

Честнов Владимир Николаевич, Чеканов Владимир Александрович

Институт проблем управления РАН

СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПО ЗАДАНЫМ ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА НА БАЗЕ H_∞ -ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация: Решается задача синтеза непрерывных регуляторов многомерных систем, гарантирующих заданную точность, радиус запасов устойчивости и время регулирования по регулируемым переменным при действии неизмеряемых, ограниченных полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами, частотами и начальными фазами. Подход к решению такой задачи базируется на специальном образом сконструированной стандартной проблеме H_∞ -оптимизации и носит достаточный характер.

Ключевые слова: многомерные системы, заданная точность, время регулирования, радиус запасов устойчивости, H_∞ -оптимизация, радиус рабочего процесса.

Chestnov V.N., Chekanov V.A.

SYNTHESIS OF MULTIVARIABLE SYSTEMS BY THE SPECIFIED PERFORMANCE CRITERIA, BASED ON THE H_∞ -OPTIMIZATION.

Abstract: Solves the problem of the synthesis of the continuous regulator of multivariable systems which guarantees a given accuracy, the radius of the reserves of stability and settling time of the controlled variables by the action of unmeasured bounded polyharmonic external disturbances with unknown amplitudes, frequencies and initial phases. Approach to solving this problem is based on specially-designed the standard problem of H_∞ -optimization and has sufficient character.

Key words: multivariable systems, given accuracy, settling time, radius of stability margins, H_∞ -optimization, radius of working process.

Введение

В реальных условиях работы автоматических систем регулирования всегда присутствуют нелинейности и неизбежны отклонения параметров от расчетных. Для их учета при синтезе регуляторов в инженерной практике широко используются понятия запасов устойчивости по фазе и коэффициенту усиления (модулю). Последние характеризуются в одномерном и многомерном случаях более адекватно радиусом запасов устойчивости [1, 2], который и используется в настоящей работе.

В работе [3] продемонстрировано, что регуляторы по выходу, построенные на базе современных техник H_2 , H_∞ , l_1 и μ -синтеза могут привести к малым запасам устойчивости по фазе и коэффициенту усиления, т.е. весьма малому радиусу запасов устойчивости. Это делает весьма актуальным в научном и практическом смыслах получение процедур синтеза регуляторов, в которых бы обеспечивался требуемый радиус запасов устойчивости. Помимо этого регуляторы должны гарантировать заданную точность и время регулирования при действии неизмеряемых ограниченных внешних возмущений [4-7].

В отличие от [4-7] здесь рассматриваются более жесткие ограничения на внешние возмущения, что позволило получить результаты не зависящие от числа гармоник ограниченного полигармонического внешнего возмущения. Это развивает работы [8-12], выполненные ранее в данном направлении.

Показано, что такая задача сводится к специальным образом сконструированной проблеме H_∞ -оптимизации [13, 14]. Численное решение такой H_∞ проблемы осуществляется в пространстве состояний на основе метода линейных матричных неравенств (LMI) [15-19], реализованного в MATLAB-пакете Robust Control Toolbox [20].

Рассмотрен численный пример, демонстрирующий эффективность метода синтеза при управлении взаимосвязанным электроприводом [4, 5].

Постановка задачи

Рассмотрим непрерывный полностью управляемый и наблюдаемый объект управления, описываемый уравнениями состояния:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта; $u \in R^m$ – вектор управляющих воздействий; $y \in R^{m_2}$ – вектор измеряемых регулируемых переменных объекта (выход регулятора); $w \in R^\mu$ – вектор неизмеряемых внешних возмущений.

Определению подлежат матрицы A_c, B_c, C_c, D_c регулятора по измеряемому выходу:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \quad u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t), \quad (2)$$

где $x_c \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора размерности $n_c \leq n$.

Компоненты вектора внешних возмущений – ограниченные полигармонические функции:

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, \mu}. \quad (3)$$

Причем, амплитуды w_{ik} , начальные фазы ψ_{ik} ($i = \overline{1, \mu}, k = \overline{1, \infty}$), а также частоты ω_k ($k = \overline{1, \infty}$), сигналов неизвестны.

Предполагается, что сумма модулей амплитуд каждой компоненты внешнего возмущения ограничена:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w_{ik}| \leq w_i^*, \quad i = \overline{1, \mu}, \quad (4)$$

где: w_i^* ($i = \overline{1, \mu}$), – заданные числа.

Ошибки по регулируемым переменным определим соотношениями:

$$y_{i,st} = \sup_{t \geq t_{pez}} |y_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad (5)$$

где t_{pez} – время регулирования.

Введем понятие радиуса рабочего процесса замкнутой системы:

$$r_{rp}^2 = \sum_{i=1}^{m_2} \left(\frac{y_{i,st}}{y_i^*} \right)^2, \quad (6)$$

где y_i^* ($i = \overline{1, m_2}$) – заданные положительные числа (желаемые ошибки регулирования в замкнутой системе).

Время регулирования в замкнутой системе (1), (2) можно оценить как

$$t_{pez} \approx 3 / \beta, \quad (7)$$

где β – степень устойчивости замкнутой системы [2, 21].

Наличие запасов устойчивости у замкнутой системы гарантирует выполнение кругового частотного матричного неравенства [1, 2]:

$$[I + W^y(-j\omega)]^T [I + W^y(j\omega)] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (8)$$

где: r -заданное (или максимально возможное $0 < r \leq 1$) число, $W^y(s) = -W(s) \cdot K(s)$ – передаточная матрица системы объект-регулятор (1), (2) разомкнутой по физическому выходу объекта. (здесь $W(s) = C(sI - A)^{-1} B_2$ – передаточная матрица объекта по управлению; $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1} B_c + D_c$ – передаточная матрица регулятора: $u = K(s) \cdot y$).

Задача 1. Найти стабилизирующий регулятор (2) такой, чтобы выполнялись неравенства:

$$r_{rp}^2 \leq \gamma^2, \quad (9)$$

$$[I + W^y(-j\omega)]^T [I + W^y(j\omega)] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (10)$$

где γ – заданное/минимизируемое число; r -заданное/максимизируемое число; все собственные значения матрицы замкнутой системы (1), (2) A_{cl} удовлетворяли условию:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) \leq -\beta, \quad i = \overline{1, n + n_c}, \quad (11)$$

где $\beta > 0$ – заданное число.

Заметим, что подобную же задачу можно сформулировать, если радиус запасов устойчивости обеспечивать не на физическом выходе, а на входе объекта, как в [2, 5].

Решение задачи на основе процедуры H_∞ -оптимизации

Рассмотрим структурную схему замкнутой системы (2.1), (2.2), представленную на рис. 1.

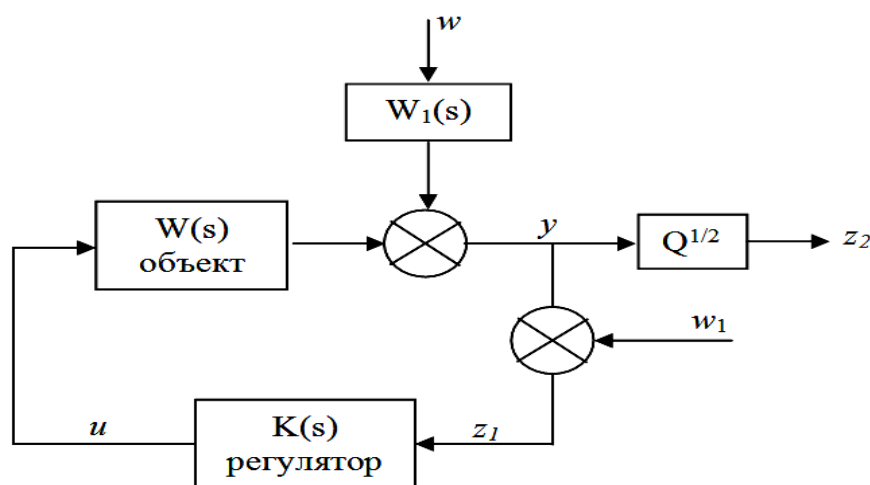


Рис. 1. Структурная схема замкнутой системы

Здесь: $z_1 \in R^{m_2}$ – вектор фиктивных регулируемых переменных (вход регулятора), $z_2 \in R^{m_2}$ – вектор регулируемых переменных – вектор y , взвешенный с помощью диагональной матрицы $Q = \operatorname{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{m_2}]$ с положительными элементами $q_i > 0$ ($i = \overline{1, m_2}$); $w_1 \in R^{m_2}$ – вектор фиктивных внешних возмущений приложенных аддитивно к выходу объекта y (которые можно трактовать как вектор задающих воздействий или помех измерения); $W(s) = C(sI - A)^{-1} B_2$ – передаточная матрица объекта по управлению, $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1} B_c + D_c$ – передаточная матрица регулятора, $W_1(s) = C(sI - A)^{-1} B_1$ – передаточная матрица объекта по внешнему возмущению.

Введем расширенный вектор внешних возмущений $\bar{w}^T = [w_1^T \quad w^T]$ и расширенный вектор регулируемых переменных $z^T = [z_1^T \quad z_2^T]$, и обозначим $T_{z\bar{w}}(s)$ передаточную матрицу замкнутой системы, которая связывает эти векторы. Она будет иметь следующую структуру:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{z\bar{w}} \cdot \bar{w} = \begin{bmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 w} \\ Q^{1/2} T_{y w_1} & Q^{1/2} T_{y w} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где: $T_{z_1 w_1}$, $T_{z_1 w}$, $T_{y w_1}$, $T_{y w}$ – передаточные матрицы замкнутой системы от w_1 к z_1 , от w к z_1 , от w_1 к y и от w к y соответственно.

Сначала учтем желаемое время регулирования. Собственные значения матрицы замкнутой системы (1), (2)

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C & B_2 C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad (13)$$

должны удовлетворять неравенству (2.11).

При замене матрицы A на смещенную $\tilde{A} = A + \beta I$, найдем смещенный регулятор, обеспечивающий устойчивость смещенной замкнутой системы

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = \operatorname{Re} \lambda_i \begin{bmatrix} \tilde{A} + B D_c C & B C_c \\ B_c C & \tilde{A}_c \end{bmatrix} < 0, \quad i = \overline{1, n + n_c}, \quad (14)$$

где $\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c$ – матрицы смещенного регулятора.

Искомый же регулятор имеет матрицы

$$A_c = \tilde{A}_c - \beta I, B_c, C_c, D_c. \quad (15)$$

Действительно, собственные значения матрицы A_{cl} и \tilde{A}_{cl} с таким регулятором связаны очевидным соотношением $\operatorname{Re} \lambda_i(\tilde{A}_{cl}) = \operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) + \beta < 0$, из которого следует (11).

Пусть регулятор $K(s)$ разрешает следующую задачу минимизации H_∞ -нормы передаточной матрицы замкнутой смещенной системы:

$$\|T_{z\bar{w}}(-\beta + j\omega)\|_\infty \leq \gamma, \quad (16)$$

где γ – заданное или минимизируемое число.

Тогда [4, 5] каждый блок этой матрицы удовлетворяет аналогичному (16) условию, в частности:

$$\|T_{z_1 w_1}(-\beta + j\omega)\|_\infty \leq \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{y w}(-\beta + j\omega)\|_\infty \leq \gamma. \quad (17)$$

Замечание 1 : Заметим что при решении смещенной проблемы (16) будет выполняться частотные неравенства и для несмещенных передаточных матриц соответственно замкнутой и разомкнутой системы [4, 10].

Таким образом, разрешая смещенную задачу (16) получаем :

$$\|T_{z\bar{w}}\|_\infty \leq \gamma, \quad (18)$$

$$\|T_{z_1 w_1}\|_\infty \leq \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{y w}\|_\infty \leq \gamma. \quad (19)$$

Сначала дадим интерпретацию первому из неравенств (19). В [2, 5] показано, что первое из неравенств (3.8) может быть представлено в следующем эквивалентном виде:

$$[I + W^y(-j\omega)]^T [I + W^y(j\omega)] \geq \frac{1}{\gamma^2} I, \quad \omega \in [0, \infty). \quad (20)$$

А это целевое неравенство (10), в котором $r = \frac{1}{\gamma}$.

Второе из неравенств (19) также может быть представлено в следующей эквивалентной частотной форме:

$$T_{yw}^T(-j\omega) \cdot Q \cdot T_{yw}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty]. \quad (21)$$

Лемма. Пусть выполнено частотное неравенство (21), тогда ошибки по регулируемым переменным устойчивой системы (12) при действии входного сигнала из класса (3), (4) удовлетворяют неравенствам:

$$q_i y_{i,st}^2 \leq \gamma^2 \left(\sum_j^{\mu} w_j^* \right)^2, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad (22)$$

где w_j^* – границы компонент внешних возмущений из правых частей неравенств (4) для возмущения w .

Доказательство леммы приведено в [9].

Очевидно, что если элементы диагональной весовой матрицы Q выбирать из равенств

$$q_i = \frac{\left(\sum_j^{\mu} w_j^* \right)^2}{\left(y_i^* \right)^2}, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad (23)$$

то из соотношения (22) придем к неравенству:

$$r_{np}^2 = \sum_{i=1}^{m_2} \left(\frac{y_{i,st}}{y_i^*} \right)^2 \leq \gamma^2, \quad (24)$$

которое, как легко видеть, является первым целевым условием (9) задачи 1.

Суммируя изложенное, придем к следующему утверждению.

Теорема 1. Регулятор (15) разрешает задачу 1, если весовые коэффициенты матрицы Q в смещенной H_{∞} -проблеме (16) выбраны из равенств (23) при этом радиус запасов устойчивости $r=1/\gamma$.

Заметим, что переход от целевого неравенства (16) к (17) придаёт достаточный характер представленному результату.

Алгоритм синтеза

1. Формируем матрицы объекта. Заменяем матрицу A на $\tilde{A} = A + \beta I$, где $\beta = 3/t_{рег}$, полагая сначала $\beta = 0$.

2. Формируем системную матрицу обобщенного объекта [4] с помощью команды $P = \text{ltisys}(\tilde{A}, B, C, D)$.

3. Находим оптимальное $\gamma_0 = h \inf \text{lmi}(P, [m_2, m])$, где m_2 и m – число входов и выходов регулятора соответственно.

4. Выбираем $\gamma > \gamma_0$ и строим системную матрицу регулятора K , разрешающего задачу (16), с помощью процедуры $[\gamma, K] = h \inf \text{lmi}(P, [m_2, m], \gamma, \varepsilon)$, где ε – точность вычисления.

5. Из системной матрицы K извлекаем матрицы уравнений смещенного регулятора процедурой $[\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c] = \text{ltiss}(K)$.

6. Находим матрицы $A_c = \tilde{A}_c - \beta I, B_c, C_c, D_c$ искомого регулятора (2).

7. Строим переходный процесс в замкнутой системе при действии внешних возмущений из класса (3), (4) и находим ошибки, время регулирования, а также радиус запасов устойчивости.

Численный пример

В качестве примера рассмотрим взаимосвязанный электропривод, модель которого приведена в [4]. Компоненты вектора состояния $x \in \mathbb{R}^5$ имеют следующий смысл: x_1, x_2 – отклонения выходных напряжений тиристорных преобразователей от номинальных, $x_3 = i_1, x_4 = i_2$ – отклонения якорных токов двигателей от номинальных, $x_5 = \omega$ – отклонение угловой скорости двигателей от номинальной (двигатели работают на общую нагрузку и жестко связаны, т.е. имеют одинаковую угловую скорость).

Вектор управления u имеет две компоненты u_1 и u_2 – отклонения управляющих напряжений от номинальных на входах тиристорных преобразователей. Внешнее возмущение w – отклонение момента сопротивления (нагрузки) от номинального. Регулируемые и измеряемые переменные для этого объекта совпадают и связаны с физическими переменными соотношениями $z_1 = y_1 = x_3, z_2 = y_2 = x_4, z_3 = y_3 = x_5$; внешние возмущения и управляющие воздействия приложены в разных точках.

Матрицы объекта:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -83.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 137.8105 & 0 & -11.2866 & 0 & -1123.155 \\ 0 & 132.4591 & 0 & -11.0653 & -1101.133 \\ 0 & 0 & 0.24867 & 0.25364 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0307 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 16120 & 0 \\ 0 & 13702 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требования к системе:

- ошибки по угловой скорости $x_5 \leq 1$ рад/с, токам $x_3 \leq 375$ А, $x_4 \leq 375$ А, ($M_c = 600$ Нм);
- запасы устойчивости обеспечиваются по выходу объекта: - переменным x_3, x_4, x_5 ;
- время регулирования – 0,25с.

Желаемую степень устойчивости выберем исходя из уравнения (7)

$$\beta = 3/t_{рег} = 3/0.25 = 12.$$

Весовую матрицу Q выберем, исходя из равенств (23)

$$Q^{1/2} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 600 \end{bmatrix}.$$

Тогда полученные матрицы регулятора:

$$A_c = \begin{bmatrix} 1019.1 & -352.41 & -12033 & 17853 & 32780 \\ -174.04 & -741.28 & -7498.6 & -32956 & -56967 \\ 93.347 & 60.638 & 494.16 & 85.83 & 74.78 \\ -9.6058 & 17.318 & 0.20364 & -22.099 & 25.108 \\ -45.578 & 81.196 & -1.0664 & 3033.4 & -1203.9 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0.0052202 & 0.015117 & -0.0011535 \\ -0.004804 & 0.0039702 & 0.0024231 \\ -1.3422 & 1.3782 & 0.0022486 \\ -3.9272 & -3.8613 & 0.014211 \\ 281.69 & 271.61 & -10.208 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0.025042 & 0.044556 & 0.63987 & 1.7283 & 2.9505 \\ -0.063949 & -0.013535 & -0.72256 & 1.8422 & 3.354 \end{bmatrix},$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Реализованное при решении H_∞ -проблемы (15) значение γ при расчете регулятора составило 14.58 (оптимальное же значение $\gamma_0=12.86$)

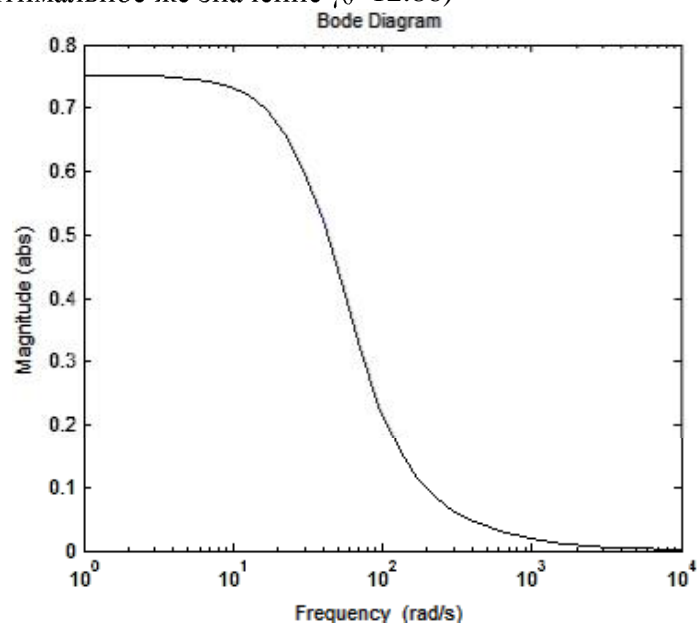


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы от возмущения к регулируемой переменной Z_3

На рис. 2 построена амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы от возмущения (момента нагрузки) к регулируемой переменной z_3 (угловой скорости двигателей). Эта характеристика промасштабирована амплитудой внешнего возмущения $w^* = 600$. Из этой монотонно убывающей характеристики очевидно, что наихудшее внешнее возмущение для замкнутой системы – ступенчатое.

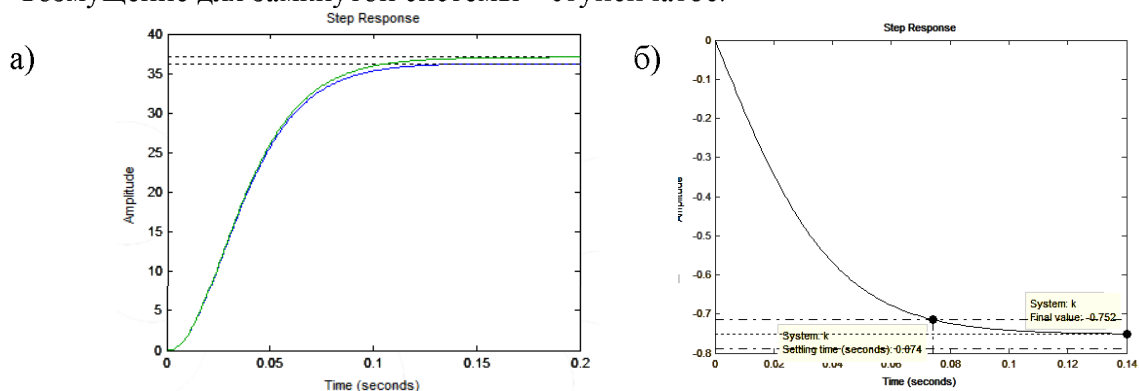


Рис. 3. Переходные процессы в замкнутой системе по регулируемым переменным:
 а) якорные токи б) угловая скорость

На рис. 3 приведены графики переходных процессов по токам двигателей и угловой скорости при ступенчатом изменении момента нагрузки $w(t) = w^* = 600$.

Из графиков монотонных переходных процессов видно, что выполнены требования к точности, в частности (рис 3 б)) по угловой скорости $|z_3| \leq z_3^* = 1$, а время регулирования меньше заданного 0,25 с. Также из рис. 3 а) видно, что двигатели равнонагружены (их якорные токи близки).

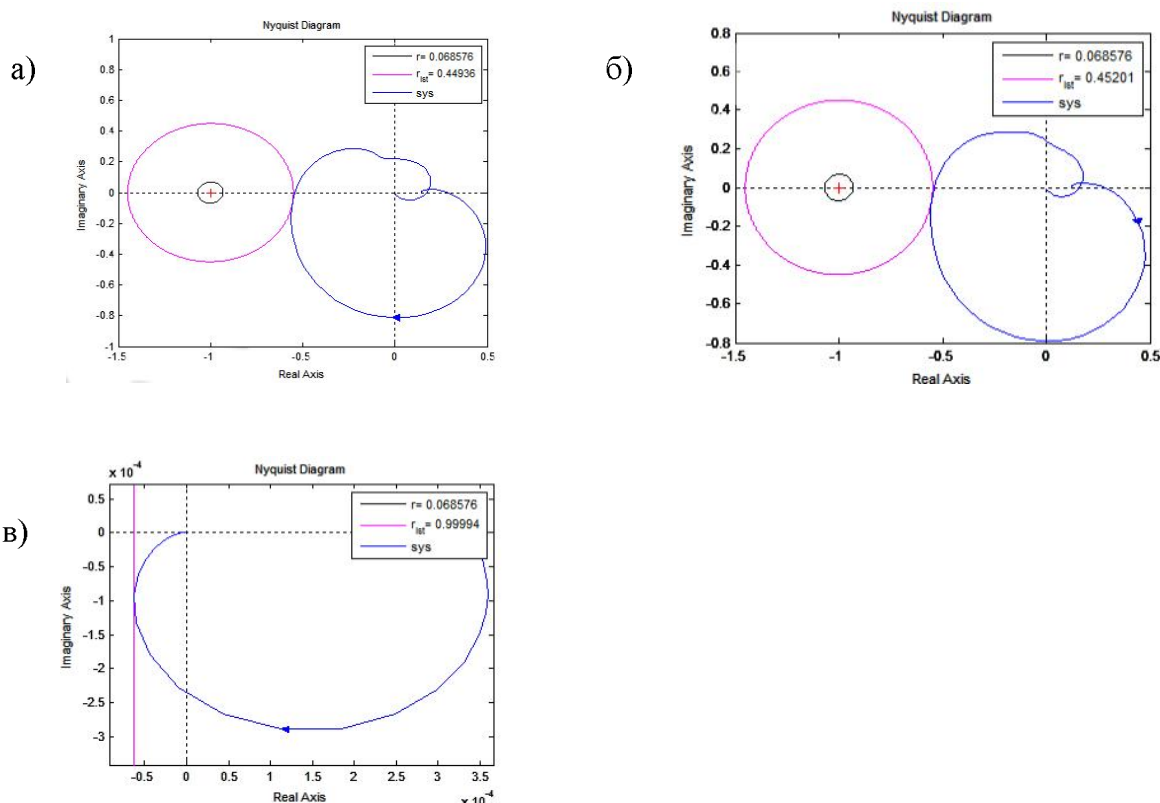


Рис. 4. АФЧХ при размыкании системы по выходам:

- а) по третьему выходу (якорный ток первого двигателя)
- б) по четвертому выходу (якорный ток второго двигателя)
- в) по пятому выходу (угловая скорость двигателя).

На рис. 4 приведены графики АФЧХ при размыкании системы по выходам. При сравнительно небольшом гарантируемом радиусе запасов устойчивости на выходе объекта ($r=0.068576$) действительные запасы устойчивости получились высокими: истинный радиус при размыкании по третьему выходу получился равным 0.44936 (рис. 4 а)), по четвертому выходу 0.45201(рис. 4 б)), по пятому выходу 0.99994(рис. 4 в)).

Заключение

В работе предложен метод синтеза регуляторов по измеряемому выходу для линейных многомерных систем, при действии неизмеряемых, ограниченных полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами, частотами и начальными фазами, который гарантирует заданную точность, время регулирования, радиус запасов устойчивости.

Подход к решению такой задачи базируется на специальном образом сконструированной стандартной проблеме H_∞ -оптимизации и носит достаточный характер.

Порядок получаемого динамического регулятора по выходу не превышает порядка исходного физического объекта, что важно для практических приложений.

Приведены алгоритмы регуляторов в пакете Robust Control Toolbox [20], численная эффективность которых продемонстрирована на примере взаимосвязанного электропривода.

Список литературы

1. Честнов В. Н. Синтез дискретных H_∞ -регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости и времени регулирования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 65–82.
2. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ -оптимизации // Автоматика и Телемеханика. 1999. №7. С. 100–109.
3. Keel L. H., Bhattacharyya S. P. Robust, fragile, or optimal? // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. № 8. P. 1098–1105.
4. Честнов В.Н. Синтез H_∞ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // Автоматика и Телемеханика. 2011. № 10. С. 170–185.
5. Агафонов П.А., Честнов В.Н. Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе H_∞ -подхода // Автоматика и Телемеханика. 2004. № 10. С. 101–108.
6. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур LQ-оптимизации // Автоматика и Телемеханика. 1998. № 7. С. 83–95.
7. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности. II. Применение процедур H_∞ - оптимизации // Автоматика и Телемеханика. 1998. № 8. С. 124–138.
8. Александров А.Г. К аналитическому синтезу регуляторов // Автоматика и Телемеханика. 2010. № 6. С. 3–19.
9. Александров А.Г., Честнов В. Н. Обеспечение заданной точности на основе LQ- и H_∞ -оптимизации // Материалы международной конференции "Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах" (УТЭОСС-2012). – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2012. С. 33-36.
10. Честнов В.Н. Синтез робастных H_∞ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // Автоматика и Телемеханика. 2007. № 3. С. 199–205.
11. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности, времени регулирования и радиуса запасов устойчивости // Дифференциальные уравнения. 2014. № 8. С. 1138–1139.
12. Честнов В.Н., Зацетлова Ж. В. Синтез регуляторов многомерных систем по инженерным показателям точности, времени регулирования и запасов устойчивости // Сборник трудов международной конференции «Проблемы управления, передачи и обработки информации (АТМ_ТКИ-50)» 2009. Саратов: СГТУ. С. 41-45.
13. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. № 8. P. 831–846.
14. Kwakernaak H. Robust Control and H_∞ -Optimization. – Tutorial Paper // Automatica. V. 29. № 2. 1993. P. 255–273.
15. Boyd S., Chaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequality in system and control theory. SIAM, Philadelphia. 1994. 193 P.
16. Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1994. V. 4. P. 421–448.
17. Iwasaki T., Skelton R. All solutions for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas // Automatica. 1994. V. 30. № 8. P. 1307–1317.
18. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 С.

19. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 С.
20. *Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., et al.* Robust Control Toolbox 3. User's guide/ Natick (Mass.). The MathWorks, Inc., 2010. 178 P.
21. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980. 312 С.