измеряемому выходу, имеющая значительный радиус запасов устойчивости на входе (выходе) объекта, может приводить к весьма затянутым переходным процессам (большому времени регулирования, см. пример 1 из [26]). Впервые метод синтеза непрерывных регуляторов состояния с заданной степенью устойчивости, одновременно гарантирующих значительные запасы устойчивости на входе объекта, предложен в [27] (см. также [19]). В случае непрерывных регуляторов по выходу подход, гарантирующий заданный радиус запасов устойчивости на входе (выходе) объекта, опирающийся на процедуру H_∞ -оптимизации, предложен в [26], а его обобщение на дискретный случай дано в [28].

Данная работа обобщает результаты работ [26–29] на дискретный случай, когда помимо обеспечения заданного радиуса запасов учитывается и степень устойчивости замкнутой системы, определяющая желаемое время регулирования. Следует подчеркнуть, что в данной работе нет речи об максимизации радиуса запасов устойчивости и степени устойчивости. Отдельная их максимизация может приводить к физически бессмысленным результатам. Поэтому в работе поставлена задача добиться их заданных значений (оговоренных, например, в техническом задании на проектирование цифрового регулятора).

Заметим, что радиус запасов устойчивости как в непрерывном, так и дискретном случае совпадает с минимальным сингулярным значением (для всех частот) матрицы возвратной разности (см. [13, 16]).

2. Предварительные сведения

Радиусом запасов устойчивости для $SISO$ -систем называют максимальный радиус r круга с центром в критической точке $(-1, j0)$, который не пересекается годографом Найквиста разомкнутой системы, как показано на рис. 1.

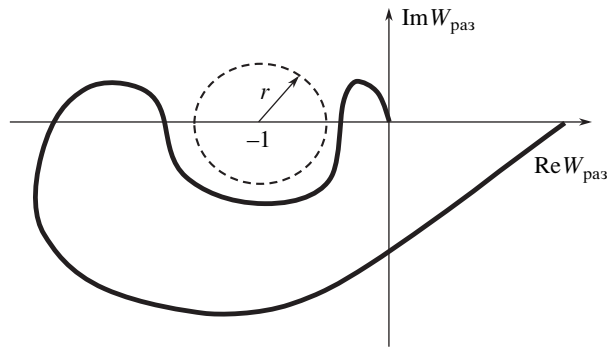


Рис. 1. Радиус запасов устойчивости.

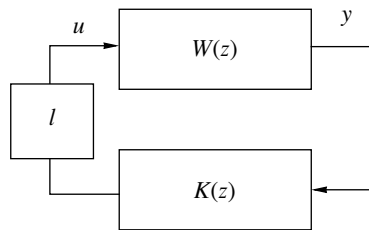


Рис. 2. Система с обратной связью.

Математическим условием, геометрическая интерпретация которого для годографа Найквиста приведена на рис. 1, является выполнение для всех вещественных частот кругового частотного неравенства [4, 13, 16]

$$(2.1) \quad [1 + W(e^{-j\omega T})] [1 + W(e^{j\omega T})] \geq r^2, \quad \omega \in [0, \pi/T],$$

где T – период дискретности, $W(z)$ – передаточная функция разомкнутой системы.

Это гарантирует следующие запасы устойчивости по фазе и коэффициенту усиления (модулю, амплитуде) [13]:

$$(2.2) \quad \varphi_3 \geq \arccos \left(1 - \frac{r^2}{2} \right), \quad L \geq \min\{1/(1+r), 1/(1-r)\}.$$

В современной трактовке [30] запасы устойчивости по фазе и коэффициенту усиления определяются так. Имеется асимптотически устойчивая замкнутая *SISO*-система с обратной связью, представленная на рис. 2, $W(z)$ – передаточная функция объекта, $K(z)$ – передаточная функция регулятора.

Номинальное значение коэффициента усиления $l = 1$, и замкнутая система устойчива. Запас устойчивости по коэффициенту усиления – это границы на отклонение коэффициента l от 1, при которых замкнутая система рис. 2 сохраняет устойчивость.

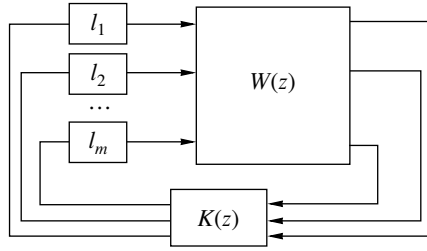


Рис. 3. Многомерные запасы устойчивости.

Очевидно, что эти границы равны

$$(2.3) \quad \frac{1}{1+r} < l < \frac{1}{1-r}.$$

Это следует из рассмотрения рис. 1 и второго соотношения (2.2).

При определении запаса по фазе коэффициент l на рис. 2 заменяется оператором $l = e^{j\psi}$, где ψ – чистый фазовый сдвиг, который в соответствии с поведением годографа Найквиста на рис. 1 может меняться в следующих пределах, не нарушающих устойчивость системы рис. 2:

$$(2.4) \quad |\psi| < \arccos\left(1 - \frac{r^2}{2}\right),$$

что соответствует 1-му соотношению (2.2).

Заметим, что радиус запасов устойчивости, как следует из [31, 32], является верхней границей H_∞ -нормы аддитивного возмущения передаточной функции разомкнутой системы.

В многомерном случае (*MIMO*) многомерные запасы устойчивости по фазе и коэффициенту усиления зависят от точки размыкания системы (вход или выход объекта).

Рассмотрим структурную схему асимптотически устойчивой замкнутой *MIMO* системы рис. 3.

Здесь многомерные запасы устойчивости по коэффициенту усиления (на входе объекта) – границы одновременного и независимого отклонения коэффициентов l_i от их номиналов, равных 1, при которых замкнутая система рис. 3 остается устойчивой. Они имеют следующий вид для m управляющих входов:

$$(2.5) \quad \frac{1}{1+r} < l_i < \frac{1}{1-r}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Эти границы являются следствием выполнения кругового частотного матричного неравенства [13, 16]

$$(2.6) \quad [I + W^u(e^{-j\omega T})]^T [I + W^u(e^{j\omega T})] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \pi/T],$$

где I – здесь и далее единичная матрица соответствующего размера, $W^u(z) = -K(z)W(z)$ – передаточная матрица разомкнутой системы рис. 3 по входу объекта ($W(z)$ – передаточная матрица объекта управления, а $K(z)$ – передаточная матрица регулятора; r – радиус запасов устойчивости [26] (минимальное сингулярное значение для всех вещественных частот ω матрицы возвратной разности [13, 16, 26])).

Многомерные запасы устойчивости по фазе – это границы на величины независимых фазовых сдвигов, вводимых в каждый контур рис. 3 по входу объекта, вида $l_i(z) = e^{j\psi_i}$, которые не нарушают устойчивости этой замкнутой системы. Они связаны с радиусом запасов устойчивости r соотношениями [13, 16]

$$(2.7) \quad |\psi_i| < \arccos\left(1 - \frac{r^2}{2}\right), \quad i = \overline{1, m}.$$

Аналогично определяются многомерные запасы устойчивости по m_2 измеряемым выходам объекта управления [15, 16, 26].

3. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый объект управления, описываемый уравнениями состояния

$$(3.1) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта; $u \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, $y \in R^{m_2}$ – вектор измеряемых переменных.

Объекту (3.1) соответствует дискретная операторная передаточная матрица

$$(3.2) \quad y(k) = W(z)u(k), \quad W(z) = C(zI - A)^{-1}B,$$

где z – оператор временного сдвига на один такт вперед [18].

Для объекта (3.1) требуется построить дискретный регулятор по выходу

$$(3.3) \quad x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c u(k), \quad u(k) = C_c x_c(k) + D_c y(k),$$

где определению подлежат матрицы A_c, B_c, C_c, D_c ($x_c \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора), которые формируют передаточную матрицу регулятора

$$(3.4) \quad u(k) = K(z)y(k), \quad K(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c + D_c,$$

такую чтобы обеспечивалось решение следующих задач.

Задача 1. Найти стабилизирующий регулятор (3.3) такой, чтобы для всех частот $\omega \in [0, \pi/T]$, с одной стороны, выполнялось круговое частотное неравенство

$$(3.5) \quad [I + W^y(e^{-j\omega T})]^T [I + W^y(e^{j\omega T})] \geq r^2 I,$$

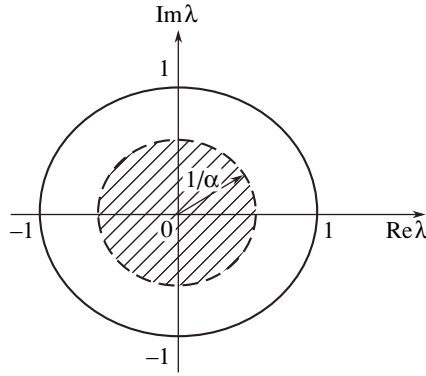


Рис. 4. Область расположения собственных значений A_{cl} .

где r – заданное ($0 < r < 1$) число, являющееся радиусом запасов устойчивости [26]; $W^y(z) = -W(z)K(z)$ – передаточная матрица системы (3.1), (3.3), разомкнутой по физическому выходу объекта; T – период дискретности регулятора (3.3), а с другой стороны, все собственные значения матрицы A_{cl} замкнутой системы удовлетворяли условию

$$(3.6) \quad |\lambda(A_{cl})| < 1/\alpha, \quad i = \overline{1, n + n_c},$$

где α – выбираемое проектировщиком число.

Здесь $1/\alpha$ – радиус круга с центром в начале координат (степень устойчивости), внутри которого находятся собственные значения A_{cl} . Область расположения собственных значений (3.6) показана на рис. 4.

Задача 2. Найти стабилизирующий регулятор (3.3) такой, чтобы, с одной стороны, для всех частот $\omega \in [0, \pi/T]$ выполнялось круговое частотное неравенство

$$(3.7) \quad [I + W^u(e^{-j\omega T})]^T [I + W^u(e^{j\omega T})] \geq r^2 I,$$

где $W^u(z) = -K(z)W(z)$ – передаточная матрица системы (3.1), (3.3), разомкнутой по физическому входу объекта, а с другой стороны, все собственные значения матрицы A_{cl} замкнутой системы удовлетворяли условию (3.6).

4. Сведение задачи 1 к стандартной проблеме H_∞ -оптимизации

Покажем, что задача обеспечения заданного радиуса запасов устойчивости r в (3.5) сводится к некоторой специальным образом сконструированной проблеме H_∞ -оптимизации. Рассмотрим структурную схему, представленную на рис. 5.

Здесь $W(z)$ – передаточная матрица дискретного объекта (3.2); $K(z)$ – передаточная матрица дискретного регулятора (3.4); $z \in R^{m_2}$ – фиктивная регулируемая переменная; $w \in R^{m_2}$ – фиктивное внешнее возмущение, приложенное к выходу объекта управления.

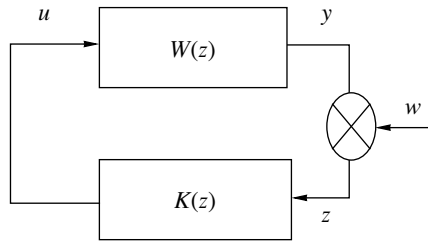


Рис. 5.

Заметим, что передаточная матрица замкнутой системы от w к z является матрицей чувствительности по выходу объекта [13, 15, 18, 23, 26]

$$(4.1) \quad T_{zw}(z) = [I + W^y(z)]^{-1}.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу H_∞ -оптимизации.

Задача 3. Найти правильную передаточную матрицу $K(z)$ стабилизирующего регулятора по выходу (3.4), такую чтобы H_∞ -норма передаточной матрицы замкнутой системы удовлетворяла неравенству

$$(4.2) \quad \|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma,$$

где $\gamma \geq 1$ – заданное число.

Целевое условие (4.2) эквивалентно частотному матричному неравенству

$$(4.3) \quad T_{zw}^T(e^{-j\omega T})T_{zw}(e^{j\omega T}) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \pi/T],$$

которое в силу (4.1) легко преобразовать [26] к первому целевому неравенству (3.5) задачи 1, где $r = \gamma^{-1}$.

Формально с математической точки зрения (4.2) представляет собой целевое условие некоторой дискретной задачи H_∞ -оптимизации [33–36]. При этом исходная задача 1 (а именно, первая ее часть, связанная с выполнением неравенства (3.5)) может быть переформулирована в виде следующей вспомогательной задачи субоптимального H_∞ -управления.

Задача 4. Дано число $\gamma \geq 1$. Найти правильную передаточную матрицу $K(z)$ стабилизирующего регулятора (3.4) такую, чтобы выполнялось частотное неравенство (4.3).

Заметим, что если задача 4 решена и выполнено условие (4.3), то в силу (4.1) это равнозначно выполнению условия (3.5) задачи 1, где $r = \gamma^{-1}$.

Далее приведем рассматриваемую задачу к стандартной задаче подавления внешнего возмущения H_∞ -подхода.

Структурная схема рис. 5 описывается уравнениями

$$(4.4) \quad y = Wu, \quad u = Kz, \quad z = y + w.$$

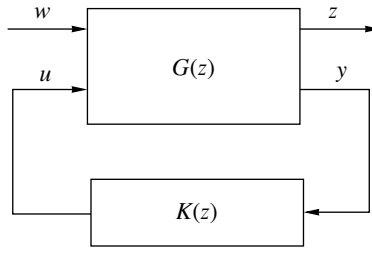


Рис. 6.

Придадим этим уравнениям стандартную форму, принятую в H_∞ -теории оптимального управления [33–36],

$$(4.5) \quad z = G_{11}w + G_{12}u, \quad y = G_{21}w + G_{22}u, \quad u = Ky,$$

где G_{ij} ($i, j = 1, 2$) – блоки передаточной матрицы $G(z)$ обобщенного объекта

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) \end{bmatrix}.$$

Уравнениям (4.5) соответствует структурная схема, приведенная на рис. 6.

Передаточные матрицы G_{ij} ($i, j = 1, 2$) нетрудно получить из соотношений (4.4). В частности, подставляя первое соотношение (4.4) в третье и сравнивая полученное выражение с первым соотношением (4.5), получим выражения для G_{11} и G_{12} . Из (4.4) также следует, что входным сигналом регулятора является регулируемая переменная z . Таким образом, на структурной схеме рис. 6 z и y представляют собой один и тот же сигнал (y на рис. 6 и u в уравнениях (4.4) – разные сигналы!). В силу сказанного выше уравнения (4.5) приобретают вид

$$(4.6) \quad z = w + Wu, \quad y = z = w + Wu, \quad u = Ky = Kz.$$

Это означает, что

$$(4.7) \quad G_{11} = I, \quad G_{21} = I, \quad G_{12} = G_{22} = W.$$

Очевидно, что G_{22} совпадает с передаточной матрицей объекта по управляющему воздействию (3.2), а передаточная матрица замкнутой системы (4.5), (4.7) от w к z – с передаточной матрицей T_{zw} из (4.1) [26].

Таким образом, исходная задача 1 сведена к стандартной проблеме подавления действия внешнего воздействия w на регулируемую переменную z в системе (4.5), (4.7) с целевым условием (4.3), т.е. к задаче 4, которая традиционно рассматривается в H_∞ -теории управления [33–36].

Регулятор, полученный в результате решения, обеспечивает только устойчивость замкнутой системы. Поэтому перейдем теперь к вопросу обеспечения заданной степени устойчивости.

Собственные значения матрицы замкнутой системы

$$(4.8) \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}$$

должны удовлетворять неравенству (3.6).

Следуя [37], заменим при решении H_∞ -задачи (4.3) матрицы A и B_2 объекта на $\tilde{A} = A\alpha$ и $\tilde{B}_2 = B_2\alpha$, $\alpha \geq 1$, и тогда регулятор с четверкой матриц $\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, C_c, D_c$, найденных в результате такой “смещенной” H_∞ -проблемы

$$(4.9) \quad T_{zw}^T(e^{-j\omega-\beta}T)T_{zw}(e^{j\omega-\beta}T) \leq \gamma^2 I, \quad \alpha = e^{\beta T}, \quad \omega \in [0, \pi/T],$$

будет обеспечивать устойчивость матрицы \tilde{A}_{cl} замкнутой системы [37]

$$(4.10) \quad |\lambda_i(\tilde{A}_{cl})| = \left| \lambda_i \begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{B}_2 D_c C_2 & \tilde{B}_2 C_c \\ \tilde{B}_c C_2 & \tilde{A}_c \end{bmatrix} \right| = |\lambda_i(A_{cl})|\alpha < 1, \quad i = \overline{1, n + n_c}.$$

Таким образом, искомый регулятор, обеспечивающий выполнение второго целевого условия (3.6) задачи 1, имеет матрицы

$$(4.11) \quad A_c = \tilde{A}_c/\alpha, \quad B_c = \tilde{B}_c/\alpha, \quad C_c, \quad D_c,$$

где матрицы $\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, C_c, D_c$ найдены при решении “смещенной” H_∞ -проблемы (4.9). Сразу возникает вопрос: “А что будет с выполнением целевого условия (4.3) (т.е. первого целевого условия задачи 1), если выполнено (4.9)?” Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Регулятор (3.4) с матрицами (4.11) разрешает задачу 1, где матрицы регулятора найдены при решении смещенной H_∞ -проблемы (4.9), а радиус запасов устойчивости определяется значением $r = \gamma^{-1}$, где γ – реализовавшееся значение при решении задачи (4.9).

Доказательство теоремы опирается на частотную теорему В.А. Якубовича, следствием которой является лемма о вещественной ограниченности [39–41].

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Заметим, что значение α при практическом решении задачи 1 можно выбрать, пользуясь очевидными соотношениями, вытекающими из (4.9), $\alpha = e^{\beta T}$, где степень устойчивости непрерывной системы $\beta = 3/t_p$, t_p – желаемое время регулирования замкнутой системы (3.1), (3.3) [37].

5. Схема решения задачи 2

Коротко остановимся на общей схеме решения задачи 2. Поскольку она аналогична схеме решения задачи 1, укажем здесь лишь основные особенности решения.

Рассмотрим структурную схему, представленную на рис. 7.

Здесь $W(z)$ – передаточная матрица дискретного объекта (3.2); $K(z)$ – передаточная матрица дискретного регулятора (3.4); $z \in R^m$ – фиктивная

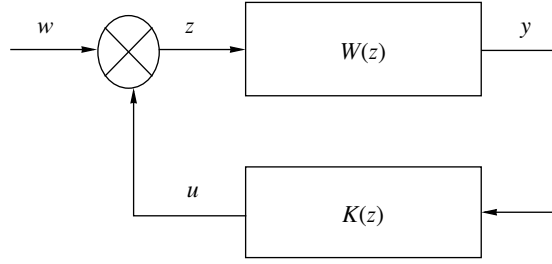


Рис. 7.

регулируемая переменная; $w \in R^m$ – фиктивное внешнее возмущение, приложенное ко входу объекта управления.

Далее, как и для задачи 1, сформируем передаточную матрицу чувствительности по входу объекта

$$(5.1) \quad T_{zw}(z) = [I + W^u(z)]^{-1}$$

и рассмотрим вспомогательную задачу 3, с матрицей T_{zw} из (5.1).

Заметим, что задача 2 также допускает эквивалентную формулировку в виде задачи 4.

При этом блочные матрицы G_{ij} ($i = 1, 2$) обобщенного объекта, описываемого соотношениями (4.5) или структурной схемой на рис. 6, имеют вид

$$(5.2) \quad G_{11}(z) = G_{12}(z) = I, \quad G_{21}(z) = G_{22}(z) = W(z).$$

Дальнейшие шаги аналогичны рассмотренным ранее в предыдущем разделе работы.

6. Численное решение задач 1 и 2

Численное решение задачи 4, к которой свелось решение задач 1 и 2 можно осуществить разными методами. С точки зрения вычислительной сложности частотный либо полиномиальный методы решения уступают методу пространства состояний [33]. Последний подход требует представления уравнений обобщенного объекта (4.5)–(4.7) в пространстве состояний [34, 36]:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k), \\ z(k) &= C_1x(k) + D_{11}w(k) + D_{12}u(k), \\ y(k) &= C_2x(k) + D_{21}w(k) + D_{22}u(k), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где для задачи 1 в соответствии с (4.7) легко установить, что

$$(6.2) \quad C_1 = C_2 = C; \quad D_{11} = D_{21} = I; \quad D_{12} = D_{22} = 0; \quad B_2 = B; \quad B_1 = 0,$$

а матрицы A, B, C берутся из исходного уравнения состояния объекта (3.1).

Однако 2-Риккати подход требует дополнительных условий, накладываемых на матрицы (6.1) [36]:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} D_{11} = 0, \quad D_{22} = 0, \quad D_{21} = [0 \quad I] \neq 0, \quad D_{12}^T = [0 \quad I] \neq 0, \\ D_{12}^T C_1 = 0, \quad B_1 D_{21}^T = 0, \end{aligned}$$

не все из которых выполняются, что говорит о вырожденности такой H_∞ -задачи. Поэтому для решения задачи 1 будем использовать метод линейных матричных неравенств (*LMI*), реализованный в пакете Robust Control Toolbox [38], который свободен от указанных ограничений на матрицы задачи. Заметим, что в пакете [38] регулятору ставится в соответствие четверка матриц A_c, B_c, C_c, D_c , которые определяют его уравнения состояния (3.3).

Размерность вектора состояния регулятора равна $n_c \leq n$, где n – размерность физического объекта.

В случае задачи 2 уравнения состояния (6.1), соответствующие описанию в частотной области (4.5), (5.2), будут включать матрицы

$$D_{11} = D_{12} = I; \quad D_{21} = D_{22} = 0; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = C; \quad B_1 = B_2 = B,$$

где матрицы A, B и C берутся из (3.1), а численное решение аналогично задаче 1.

7. Численный пример

Проиллюстрируем предложенный метод синтеза на примере двухмассовой системы (две тележки, соединенные пружиной), уже послужившей в качестве тестовой задачи (benchmark problem) для многих методов синтеза робастных систем [26].

Уравнения объекта управления имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -qx_1 + qx_2 + u + w, \quad \dot{x}_4 = qx_1 - qx_2,$$

где x_1 и x_2 – положение 1-й и 2-й тележки соответственно, q – интервальный параметр (жесткость пружины) с номинальным значением 0,8, u – управляющее воздействие, w – внешнее возмущение, а измеряемой переменной является

$$y = x_2.$$

Зададимся желаемым временем регулирования 15 с, что соответствует значению $\alpha = 1,002$ (желаемая степень устойчивости $1/\alpha = 0,998$).

Минимально возможное значение γ_0 при решении H_∞ -задачи 1 составило 1,117, что обеспечивает процедурой синтеза максимальный гарантируемый радиус запасов устойчивости $r_0 = 0,8953$ (при заданном быстродействии). Теперь решим субоптимальную задачу 1 для выбранного значения $\gamma = 1,2\gamma_0$. Решение такой H_∞ -задачи обеспечивает значение $\gamma = 1,34$ и гарантирует $r = 0,753$.

Передаточная функция соответствующего регулятора, полученная из реализации его в пространстве состояний, имеет вид

$$(7.1) \quad W_c = \frac{-8,298 \cdot 10^3 z^4 + 1,843 \cdot 10^4 z^3 - 5,593 \cdot 10^3 z^2 - 1,090 \cdot 10^3 z + 6,366 \cdot 10^3}{z^4 - 2,642 z^3 + 2,348 z^2 - 0,700 z + 4,881 \cdot 10^{-6}}.$$

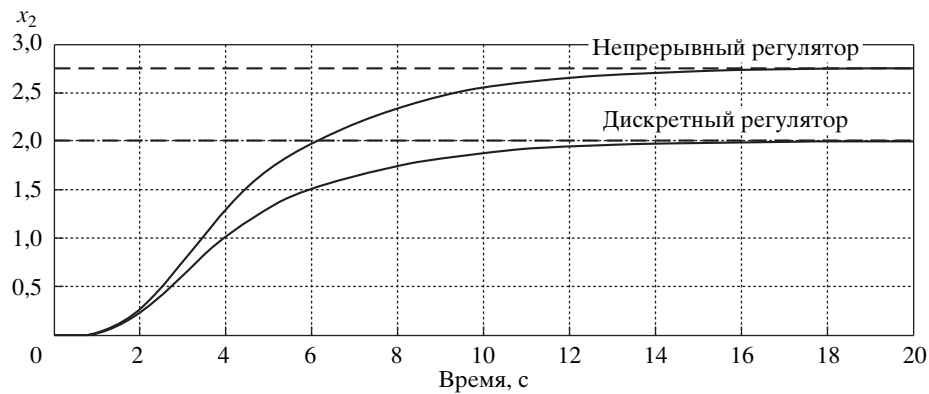


Рис. 8. Переходные процессы системы с непрерывным и дискретным регуляторами.

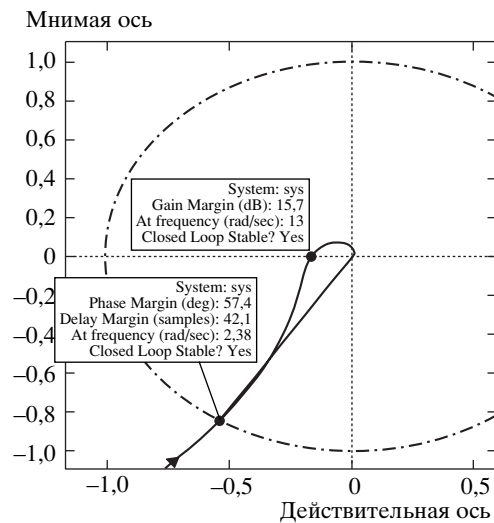


Рис. 9. Годограф Найквиста разомкнутой системы (по входу/выходу объекта) с дискретным регулятором.

В результате сканирования параметра q с шагом 0,001, был получен следующий интервал значений этого параметра (0,321, 4,627), когда замкнутая система с регулятором (7.1) сохраняет устойчивость. Интервал параметра q уже, чем соответствующий интервал (0,147, 6,15) с непрерывным регулятором из [29], тем не менее время регулирования одинаково и равно заданному 15 с, а точность дискретного регулятора даже несколько выше, что видно из приведенных ниже графиков переходных процессов системы с непрерывным из [29] и дискретным (7.1) регуляторами на рис. 8. Переходный процесс здесь возбуждается постоянным внешним возмущением $w = 1$, приложенным к первой тележке согласно с управлением.

На рис. 9 приведен годограф Найквиста разомкнутой системы (по входу/выходу объекта) с дискретным регулятором (7.1).

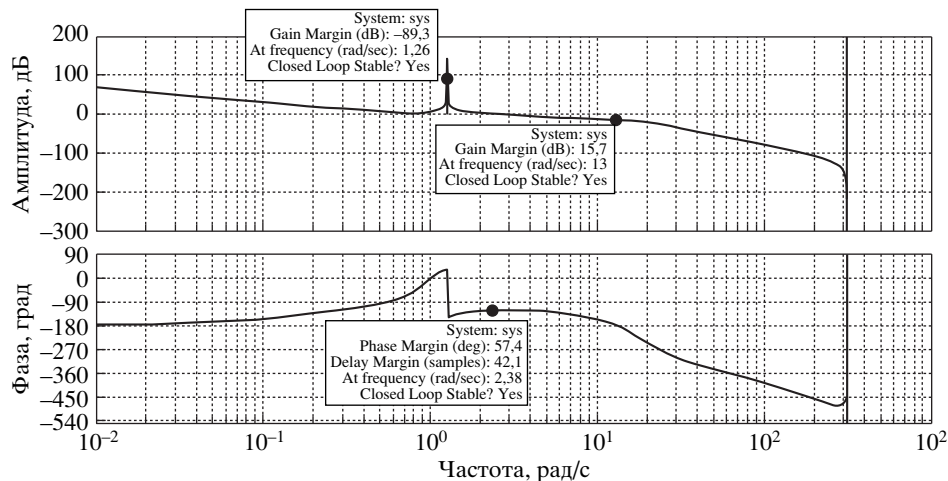


Рис. 10. Логарифмические амплитудные и фазочастотные характеристики разомкнутой системы (по входу/выходу объекта) с дискретным регулятором.

На рис. 10 приведены логарифмические амплитудные и фазочастотные характеристики разомкнутой системы (по входу/выходу объекта) с дискретным регулятором (7.1), из которых с очевидностью следуют следующие значения запасов устойчивости: запас устойчивости по фазе не менее 57,4 градусов, по амплитуде не менее 15,7 Дб. Последнее означает, что дополнительный коэффициент усиления l с номинальным значением, равным единице, вводимый по входу/выходу объекта (см. рис. 2) можно изменять без потери устойчивости в интервале $0,0003 < l < 6,095$.

8. Заключение

В порядке обсуждения полученного результата укажем на некоторые достоинства предлагаемого подхода:

1. Ясный инженерный смысл критериев синтеза: радиус запасов устойчивости и время регулирования.
2. Если время регулирования не учитывается, полученный результат имеет необходимый и достаточный характер, поскольку исходные задачи допускают эквивалентную формулировку и решение на базе процедур H_∞ -оптимизации.
3. Для решения задач синтеза имеется готовое богатое программное обеспечение, функционирующее в среде MATLAB [38].
4. Порядок регулятора, получаемого в результате решения задачи синтеза, не превышает порядка исходного физического объекта, что важно для практических приложений.

К недостаткам подхода следует отнести тот факт, что рассматриваемые задачи не учитывают реально действующих внешних возмущений в том случае, если они не приложены к выходу объекта (как в задаче 1) либо к его входу (как в задаче 2). Численные эксперименты показали, что увеличение желаемого быстродействия (уменьшение желаемого времени регулирования)

приводит к уменьшению гарантируемого радиуса запасов устойчивости, что физически совершенно понятно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть $T(z) = C(zI - A)^{-1}B + I$ – передаточная матрица замкнутой системы (4.1), фигурирующая в (4.3), а $\tilde{T}(z) = C(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + I$ – смещенная передаточная матрица замкнутой системы, фигурирующая в (4.9), у которой $\tilde{A} = A\alpha$ и $\tilde{B} = B\alpha$. Необходимо доказать, что если имеет место (4.9), которое может быть записано как $\tilde{T}^T(e^{-j\omega T})\tilde{T}(e^{j\omega T}) \leq \gamma^2 I$, то будет выполнено и (4.3) с тем же значением γ . Естественно предположить, что обе матрицы A и \tilde{A} устойчивые, т.е. все их собственные значения лежат внутри единичного круга с центром в начале координат. Известно [39–41], что для выполнения (4.9) для $\tilde{T}(z)$ необходимо и достаточно, чтобы существовало положительно определенное решение $P = P^T > 0$ уравнения Лурье–Риккати

$$(П.1) \quad \tilde{A}^T P \tilde{A} - P + (\tilde{A}^T P \tilde{B} + C^T)[\gamma^2 I - I - \tilde{B}^T P \tilde{B}]^{-1}[\tilde{B}^T P \tilde{A} + C] = -C^T C$$

и выполнялось условие $[\gamma^2 I - I - \tilde{B}^T P \tilde{B}] > 0$. Из последнего неравенства кстати следует, что $\gamma > 1$ и, следовательно, $r = \gamma^{-1} < 1$.

Учитывая выражения для \tilde{A} и \tilde{B} , от (П.1) придем к уравнению

$$(П.2) \quad \alpha^2 A^T P A - P + (\alpha^2 A^T P B + C^T)[\gamma^2 I - I - \alpha^2 B^T P B]^{-1} \times \\ \times [\alpha^2 B^T P A + C] = -C^T C.$$

Вводя обозначение $\tilde{P} = \alpha^2 P$, а также прибавляя и вычитая из левой части этого уравнения \tilde{P} и учитывая, что $\tilde{P} - P \geq 0$ для $\alpha \geq 1$, придем к матричному неравенству

$$(П.3) \quad A^T \tilde{P} A - \tilde{P} + (A^T \tilde{P} B + C^T)[\gamma^2 I - I - B^T \tilde{P} B]^{-1}[B^T \tilde{P} A + C] \leq -C^T C.$$

Обозначим $\beta^2 = \gamma^2 - 1 > 0$. Тогда

$$(П.4) \quad A^T \tilde{P} A - \tilde{P} + (A^T \tilde{P} B + C^T)[\beta^2 I - B^T \tilde{P} B]^{-1}[B^T \tilde{P} A + C] \leq -C^T C.$$

Прибавляя и вычитая из правой части последнего неравенства $A^T \tilde{P} z$ ($z = e^{j\omega T}$), предварительно умножив обе части на (-1) , и обозначая

$$F^T F = (A^T \tilde{P} B + C^T)[\beta^2 I - B^T \tilde{P} B]^{-1}[B^T \tilde{P} A + C],$$

придем к частотному матричному неравенству

$$A^T \tilde{P}(zI - A) + (z^{-1}I - A^T)\tilde{P}z - F^T F \geq C^T C.$$

Умножая полученное выражение слева на $B^T(z^{-1}I - A^T)^{-1}$ и справа на $(zI - A)^{-1}B$, после несложных преобразований, учитывая тождество $z(zI - A)^{-1} = I + A(zI - A)^{-1}$ и полагая $F(z) = F(zI - A)^{-1}B$, придем к следующему выражению:

$$(П.5) \quad B^T(z^{-1}I - A^T)^{-1}A^T\tilde{P}B + \\ + B^T\tilde{P}A(zI - A)^{-1}B + B^T\tilde{P}B - F^T(z^{-1})F(z) \geq T_0^T(z^{-1})T_0(z),$$

где $T_0(z) = C(zI - A)^{-1}B$, а $T(z) = T_0(z) + I$.

Добавим к обеим частям (П.5) $T_0^T(z^{-1}) + T_0(z) - \beta^2I$, где $\beta^2 = \gamma^2 - 1$, ($z = e^{j\omega T}$), тогда получим (учитывая выражение для $F^T F$)

$$B^T(z^{-1}I - A^T)^{-1}(A^T\tilde{P}B + C^T) + (B^T\tilde{P}A + C)(zI - A)^{-1}B + B^T\tilde{P}B - \beta^2I - \\ - B^T(z^{-1}I - A^T)^{-1}(A^T\tilde{P}B + C^T)(-B^T\tilde{P}B + \beta^2I)^{-1}(B^T\tilde{P}A + C)(zI - A)^{-1}B \geq \\ (П.6) \quad \geq T_0^T(z^{-1})T_0(z) + T_0^T(z^{-1}) + T_0(z) - \beta^2I.$$

Умножая последнее выражение на (-1) и преобразуя левую его часть с учетом обозначений

$$W(z) = (\beta^2I - B^T\tilde{P}B)^{-1}(B^T\tilde{P}A + C)(zI - A)^{-1}B$$

и

$$W^T(z^{-1}) = B^T(z^{-1}I - A^T)^{-1}(A^T\tilde{P}B + C^T)(\beta^2I - B^T\tilde{P}B)^{-1},$$

придем к частотному матричному неравенству

$$-W^T(z^{-1})(\beta^2I - B^T\tilde{P}B) - (\beta^2I - B^T\tilde{P}B)W(z) + \\ + W^T(z^{-1})(\beta^2I - B^T\tilde{P}B)W(z) + \beta^2I - B^T\tilde{P}B \leq \\ \leq -T_0^T(z^{-1})T_0(z) - T_0^T(z^{-1}) - T_0(z) + \beta^2I,$$

или

$$(П.7) \quad (I - W^T(z^{-1}))(\beta^2I - B^T\tilde{P}B)(I - W(z)) \leq \\ \leq -T_0^T(z^{-1})T_0(z) - T_0^T(z^{-1}) - T_0(z) + \beta^2I.$$

Поскольку $(\beta^2I - B^T\tilde{P}B) > 0$, то левая часть (П.7) неотрицательно определена, следовательно, и правая его часть неотрицательно определена (напомним, что $z = e^{j\omega T}$), откуда

$$T_0^T(z^{-1})T_0(z) + T_0^T(z^{-1}) + T_0(z) - \beta^2I \leq 0.$$

Но так как $\beta^2 = \gamma^2 - 1$, отсюда следует, что

$$[I + T_0(z^{-1})]^T[I + T_0(z)] \leq \gamma^2I,$$

а это частотное неравенство (4.3), поскольку $T(z) = T_0(z) + I$. Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, Fragile, or Optimal? // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No. 8. P. 1098–1105.
2. *Бодэ Г.* Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948.
3. *Александров А.Г.* Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования / Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1980. С. 3–14.
4. *Александров А.Г.* Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления // АиТ. 2007. № 8. С. 4–17.
Aleksandrov A.G. Stability Margins of the Systems of Optimal and Modal Control // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 8. P. 1296–1308.
5. *Александров А.Г.* Алгебраические условия негрубости // АиТ. 2009. № 9. С. 56–68.
Aleksandrov A.G. Algebraic Nonrobustness Conditions // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 9. P. 1487–1498.
6. *Александров А.Г.* Запасы устойчивости и робастная устойчивость // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 6. С. 32–41.
7. *Safonov M.G., Athans M.* Gain and phase margin for multiloop LQG regulators // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. V. 22. No. 2. P. 173–179.
8. *Александров А.Г.* Степень грубости систем с устройствами восстановления фазовых переменных / Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1977. С. 105–118.
9. *Doyle J.C.* Guaranteed margins for LQG regulators // IEEE Trans. Automat. Control. 1978. V. 23. No. 4. P. 756–757.
10. *Александров А.Г.* Прямой метод аналитического синтеза регуляторов. Неполная степень наблюдаемости // Изв. ВУЗов СССР. Приборостроение. 1978. № 11. С. 34–39.
11. *Doyle J.C., Stein G.* Robustness with observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. V. 24. No. 4. P. 607–611.
12. *Doyle J.C., Stein G.* Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. No. 1. P. 4–16.
13. *Lehtomaki N.A., Sandell N.R., Athans M.* Robustness results in linear-quadratic Gaussian based multivariable control designs // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. No. 1. P. 75–92.
14. *Александров А.Г.* Построение дискретных систем управления с заданными свойствами // АиТ. 1973. № 9. С. 57–66.
Aleksandrov A.G. Construction of Discrete Control Systems with Given Properties // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 9. P. 1414–1423.
15. *Safonov M.G.* Stability and robustness of multivariable feedback systems. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1980.
16. *Shaked U.* Guaranteed Stability Margins for the Discrete-Time Linear-Quadratic Optimal Regulator // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. No. 2. P. 162–165.
17. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
18. *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.
19. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal control. Linear Quadratic Methods. N.Y.: Prentice-Hall, 1990.

20. Александров А.Г., Честнов В.Н. Свойства аналитически сконструированных систем с цифровыми регуляторами // Изв. ВУЗов СССР. Приборостроение. 1987. № 4. С. 13–17.
21. Честнов В.Н. Свойства аналитически сконструированных многомерных систем с цифровыми регуляторами // Изв. ВУЗов СССР. Приборостроение. 1991. № 10. С. 11–18.
22. Честнов В.Н. Модальное управление одномерными объектами с учетом заданного радиуса запасов устойчивости // Тр. межд. научн. конф. “Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения”. Саратов, 2000. С. 159–164.
23. Stein G., Athans M. The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32. No. 2. P. 105–114.
24. Maciejowski J.M. Asymptotic recovery for discrete-time system // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V. 30. No. 6. P. 602–605.
25. Ishihara T., Takeda H. Loop transfer recovery techniques for discrete-time optimal regulator using prediction estimators // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. No. 12. P. 1149–1151.
26. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ -оптимизации // АиТ. 1999. № 7. С. 100–109.
Chestnov V.N. Design of Controllers of Multidimensional Systems with a Given Radius of Stability Margins Based on the H_∞ -optimization Procedure // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 986–993.
27. Anderson B.D.O., Moore J.B. Linear optimal control. N.Y.: Prentice-Hall, 1971.
28. Честнов В.Н., Собчинский А.В. Синтез цифровых регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости // Сб. научн. трудов “Робастное управление и частотная идентификация” / Под ред. В.Н. Честнова. Электросталь: ЭПИ МИСиС, 2004. С. 43–54.
29. Честнов В.Н. Синтез робастных H_∞ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // АиТ. 2007. № 3. С. 199–205.
Chestnov V.N. Design of Robust H_∞ -controllers of Multivariable Systems Based on the Given Stability Degree // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 557–563.
30. Bhattacharyya S.P., Keel L.H., Chapellat H. Robust Control. The Parametric Approach. Prentice Hall, 1995.
31. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастный критерий Найквиста // АиТ. 1992. № 7. С. 25–31.
Polyak B.T., Tsytkin Ya.Z. The Robust Nyquist Criterion // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 7. P. 972–977.
32. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
33. Kwakernaak H. Robust control and H_∞ -optimization – Tutorial paper // Automatica. 1993. V. 29. No. 2. P. 255–273.
34. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–846.
35. The Control Handbook / Ed. W.S. Levine. IEEE Press, 1996.
36. Iglesias P.A., Glover K. A state space approach to discrete-time H_∞ Control // Int. J. Control. 1991. V. 54. No. 5. P. 1031–1075.

37. *Честнов В.Н.* Синтез H_∞ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // *АиТ.* 2011. № 10. С. 170–185.
Chestnov V.N. Synthesizing H_∞ -controllers for Multidimensional Systems with Given Accuracy and Degree of Stability // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 10. P. 2161–2175.
38. *Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., Safonov M.G.* Robust Control Toolbox 3: User's guide/Natick (Mass.): The MathWorks, Inc., 2010.
39. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Алгебраические уравнения Риккати и линейные матричные неравенства для систем дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2005.
40. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
41. *Boyd S., Chaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequality in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 23.02.2013