

Робастные и адаптивные системы

© 2015 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук (vnchest@rambler.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

H_∞ -ПОДХОД К СИНТЕЗУ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассматривается задача робастной стабилизации линейных многомерных систем, физические параметры которых могут отклоняться от расчетных (номинальных) в известных границах, а объект управления подвержен действию неизмеряемых полигармонических внешних возмущений (с неизвестными амплитудами и частотами), ограниченных по мощности. Ставится задача синтеза регулятора, гарантирующего робастную устойчивость замкнутой системы и дополнительно обеспечивающего заданные ошибки по регулируемым переменным в установившемся номинальном режиме. Решение задачи опирается на технику размыкания системы объект–регулятор по варьируемым параметрам объекта и сводится к стандартной процедуре H_∞ -оптимизации, а заданная точность достигается путем выбора весовой матрицы при регулируемых переменных объекта. Приводится решение известной “benchmark” задачи.

1. Введение

Проблеме робастной стабилизации систем с отклонениями параметров от расчетных (номинальных) посвящено большое число исследований (см., например, [1–5]). Вместе с тем в большинстве работ, как правило, в качестве параметров модели рассматриваются либо элементы матриц уравнений состояния, либо коэффициенты передаточных функций, составляющих передаточную матрицу объекта. Вообще говоря, эти параметры не суть *физические*, так как уравнения состояния и передаточная матрица являются вторичными формами описания динамических систем. Они получаются путем преобразования исходных уравнений динамической системы, записанных на основе фундаментальных физических законов механики и электродинамики. В данной статье речь идет о параметрах этой исходной формы описания, имеющих ясный физический смысл (масса, момент инерции, сопротивление, емкость, индуктивность и т.д.). Кроме того, переход от исходной формы описания в физических переменных к другой обычно сопровождается “перемешиванием” и “размножением” варьируемых параметров, что сильно усложняет исходную задачу и делает конечный результат существенно более консервативным [1].

Обычно реальные динамические системы на практике подвержены действию неизмеряемых внешних возмущений, которые в математической теории управления ограничиваются по какой-либо норме [4–7]. Возмущения от-

клоняют регулируемые переменные объекта управления от их номинальных значений (в задаче стабилизации это нули), поэтому возникает задача обеспечения заданных (не более допустимых) отклонений этих переменных от нуля [6]. Проблеме подавления внешних возмущений посвящено много исследований [4–9]. Так, в [7] развивается метод инвариантных эллипсоидов для внешних возмущений, ограниченных либо евклидовой нормой, либо покомпонентно в каждый момент времени. При этом учитываются ограничения на управляющие сигналы, а также ненулевые начальные условия. Теоретические и численные результаты опираются на метод линейных матричных неравенств (ЛМИ) [5].

В близких направлениях, инициированных публикациями [8, 9], формируется некий дополнительный контур, позволяющий оценить внешнее возмущение, а затем его компенсировать. Здесь делаются различные предположения о свойствах объекта: устойчивый [8] и/или минимально-фазовый [8, 9]. Типичная трудность этих подходов состоит в том, что часть параметров управляющего устройства при его синтезе находится лишь на этапе математического моделирования замкнутой системы.

Развиваемый в статье подход опирается на представление динамической системы в так называемой канонической (W, Λ, K) -форме [1, 10, 11] (впервые предложенной в [10]), где физические параметры, подверженные отклонениям от расчетных, образуют внутренние фиктивные обратные связи в виде диагональной матрицы Λ . Данный метод благодаря своей инженерной ясности и прозрачности численной реализации можно рассматривать как существенно более простую альтернативу μ -подходу Дж. Дойла [4, 12–15], который имеет крайне сложный вычислительный характер с малой эффективностью для вещественного случая неопределенностей (real- μ) [4, 13] и приводит к регуляторам сверх высокого порядка (см., например, [15], где для объекта второго порядка регулятор имеет 22-й порядок!!!).

В качестве неизмеряемых внешних возмущений рассматриваются полигармонические возмущения, ограниченные по мощности. При этом аналогично [16, 17] используется понятие радиуса установившегося состояния динамической системы по регулируемым переменным (характеризующего точность), и регулятор, помимо робастной устойчивости, должен обеспечивать заданный или минимизируемый радиус.

Решение задачи робастной стабилизации оригинальное и опирается на частотное матричное неравенство, определяющее многомерные запасы устойчивости по коэффициенту усиления при размыкании замкнутой системы по параметрам (фиктивной управляющей переменной \tilde{u} , в (W, Λ, K) -форме), в отличие от классических точек размыкания: физический вход или выход объекта. Это частотное условие сводится к стандартной проблеме парирования внешних возмущений H_∞ -подхода [1], а заданная точность достигается путем специального выбора весовой матрицы при регулируемых переменных объекта аналогично [16, 17]. Программно данный подход реализован в рамках MATLAB на основе пакета Robust Control Toolbox [12] и использует технику ЛМИ. Приводится пример синтеза регулятора для широко известной “benchmark” задачи из [1, 12, 13].

2. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями в физических переменных:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} L_1(p)z_f(t) &= L_2(p)u(t) + L_3(p)f(t), \\ y(t) &= Nz_f(t), \end{aligned}$$

где z_f — l -мерный вектор физических переменных объекта (скорость, ускорение, ток, напряжение, перемещение, угол поворота и т.д.); u — m -мерный вектор управляющих воздействий; y — m_2 -мерный вектор измеряемых (и одновременно регулируемых) переменных объекта; f — μ -мерный вектор внешних ограниченных неизменяемых возмущений; N — известная числовая матрица размера $m_2 \times l$; $L_1(p)$, $L_2(p)$, $L_3(p)$ — полиномиальные матрицы размеров $l \times l$, $l \times m$ и $l \times \mu$ соответственно оператора дифференцирования $p = d/dt$:

$$(2.2) \quad L_1(p) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} L_1^{(i)} p^i, \quad L_2(p) = \sum_{j=0}^{\alpha_2} L_2^{(j)} p^j, \quad L_3(p) = \sum_{k=0}^{\alpha_3} L_3^{(k)} p^k,$$

где $L_1^{(i)}$, $L_2^{(j)}$, $L_3^{(k)}$ — известные вещественные матрицы соответствующих размеров, $\alpha_2, \alpha_3 < \alpha_1$.

Будем полагать, что объект (2.1) стабилизируем и детектируем. Элементы матриц $L_1^{(i)}$ ($i = \overline{1, \alpha_1}$), $L_2^{(j)}$ ($j = \overline{1, \alpha_2}$) далее будем называть физическими параметрами объекта управления. Пусть n физических параметров объекта (их число и расположение в матрицах не ограничено) с номинальными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ могут принимать значения из заданных интервалов

$$(2.3) \quad \lambda_i + \Delta\lambda_i \in (\lambda_i^{\min}, \lambda_i^{\max}), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\Delta\lambda_i$ — отклонение параметра от расчетного, λ_i^{\min} , λ_i^{\max} — известные нижняя и верхняя границы.

Элементы матрицы $L_3(p)$ на устойчивость замкнутой системы не оказывают влияния, поэтому их отклонения от расчетных далее не рассматриваются.

Компоненты вектора внешних возмущений f представляют собой ограниченные полигармонические функции

$$(2.4) \quad f(t) = \sum_{k=1}^{p_0} w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, \mu}.$$

Здесь амплитуды w_{ik} , начальные фазы ψ_{ik} ($i = \overline{1, \mu}$, $k = \overline{1, p_0}$), а также частоты ω_k ($k = \overline{1, p_0}$) гармоник не известны, однако известно, что амплитуды гармоник подчинены условию (ограничивающему мощность каждой компоненты внешнего возмущения):

$$(2.5) \quad \sum_{k=1}^{p_0} w_{ik}^2 \leq (w_i^*)^2, \quad i = \overline{1, \mu},$$

где p_0 — известное число гармоник, w_i^* ($i = \overline{1, \mu}$) — заданные числа.

Определим установившиеся ошибки по регулируемым переменным соотношением из [6, 16] $y_{i,st} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t)|$ ($i = \overline{1, m_2}$). Обычно требуется найти такой стабилизирующий регулятор по выходу, чтобы выполнялись неравенства (требования к точности) $y_{i,st} \leq y_i^*$ ($i = \overline{1, m_2}$), где $y_i^* > 0$, $i = \overline{1, m_2}$, – заданные числа. Однако ясно, что такого регулятора может не быть, поэтому определим радиус установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным соотношением

$$(2.6) \quad r_{st}^2 = \sum_{i=1}^{m_2} \left(\frac{y_{i,st}}{y_i^*} \right)^2$$

и этот радиус будем ограничивать [16, 17].

Задача 1. Построить стабилизирующий регулятор по выходу

$$(2.7) \quad u(t) = K(p)y(t)$$

такой, чтобы, с одной стороны, при заданных конечных отклонениях параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ от расчетных (2.3) замкнутая система (2.1), (2.7) сохраняла асимптотическую устойчивость, а с другой – выполнялось условие

$$(2.8) \quad r_{st}^2 = \sum_{i=1}^{m_2} \left(\frac{y_{i,st}}{y_i^*} \right)^2 \leq \gamma^2,$$

где $K(p)$ – передаточная матрица регулятора, элементы которой – правильные дробно-рациональные функции оператора p ; γ – заданное или минимизируемое число.

Легко видеть, что знаку равенства в выражении (2.8) (при известном γ) соответствует уравнение гиперэллипсоида с заданными полуосями, поверхности которого принадлежат ошибки регулирования. Если в результате решения задачи синтеза получилось $\gamma \leq 1$, то, очевидно, выполнены и требования к точности.

3. Приведение системы к канонической (W, Λ, K) -форме

Для решения поставленной задачи представим уравнения замкнутой системы (2.1), (2.7) в канонической (W, Λ, K) -форме [1] с учетом внешнего возмущения f :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}\tilde{u} + W_{12}u + W_{13}f, & \tilde{u} &= \Lambda\tilde{y}, \\ y &= W_{21}\tilde{u} + W_{22}u + W_{23}f, & u &= K(s)y, \end{aligned}$$

где $W_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, j = \overline{1, 3}$) – известные передаточные матрицы, не содержащие варьируемых параметров (2.3); u, y – физические вход и выход объекта управления (2.1); \tilde{u}, \tilde{y} – n -мерные фиктивные вход и выход объекта управления; $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ – диагональная матрица параметров объекта

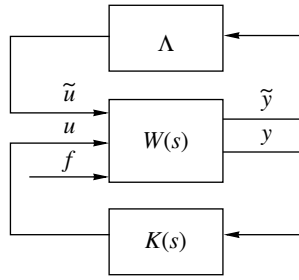


Рис. 1.

управления, подверженных отклонениям от расчетных; $K(s)$ – искомая передаточная матрица регулятора (2.7), где s – символ преобразования Лапласа.

Структурная схема (W, Λ, K) -формы, соответствующая уравнениям (3.1), приведена на рис. 1.

Теорема 1. Уравнения замкнутой системы (2.1), (2.7) всегда могут быть представлены в эквивалентной (W, Λ, K) -форме (3.1).

Доказательство теоремы 1 конструктивно дает алгоритм построения (W, Λ, K) -формы и приведено в Приложении.

4. Подход к решению задачи [1]

Передаточная матрица разомкнутой системы (3.1) по варьируемым параметрам λ_i ($i = \overline{1, n}$) (когда размыкание осуществляется по переменной \tilde{u}) записывается в виде из [1] :

$$(4.1) \quad W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(s) = \Lambda[-W_{11} - W_{12}K(I - W_{22}K)^{-1}W_{21}],$$

где I – единичная матрица соответствующих размеров.

Как видно из (4.1), важной особенностью данной передаточной матрицы является то, что варьируемые параметры составляют в ней диагональную матрицу коэффициентов усиления.

Если эта передаточная матрица удовлетворяет круговому частотному неравенству [10, 11]

$$(4.2) \quad [I + W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(-j\omega)]^T [I + W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(j\omega)] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty)$$

(где r – радиус запасов устойчивости $0 < r \leq 1$), то имеют место достаточные оценки на интервалы возможных значений параметров [1, 10, 11]:

$$(4.3) \quad \min \left\{ \frac{\lambda_i}{1+r}, \frac{\lambda_i}{1-r} \right\} < \lambda_i + \Delta\lambda_i < \max \left\{ \frac{\lambda_i}{1+r}, \frac{\lambda_i}{1-r} \right\}, \quad i = \overline{1, n}$$

гарантирующие робастную устойчивость замкнутой системы (2.1), (2.7).

В случае $n = 1$ выполнение неравенства (4.2) означает [1], что годограф Найквиста $W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(j\omega)$ не пересекает круг радиусом r с центром в критической

точке $(-1, j0)$ на плоскости годографа. В случае $n > 1$ это частотное условие имеет следующую физическую интерпретацию: по каждому из фиктивных входов объекта $\tilde{u}_i (i = \overline{1, n})$ (см. рис. 1) коэффициенты усиления от номинального значения, равного единице, можно независимо друг от друга изменять в интервалах $(1/(1+r), 1/(1-r))$ без потери устойчивости (так же как и для $n = 1$). Отсюда и вытекают границы (4.3) в силу диагональной структуры матрицы Λ [1, 10, 11], поскольку изменение коэффициента усиления в контуре можно пересчитать в отклонение самого параметра от расчетного.

Таким образом, решение первой части задачи 1 сводится к такому построению матрицы K регулятора (2.7), при котором r в (4.2) принимает заданное значение либо максимизируется. Если при выбранных номинальных значениях $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ заданные интервалы для параметров (2.3) оказываются включенными в соответствующие интервалы (4.3), то первая часть задачи 1 решена. Такая задача рассмотрена в [1]. Следующим шагом в решении поставленной задачи 1 является дополнительный учет условия (2.8).

5. Сведение задачи к стандартной проблеме H_∞ -оптимизации

Рассмотрим замкнутую систему, представленную на рис. 2, которая описывается уравнениями:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}z_1 + W_{12}u + W_{13}f, & \tilde{u} &= \Lambda\tilde{y}, & z_1 &= \tilde{u} + w_1, \\ y &= W_{21}z_1 + W_{22}u + W_{23}f, & u &= Ky, & z_2 &= Q^{1/2}y, \end{aligned}$$

где $w_1 \in R^n$ – вектор фиктивных внешних возмущений; $z_1 \in R^n$ – вектор фиктивных регулируемых переменных; $z_2 \in R^{m_2}$ – взвешенный вектор регулируемых переменных с помощью диагональной матрицы $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{m_2}]$ с положительными элементами $q_i > 0 (i = \overline{1, m_2})$. По сравнению с работой [1] здесь дополнительно появилось внешнее возмущение f и регулируемая переменная z_2 .

Введем расширенный вектор внешних возмущений w , включающий вектор фиктивных внешних возмущений w_1 и вектор возмущений f , и расширенный вектор регулируемых переменных z , объединяющий векторы z_1 и z_2 . Передаточную матрицу замкнутой системы, связывающую эти векторы, обозначим

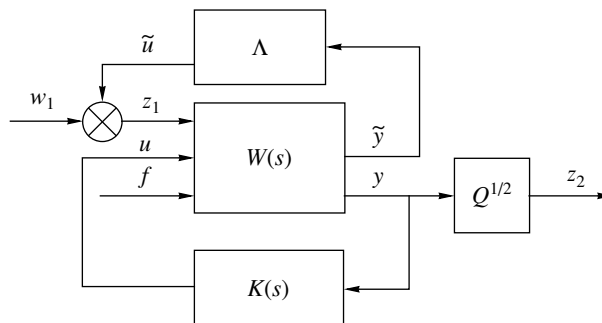


Рис. 2.

через T_{zw} . Тогда можно записать, что

$$(5.2) \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{zw}w = \begin{bmatrix} T_{z_1w_1} & T_{z_1f} \\ Q^{1/2}T_{yw_1} & Q^{1/2}T_{yf_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ f \end{bmatrix},$$

где $T_{z_1w_1}$ – передаточная матрица, связывающая вектор w_1 и z_1 в замкнутой системе (5.2), а остальные элементы T_{zw} аналогичны.

Пусть искомым стабилизирующий регулятор $K(s)$ разрешает задачу минимизации H_∞ -нормы передаточной матрицы замкнутой системы (5.2):

$$(5.3) \quad \|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma.$$

Тогда каждый из блоков этой матрицы удовлетворяет аналогичному условию [14], в частности

$$(5.4) \quad \|T_{z_1w_1}\|_\infty \leq \gamma \quad \text{и} \quad \|Q^{1/2}T_{yf}\|_\infty \leq \gamma.$$

Первое неравенство из (5.4) может быть представлено в виде условия (4.2), где в соответствии с [1]

$$(5.5) \quad T_{z_1w_1}(s) = [I + W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(s)]^{-1}, \quad \text{а} \quad r = 1/\gamma.$$

Второе неравенство из (5.4) также представляется в эквивалентной частотной форме [6, 17]:

$$(5.6) \quad T_{yf}^T(-j\omega)QT_{yf}(-j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Из частотного неравенства (5.6), учитывая диагональную структуру матрицы Q , на основе леммы об установившихся значениях [6, 17], получим неравенство для установившихся значений регулируемых переменных

$$(5.7) \quad \sum_{i=1}^{m_2} q_i y_{i,st}^2 \leq p_0 \gamma^2 \|w^*\|^2,$$

где $\|w^*\|$ – евклидова норма вектора w^* с компонентами правой части (2.5).

Выбирая элементы диагональной весовой матрицы Q из равенств

$$(5.8) \quad q_i = \frac{p_0 \|w^*\|^2}{(y_i^*)^2}, \quad i = \overline{1, m_2},$$

придем к выполнению целевого условия (2.8), где γ – реализовавшееся значение при численном решении задачи (5.3).

Задачу по нахождению правильной передаточной матрицы регулятора $K(s)$, при котором выполнялись бы неравенства (2.8) и (4.2), можно переформулировать в виде следующих вспомогательных задач H_∞ -оптимального и субоптимального управления.

Задача 2. Найти правильную передаточную матрицу регулятора (2.7), который бы обеспечивал выполнение неравенства (5.3) с минимально возможным $\gamma = \gamma_0$.

Задача 3. Дано число $\gamma > \gamma_0$. Найти правильную передаточную матрицу регулятора (2.7), такую, чтобы выполнялось неравенство (5.3).

Если задачи 2 или 3 решены, то из (4.3) находятся достаточные оценки на интервалы возможных значений параметров, гарантирующие робастную устойчивость системы (2.1), (2.7), где радиус запасов устойчивости $r = \gamma^{-1}$, а из неравенства (2.8) – оценки ошибок регулирования, которые заведомо будут не хуже

$$(5.9) \quad y_{i,st} \leq \gamma y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Сравнивая найденные интервалы с заданными, можно сделать вывод о разрешении поставленной задачи 1. Итак, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть регулятор (2.7) разрешает вспомогательную H_∞ -задачу (5.3), когда элементы диагональной весовой матрицы Q взяты из равенств (5.8). Тогда реализовавшееся при численном решении этой задачи значение γ будет определять: а) радиус запасов устойчивости $r = \gamma^{-1}$, гарантирующий достаточные границы робастной устойчивости (4.3); б) достаточные оценки ошибок регулирования (2.8), (5.9).

Теперь придадим уравнениям (5.1) стандартную форму записи, принятую в H_∞ -теории:

$$z = G_{11}w + G_{12}u, \quad y = G_{21}w + G_{22}u, \quad u = Ky,$$

где $G_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$) – блоки передаточной матрицы $G(s)$ обобщенного объекта.

Утверждение. Передаточные матрицы $G_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$) обобщенного объекта связаны с передаточными матрицами уравнений (5.1) равенствами:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} G_{11} &= \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} & (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} & Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} + Q^{1/2} W_{23} \end{bmatrix}, \\ G_{12} &= \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + Q^{1/2} W_{22} \end{bmatrix}, \\ G_{21} &= [W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \quad W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} + W_{23}], \\ G_{22} &= [W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + W_{22}]. \end{aligned}$$

Доказательство утверждения элементарное и здесь не приводится.

Таким образом, решая H_∞ -проблему (5.3), добиваемся разрешения поставленной задачи 1.

Заметим, что с вычислительной точки зрения удобно для решения задачи (5.3) привести уравнения обобщенного объекта к уравнениям состояния [1]:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned}$$

где размерность вектора состояния x совпадает со степенью характеристического полинома объекта (2.1): $\det L_1(s)$. При этом очевидно, что вектор регулируемых переменных z не будет содержать управляющих воздействий, а помехи измерения отсутствуют. Это значит, что задача (5.3) относится к вырожденным [1, 18] и, следовательно, не может быть решена 2-Риккати подходом [19]. Для численного решения такой вырожденной задачи удобно применять метод линейных матричных неравенств, реализованный в MATLAB-пакете [12] (подобно [1, 20]).

6. Процедура синтеза

Представим процедуру синтеза в виде последовательности действий.

1. Привести уравнения системы (2.1), (2.7) к виду (3.1), где Λ – диагональная матрица, включающая выбранные проектировщиком номиналы физических параметров системы, подверженных отклонениям от расчетных.

2. Записать уравнения (5.1) в стандартной форме, принятой в теории H_∞ -управления, с учетом (5.10) и привести эту форму к уравнениям состояния (5.11).

3. Решить задачи 2 и 3 H_∞ -управления (5.3) с учетом (5.8) и (5.11) и найти передаточную матрицу регулятора (2.7) $K(s)$.

4. Найти границы гарантируемых допусков на параметры объекта по формулам (4.3) и найти оценки ошибок регулирования из (2.8) или (5.9).

5. Сравнить найденные в п. 4 границы допусков с заданными.

6. Если найденные границы допусков на параметры объекта из (4.3) не покрывают заданные (2.3) или найденные границы на ошибки регулирования превышают заданные, то данный метод не дает решения. Однако можно выбрать другие значения номинальных параметров или уменьшить желаемые значения ошибок регулирования и повторить синтез с п. 2. Но в общем случае, например, если объект неминимально-фазовый по управлению, а заданные ошибки меньше предельно достижимых (либо интервалы (2.3) настолько широки, что никакой линейный регулятор не может стабилизировать систему), то нет гарантии на успех решения. Численные эксперименты показали, что в случае такой “пробуксовки” метода достаточно одной-двух итераций, чтобы понять, что цели регулирования недостижимы.

Прокомментируем отдельные шаги этого алгоритма. В пакете [12] регулятору ставится в соответствие четверка матриц (A_c, B_c, C_c, D_c) , определяющих его уравнения состояния, а искомая передаточная матрица регулятора имеет вид $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$. При этом порядок регулятора не превышает порядка объекта – степени полинома $\det L_1(s)$. В п. 3 процедуры сначала определяется минимально возможное значение $\gamma = \gamma_0$ в задаче (5.3) с помощью функции *hinflmi* (см. подробнее [17]), а затем решается субоптимальная

задача (также с помощью *hinflmi*) при $\gamma > \gamma_0$ (при $\gamma = \gamma_0$ часть собственных значений матрицы замкнутой системы (2.1), (2.7) оказывается почти на мнимой оси!!!) и находится собственно $K(s)$. В п. 4 для определения ошибок регулирования можно прибегнуть к математическому моделированию, как сделано это далее в примере.

7. Пример решения задачи синтеза

Проиллюстрируем предложенный метод синтеза на примере двухмассовой системы с упругой связью: двух тележек, соединенных пружиной. Модель описывается уравнениями [13]:

$$(7.1) \quad \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -qx_1 + qx_2 + u + f, \quad \dot{x}_4 = qx_1 - qx_2 = x_2,$$

где q – варьируемый параметр (жесткость пружины), номинальное значение которого равно 0,8; x_1 – перемещение 1-й тележки; x_2 – перемещение 2-й тележки; $y = x_2$ – измеряемая переменная u – управляющее воздействие; f – внешнее возмущение.

Приведение уравнений (7.1) и (2.7) к форме (5.1) повторяет изложенное в [1] (где $\Lambda = q$ – скаляр), если в качестве u рассматривать сумму $(u + f)$, и здесь не приводится. Аналогичное замечание касается и формул (5.10). Используя уравнения состояния, приведенные в [1], легко получить уравнения состояния (5.11), соответствующие (5.1), где:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -q & q & 0 & 0 \\ q & -q & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -q & q & 0 & 0 \\ Q^{1/2} \cdot (0 & 1 & 0 & 0) \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = [0 \ 0], \quad D_{22} = [0].$$

Пусть установившаяся ошибка по регулируемой переменной не должна превышать $y^* = 1$, а внешнее возмущение (2.4), (2.5) ограничено величиной $w^* = 1$. Тогда в соответствии с (5.8) получим значение единственного весового коэффициента при скалярной регулируемой переменной y на структурной схеме рис. 2 $Q = q_1 = 1$.

Полученный с помощью пакета [12] регулятор $K(s)$ имеет вид

$$\frac{-3,1 \cdot 10^8 s^3 - 4,2 \cdot 10^8 s^2 - 4,6 \cdot 10^8 s - 1,6 \cdot 10^8}{s^4 + 193,7 s^3 + 2,2 \cdot 10^4 s^2 + 1,4 \cdot 10^6 s + 6,1 \cdot 10^7}.$$

Заметим, что амплитудно-частотные характеристики замкнутой системы $|T_{yf}(j\omega)|$, приведенные на рис. 3 (с регулятором, построенным на основе предлагаемого здесь метода) и на рис. 4 (полученная на основе [1], когда внешнее возмущение при синтезе во внимание не принималось), – монотонно убывающие функции частоты ω , поэтому наилучшее внешнее возмущение в обоих случаях f – ступенька.

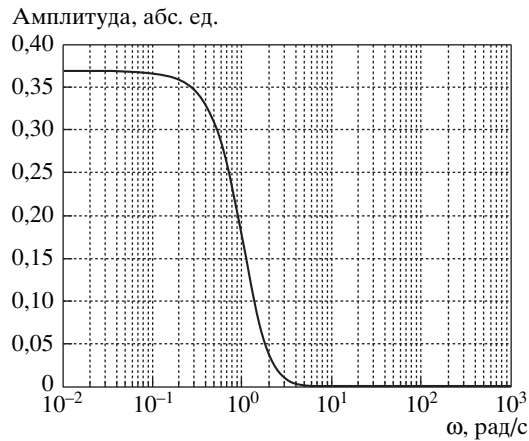


Рис. 3.

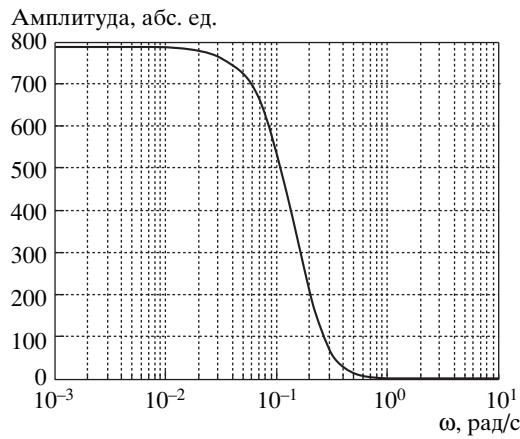


Рис. 4.

Отметим, что начальные точки на рис. 3 и рис. 4 не зависят от значения параметра q , что является следствием независимости от q коэффициента передачи объекта, равного 0,5. На рис. 5 приведен переходный процесс в замкнутой системе по регулируемой переменной $y = x_2$ при нулевых начальных условиях и единичной ступеньке в качестве f . Для сравнения на рис. 6 приведен переходный процесс с регулятором из [1], когда внешнее возмущение при синтезе во внимание не принималось.

Анализируя переходные процессы, видим, что простой учет в расширенном векторе регулируемых переменных z в процедуре синтеза взвешенного сигнала y позволяет более чем на три порядка уменьшить установившуюся ошибку в замкнутой системе по сравнению с [1]. Причиной этого является минимальная фазовость объекта (он вообще не имеет нулей [1], его передаточная функция $q/(s^4 + 2qs^2)$). Это позволяет достигнуть сколь угодно малой ошибки регулирования при увеличении весового коэффициента q_1 на основе (5.8) при весьма широких допусках на q . Гарантируемые грани-

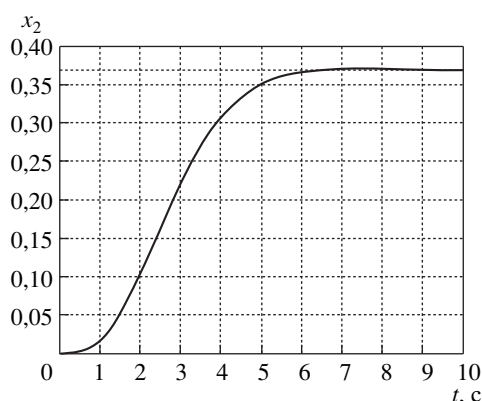


Рис. 5.

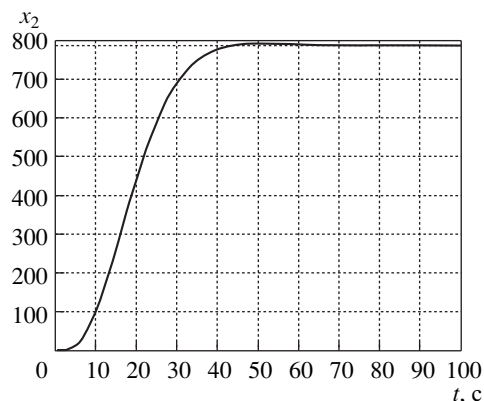


Рис. 6.

цы допусков на варьируемый параметр с номинальным значением 0,8 были найдены по формулам (4.3). Так как параметр q – множитель передаточной функции разомкнутой системы (4.1), то, определив точки пересечения годографа Найквиста с вещественной осью (это точки $-3,756$ и $-0,093$), найдем истинные границы устойчивости по варьируемому параметру q . В таблице приведены результаты исследования объекта (7.1), замкнутого найденным регулятором и регулятором из [1]. Заметим, что истинные и гарантируемые допуски на параметр q существенно превышают допуски известных методов синтеза [12, 13]: $0,4459 < q < 2,066$.

В последней строке таблицы приведены значения запасов устойчивости по модулю L и фазе φ_z , широко используемые в инженерной практике, которые определяются при размыкании замкнутой системы по переменной u (физи-

Результаты анализа системы

	Без учета внешнего возмущения [1]	С учетом внешнего возмущения ($q_1 = 1$)
Передаточная функция синтезированного регулятора	$\frac{-1255s^3+8016s^2-112,1s-5,679}{s^4+17,12s^3+195s^2+1178s+4470}$	$\frac{-3,110^8s^3-4,2\cdot 10^8s^2-4,6\cdot 10^8s-1,6\cdot 10^8}{s^4+193,7s^3+2,2\cdot 10^4s^2+1,4\cdot 10^6s+6,1\cdot 10^7}$
Значение параметра γ	1,1701	1,1306
Гарантируемый радиус запасов устойчивости r	0,8546	0,8845
Гарантируемые границы робастной устойчивости по параметру q	$0,4314 < q < 5,5016$	$0,4245 < q < 6,9264$
Истинные границы робастной устойчивости по параметру q	$0,1985 < q < 8,8594$	$0,213 < q < 8,6022$
Запасы устойчивости при размыкании системы по входу/выходу объекта	$L = 0,57$ дБ, $\varphi_z = 6,63^\circ$	$L = 20,7$ дБ, $\varphi_z = 65,2^\circ$

ческому входу объекта) или по y (физическому выходу) [3, 4, 20]. Отметим весьма низкие запасы устойчивости по фазе и модулю (радиус запасов устойчивости в этих точках размыкания крайне мал и равен 0,063), если регулятор строится без учета внешнего возмущения, хотя границы на варьируемый параметр весьма широки. Заметим, что в примере 1 с тем же объектом работы [20] наблюдалась совершенно противоположная ситуация: радиус запасов устойчивости на входе (выходе) объекта значителен, а малое отклонение параметра q от номинала приводит к неустойчивости. Таким образом, очевидна необходимость метода синтеза робастного регулятора, который бы учитывал не только возможные конечные отклонения физических параметров от расчетных, но и заданный радиус запасов устойчивости на физическом входе (выходе) объекта. Однако это предмет дальнейших исследований.

8. Заключение

В работе представлено одно из решений задачи робастной стабилизации при параметрической неопределенности и действии внешних ограниченных по мощности полигармонических возмущений. Отметим некоторые преимущества предложенного подхода перед известными.

1. Рассматриваются отклонения *физических* параметров от расчетных.
2. Процедура синтеза сводится к стандартной задаче H_∞ -управления, для решения которой имеется готовое программное обеспечение [12], широко используемое в мире.
3. Ясный инженерный смысл критериев синтеза (радиусов запасов устойчивости и установившегося состояния), безытерационный характер и простота процедуры синтеза в отличие от сильно разрекламированного в западных публикациях μ -синтеза [4, 12–15].
4. Порядок регулятора, полученного в результате решения задачи синтеза, не превышает порядка физического объекта управления, что важно для практических приложений.

Замечание 1. Вообще говоря, амплитуды и частоты внешнего возмущения (2.4) суть фиксированные числа только на интервале, не превышающем времени регулирования в замкнутой системе (2.1), (2.7). Это вытекает из леммы об установившихся значениях [6, 17] для матричных частотных неравенств (5.3)–(5.6) и свойства возмущения (2.5), независимых от частот внешнего возмущения.

Замечание 2. Из кругового критерия абсолютной устойчивости [21] (целевое неравенство (4.2) – один из его вариантов) следует, что отклонения параметров от расчетных в границах (4.3) могут иметь нестационарный характер. Кроме того, в части или во всех контурах по переменным \tilde{u}_i ($i = \overline{1, n}$) на рис. 1 могут присутствовать нестационарные нелинейные элементы из класса (принадлежащих гурвицевому углу – сектору) $(1/(1+r), 1/(1-r))$, которые не нарушают асимптотической устойчивости в целом системы рис. 1.

Недостаток подхода – достаточность оценок (4.3) и (2.8), (5.9). Определенную достаточность вносит переход от вспомогательного неравенства (5.3) к целевым неравенствам (5.4). Однако анализ переходных процессов и допус-

ков на параметр в примере раздела 7 показывает, что степень достаточности этих оценок не слишком высокая.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть для определенности варьируемыми физическими параметрами системы являются: k произвольных элементов матриц $L_1^{(\beta_1)}$ ($\beta_1 = \overline{1, \alpha_1}$): $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_{k+q}$, где $k+q = n$ – общее число варьируемых параметров. Введем обозначения:

$$L_{10}(p) = L_1(p)|_{\lambda_i=0}, \quad i = \overline{1, k}, \quad L_{20}(p) = L_2(p)|_{\lambda_{k+j}=0}, \quad j = \overline{1, q},$$

где в соответствующих матрицах варьируемые параметры заменяются нулями. Представим исходный объект (2.1) в эквивалентном виде (где аргументы для упрощения записи опущены, а также введено обозначение $z_f = z$):

$$(П.1) \quad \begin{aligned} L_{10}z &= L_{20}u + L_3f + \sum_{r=1}^k e_{i_r} \tilde{u}_r + \sum_{r=k+1}^n e_{\alpha_r} \tilde{u}_r, \\ \tilde{u}_r(p) &= -\lambda_r p^{(\beta_1)_r} e_{j_r}^T z, \quad r = \overline{1, k}, \\ \tilde{u}_r(p) &= \lambda_r p^{(\beta_2)_r} \eta_{\beta_r}^T u, \quad r = \overline{k+1, n}, \\ y &= Nz. \end{aligned}$$

Здесь $(\beta_s)_r$ ($s = 1, 2$) – номер матрицы $L_s^{(\beta_s)}$, в которой расположен параметр λ_r ($r = \overline{1, n}$); (i_r, j_r) – строка и столбец матрицы $L_1^{(\beta_1)}$, где расположен параметр λ_r , при $r = \overline{1, k}$; (α_r, β_r) – строка и столбец матрицы $L_2^{(\beta_2)}$, где расположен параметр λ_r , при $r = \overline{k+1, n}$; e_{j_r}, η_{β_r} – векторы размерности l и m соответственно:

$$e_{j_r} = \begin{cases} e_{j_r, i} = 0 & \text{при } i \neq j_r, \\ e_{j_r, j_r} = 1, \end{cases} \quad \eta_{\beta_r} = \begin{cases} \eta_{\beta_r, i} = 0 & \text{при } i \neq \beta_r, \\ \eta_{\beta_r, \beta_r} = 1. \end{cases}$$

Введем матрицу E , объединяющую векторы e_{i_r} и e_{α_r} из первого соотношения (П.1), и, формируя n -мерный вектор фиктивных входов $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{k+1}, \dots, \tilde{u}_n]^T$, после перехода к преобразованию Лапласа при нулевых начальных условиях из этого соотношения получим:

$$(П.2) \quad z = (L_{10}(s))^{-1} E \tilde{u} + (L_{10}(s))^{-1} L_{20}(s) u + (L_{10}(s))^{-1} L_3(s) f.$$

С учетом (П.2), последнего уравнения (П.1) и второго соотношения из (3.1) заключаем, что

$$(П.3) \quad \begin{aligned} W_{21} &= N(L_{10}(s))^{-1} E, \quad W_{22} = N(L_{10}(s))^{-1} L_{20}(s), \\ W_{23} &= N(L_{10}(s))^{-1} L_3(s). \end{aligned}$$

Теперь получим выражения для n фиктивных выходов объекта \tilde{y}_r , объединенных в вектор \tilde{y} . Для выполнения $\tilde{u} = \Lambda \tilde{y}$ фиктивные выходы в (П.1)

должны иметь вид $\tilde{y}_r(s) = -s^{(\beta_1)r} e_{j_r}^T z$ при $(r = \overline{1, k})$ и $\tilde{y}_r(s) = s^{(\beta_2)r} \eta_{\beta_r}^T u$ при $(r = \overline{k+1, n})$, а матрицы из (3.1) $W_{1s}(s = \overline{1, 3})$ будут иметь вид:

$$(П.4) \quad \begin{aligned} W_{11}(p) &= \begin{pmatrix} -s^{(\beta_1)r} e_{j_r}^T, & r = \overline{1, k} \\ 0, & q \times l \end{pmatrix} (L_{10}(s))^{-1} E, \\ W_{12}(s) &= \begin{pmatrix} -s^{(\beta_1)r} e_{j_r}^m (L_{10}(s))^{-1} L_{20}(s), & r = \overline{1, k} \\ s^{(\beta_2)r} \eta_{\beta_r}^m, & r = \overline{k+1, n} \end{pmatrix}, \\ W_{13}(s) &= \begin{pmatrix} -s^{(\beta_1)r} e_{j_r}^m, & r = \overline{1, k} \\ 0, & q \times l \end{pmatrix} (L_{10}(s))^{-1} L_3(s). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. Заметим, что соотношения (П.2)–(П.4) имеют смысл, если матрица $L_{10}(s) = L_1(s)|_{\lambda_i=0}$ ($i = \overline{1, k}$) невырожденная. В противном случае можно взять некоторые λ_i не нулями, а $\lambda_i = \varepsilon_i$, где ε_i достаточно малы по сравнению с новым номинальным $\lambda_i - \varepsilon_i$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Честнов В.Н.* Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // *АиТ.* 1999. № 3. С. 229–238.
Chestnov V.N. Synthesis of Robust Controllers of Multidimensional Systems under Parametric Uncertainty, Based on Circular Frequency Inequalities // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 3. Part 2. P. 484–491.
2. *Barmich B.R.* New Tools for Robustness of Linear Systems. N.Y.: Macmillan, 1994.
3. *Bhattacharyya S.P., Keel L.A., Chapellat H.* Robust control. The parametric approach. Hertfordshire: Prentice Hall, 1995.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
6. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур LQ -оптимизации // *АиТ.* 1998. № 7. С. 83–95.
Aleksandrov A.G., Chestnov V.N. Synthesis of Multidimensional Systems of Given Accuracy. Part 1. Application of LQ -optimization procedures // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 7. Part 2. P. 973–983.
7. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
8. *Бобцов А.А.* Алгоритм робастного управления неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной // *АиТ.* 2003. № 8. С. 82–95.
Bobtsov A.A. An Algorithm for the Robust Control of an Uncertain Plant without Measurement of the Derivatives of the Controlled Variable // *Autom. Remote Control.* 2003. V. 64. No. 8. P. 1275–1286.

9. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // *АиТ.* 2007. № 7. С. 103–115.
Tsykunov A.M. Robust Control Algorithms with Compensation for Bounded Perturbations // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 7. P. 1213–1224.
10. *Честнов В.Н.* Частотный метод анализа грубости систем, описываемых дифференциальными уравнениями // *Аналитические методы синтеза регуляторов.* Межвуз. науч. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1985. С. 50–59.
11. *Честнов В.Н.* Подход к задаче синтеза допусков на параметры линейных многомерных систем // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 1995. № 2. С. 72–79.
12. *Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., et al.* Robust Control Toolbox 3. User's guide/Natick (Mass.). The MathWorks, Inc., 2010.
13. *Haddad W.M., Collins E.G., Bernstein D.S.* Robust Stability Analysis Using the Small Gain, Circle, Positivity and Popov Theorems. A Comparative Study // *IEEE Trans. Contr. Syst. Technology.* 1993. V. 1. No. 4. P. 290–293.
14. *The Control Handbook* / Ed. W.S. Levine. IEEE Press, 1996.
15. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable feedback control. Analysis and design. N.Y.: John Wiley and Sons, 2007.
16. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. II. Применение процедур H_∞ -оптимизации // *АиТ.* 1998. № 8. С. 124–138.
Aleksandrov A.G., Chestnov V.N. Synthesis of Multidimensional Systems of Given Accuracy. Part 2. Application of H_∞ -optimization Procedures // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 8. Part 2. P. 1153–1164.
17. *Честнов В.Н.* Синтез H_∞ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // *АиТ.* 2011. № 10. С. 170–185.
Chestnov V.N. Synthesis of H_∞ -controllers for Multidimensional Systems of Given Accuracy and Degree of Stability // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 10. P. 2161–2175.
18. *Садомцев Ю.В.* Решение задач H_∞ -оптимизации на основе принципа разделения // *АиТ.* 2012. № 1. С. 62–81.
Sadomtsev Yu.V. Solution of the H_∞ -optimization Problems on the Basis of the Principle of Separation // *Autom. Remote Control.* 2012. V. 73. No. 1. P. 56–73.
19. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., et al.* State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1989. V. 34. No. 8. P. 831–846.
20. *Честнов В.Н.* Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ -оптимизации // *АиТ.* 1999. № 7. С. 100–109.
Chestnov V.N. Design of Controllers of Multidimensional Systems with a Given Radius of Stability Margins Based on the H_∞ -optimization Procedure // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 7. P. 986–993.
21. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 24.11.2014