Автоматика и телемеханика, № 12, 2015

**© 2015 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru),
П.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук (sherba@ipu.ru),
В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук (vnchest@rambler.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ: I. НОВОЕ РЕШЕНИЕ

Аппарат линейных матричных неравенств применяется к решению классической задачи о линейно-квадратичном регуляторе. Показано, каким образом эта техника может приводить к оптимальному решению, получаемому через уравнение Риккати. Рассмотрены некоторые нежелательные эффекты, возникающие при использовании иных методов решения, известных из литературы; приведены численные примеры.

1. Введение

Задача о линейно-квадратичном регуляторе (Linear Quadratic Regulator, LQR) была поставлена и решена в 1960 г. А.М. Летовым [1] для стационарных линейных объектов и Р.Е. Калманом [2] в нестационарном случае. Классический подход опирается на решение матричного уравнения Риккати, на основе которого и находится матрица коэффициентов регулятора [3, 4].

Разнообразие появившихся с тех пор постановок задач и соответствующая литература необъятны; рассмотрим лишь некоторые отдельные аспекты этой классической задачи и приведем ключевые работы, не претендуя на полноту библиографии.

Хорошо известен замечательный факт, что матрица оптимального регулятора единственна и не зависит от начальных условий в системе. Однако само значение квадратичного функционала есть квадратичная форма от начальных условий с матрицей решения уравнения Риккати [3, 4]. С некоторых пор для решения LQR-задачи стал привлекаться аппарат линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequalities, LMI), например, см. [5–8] (впервые LMI-формулировка задачи LQR, по-видимому, была предложена в [9]), который обладает большей гибкостью, примени́м к робастным формулировкам, сопровождается удобными вычислительными средствами и т.д. На этом пути получено много изящных результатов. И хотя в последнее время эта проблематика привлекает меньше внимания на Западе, много ясности в природу задачи и ее LMI-решения было внесено усилиями отечественных исследователей Д.В. Баландина и М.М. Когана в ряде их статей последнего десятилетия.

Одна из основных причин, по которой аппарат LMI стал применяться к решению задачи LQR — его удобство при решении робастных постановок задачи, когда матрицы системы известны с точностью до аддитивного возмущения, ограниченного по норме; в этой ситуации ищется регулятор, который минимизирует квадратичный функционал против наихудшей допустимой неопределенности. На Западе такие подходы известны под названием *guaranteed-cost control* [5, 10]; как правило в них дается лишь оценка сверху для оптимального значения.

При использовании LMI-техники возникает неприятный эффект зависимости матрицы регулятора от задаваемых в процедуре синтеза начальных условий, хотя оптимальное значение критерия качества остается прежним. Преодоление этого недостатка в рамках LMI-подхода является одной из задач настоящей работы.

Еще одно замечательное свойство LQ-регуляторов — наличие у них значительных запасов устойчивости по фазе (не менее 60 градусов) и амплитуде (не менее 2) на каждом входе объекта [11] (независимо от конкретного выбора весовых матриц функционала оптимизации), что приветствуется в инженерной практике. Для объектов со скалярным управлением это является прямым следствием условия оптимальности в частотной форме, впервые полученного в знаменитой работе [12]: годограф Найквиста разомкнутой оптимальной системы не пересекает единичного круга с центром в критической точке $(-1, j0)$ [3, 13, 14].

В работе будет исследована возможность использования LMI-техники для синтеза LQ-регуляторов, когда фактически вместо уравнения Риккати решается матричное неравенство Риккати, формулируемое в виде линейного матричного неравенства. При этом сохраняется указанные выше привлекательные с инженерной точки зрения черты классического решения. Некоторые из этих вопросов затрагивались в [15]; здесь им даны несколько иные формулировка и интерпретация.

Подчеркнем, что рассматривается простейшая постановка задачи, которая ограничивается статическими линейными регуляторами по состоянию и не привлекает более гибких инструментов, таких как, например, динамический регулятор по выходу.

2. Постановка задачи и классическое решение

Напомним простейшую постановку задачи о линейно-квадратичном регуляторе. Рассматривается система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

с состоянием $x \in \mathbb{R}^n$ и управлением $u \in \mathbb{R}^m$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, пара (A, B) управляема, а начальное условие x_0 фиксировано, но произвольно.

Будем рассматривать задачу построения управления в форме *линейной обратной связи по состоянию*

$$u = Kx, \qquad K \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{2}$$

которое минимизирует следующий квадратичный критерий качества:

$$J = \int_0^\infty (x^\top Rx + u^\top Su)\, dt, \tag{3}$$

где $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — заданные положительно определенные весовые матрицы (так что $J > 0$ за исключением тривиального случая $x_0 = 0$, в котором $J = 0$).

Для того, чтобы функционал J был конечен, необходимо и достаточно, чтобы система (1), замкнутая обратной связью (2), была устойчива. Управляемость пары (A, B) гарантирует существование стабилизирующих обратных связей.

Опускаем обсуждение деталей, не существенных для целей дальнейшего изложения: так, строго говоря, от пары (A, B) достаточно требовать лишь стабилизируемости, а строгой положительной определенностью должна обладать лишь весовая матрица S. Кроме того, в более общей постановке в функционале может присутствовать перекрестный член вида $x^\top Lu$, где $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — еще одна весовая матрица, однако линейной заменой переменных этот случай сводится к стандартной задаче LQR (1)–(3) (см. [8]), которая и будет рассматриваться далее.

Классический метод решения (например, см. [3]) основан на рассмотрении *алгебраического уравнения Риккати*

$$A^\top Q + QA - QBS^{-1}B^\top Q + R = 0 \tag{4}$$

относительно матрицы $Q \succ 0$. При этом оптимальный регулятор дается выражением

$$K_{\mathrm{ric}} = -S^{-1}B^\top Q_{\mathrm{ric}}, \tag{5}$$

а минимальное значение функционала (3) равно

$$J_{\mathrm{ric}} = x_0^\top Q_{\mathrm{ric}} x_0,$$

где Q_{ric} — положительно определенное решение уравнения (4). Такое решение существует и единственно в предположении об управляемости системы и невырожденности весовых матриц; при этом форма

$$V(x) = x^\top Q_{\mathrm{ric}} x$$

является квадратичной функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Обратим внимание, что от начальных условий зависит лишь значение функционала, но не сам оптимальный регулятор K_{ric} (и матрица Q_{ric}).

Однако в более общей постановке, в частности, когда в матрицах системы присутствует неопределенность, получить решение с помощью уравнения Риккати уже не удастся: для каждой реализовавшейся допустимой неопределенности пришлось бы решать свое уравнение. Поэтому воспользуемся иным подходом — на основе *линейных матричных неравенств*.

3. Основные результаты

3.1. Вспомогательные сведения

Лемма 1 (Беллман). *Значение функционала*

$$J = \int_0^\infty x^\top W x\, dt, \quad W \succ 0,$$

на решениях системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

с устойчивой матрицей A равно

$$J = x_0^\top Q x_0,$$

где матрица Q удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$A^\top Q + QA = -W. \tag{6}$$

Замечание 1. Хорошо известна связь между решениями уравнения и неравенства Ляпунова, например, см. [8]. А именно пусть матрица A гурвицева и $W \succ 0$, тогда неравенство Ляпунова

$$A^\top Q + QA \preccurlyeq -W$$

разрешимо, причем для любого его решения Q справедлива оценка

$$Q \succcurlyeq Q_{\mathrm{eq}},$$

где $Q_{\mathrm{eq}} \succ 0$ — решение соответствующего уравнения Ляпунова. Иными словами, среди всех решений неравенства Ляпунова минимальным (по отношению порядка $\preccurlyeq$) является то, которое доставляет решение уравнению.

Поэтому для любого начального условия x_0 верно

$$x_0^\top Q_{\mathrm{eq}} x_0 \leqslant x_0^\top Q x_0.$$

Следовательно, значение функционала J в лемме Беллмана можно искать как решение задачи полуопределенного программирования (SemiDefinite Programming, SDP)

$$x_0^\top Q x_0 \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$A^\top Q + QA \preccurlyeq -W.$$

Именно это свойство будет использоваться в дальнейших построениях.

3.2. LMI-подход к решению задачи о линейно-квадратичном регуляторе

Система (1), замкнутая обратной связью (2), принимает вид

$$\dot{x} = (A + BK)x,$$

и на ее решениях имеем

$$J = \int\limits_0^\infty (x^\top R x + x^\top K^\top S K x)\, dt = \int\limits_0^\infty x^\top (\underbrace{R + K^\top S K}_{\succ 0}) x\, dt.$$

Воспользовавшись замечанием 1, получаем, что минимальное значение функционала J предоставляется решением задачи

$$x_0^\top Q x_0 \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$(A+BK)^\top Q + Q(A+BK) \preccurlyeq -R - K^\top SK. \tag{7}$$

Домножив последнее матричное неравенство слева и справа на матрицу $P = Q^{-1}$, получаем

$$(A+BK)P + P(A+BK)^\top + PRP + PK^\top SKP \preccurlyeq 0.$$

Введя вспомогательную матричную переменную

$$Y = KP,$$

получаем

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + Y^\top SY + PRP \preccurlyeq 0. \tag{8}$$

Дополняя до полного квадрата слагаемые в (8), зависящие от матричной переменной Y, имеем

$$\begin{gathered} BY + Y^\top B^\top + Y^\top SY = \\ = \left(S^{1/2}Y + S^{-1/2}B^\top\right)^\top \left(S^{1/2}Y + S^{-1/2}B^\top\right) - BS^{-1}B^\top \succcurlyeq -BS^{-1}B^\top, \end{gathered}$$

причем равенство достигается при

$$Y = -S^{-1}B^\top.$$

Таким образом, если $\widetilde{P}$, $\widetilde{Y}$ — решение матричного неравенства (8), то матрица $\widetilde{P}$ удовлетворяет неравенству

$$AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top + PRP \preccurlyeq 0, \tag{9}$$

и наоборот: если матрица $\widetilde{P}$ удовлетворяет (9), то она является решением (8) при $Y = -S^{-1}B^\top$.

По лемме Шура матричное неравенство (9) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \tag{10}$$

Итак, задача свелась к минимизации на решениях полученного LMI величины

$$x_0^\top Q x_0 = x_0^\top P^{-1} x_0,$$

которая нелинейна по переменной P. Введем скалярную переменную γ и, пользуясь леммой Шура, запишем неравенство

$$x_0^\top P^{-1} x_0 \leqslant \gamma$$

в виде LMI

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \tag{11}$$

Будем минимизировать величину γ при ограничениях (10) и (11).

Заметим, что поскольку весовая матрица R положительно определена, то

$$AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top \prec 0$$

для всех P, удовлетворяющих (10). Представив это неравенство в виде

$$\big(A - BS^{-1}B^\top P^{-1}\big)P + P\big(A - BS^{-1}B^\top P^{-1}\big)^\top \prec -BS^{-1}B^\top,$$

заключаем, что соответствующий регулятор $K = -S^{-1}B^\top P^{-1}$ стабилизирует систему (1).

Итак, получен следующий результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть P_{lmi} — решение задачи SDP*

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где минимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$ и скалярной переменной γ.

Тогда регулятор (2) *с матрицей*

$$K_{\mathrm{lmi}} = -S^{-1}B^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1}$$

стабилизирует систему (1)*, квадратичная форма $V(x) = x^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1} x$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы, а величина $x_0^\top P_{\mathrm{lmi}}^{-1} x_0$ определяет минимальное значение функционала* (3) *на решениях замкнутой системы.*

Результат теоремы 1, по существу, совпадает с приведеным в [5], но имеет несколько иную форму (см. [5, с. 114–115]). Тем не менее доказательство теоремы 1 приведено, поскольку в дальнейшем оно послужит основой вывода новых результатов.

Как видно из формулировки теоремы 1, LMI-регулятор *зависит от начальных условий*. В самом деле, минимизация $x_0^\top Q x_0$ при заданном x_0 может потребовать оптимизации лишь части элементов матрицы Q (например, если $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, то надо минимизировать всего лишь единственный элемент матрицы). Отсюда, в частности, следует, что оптимизационная задача из теоремы 1 поставлена некорректно в том смысле, что оптимальному значению целевой функции отвечает некоторое *множество* значений ее аргументов.

Итак, при изменении начальных условий задачу приходится решать заново; более того, нетрудно видеть, что отличие таким образом получаемого x_0-зависимого регулятора от Риккати-регулятора (5) может быть довольно существенным. Действительно, оба они имеют вид $K = MP^{-1}$, где прямоугольная матрица $M = -S^{-1}B^\top$, а $P = P_{\mathrm{ric}} \doteq Q_{\mathrm{ric}}^{-1}$ или $P = P_{\mathrm{lmi}}$. Поскольку $P_{\mathrm{ric}} \succcurlyeq P_{\mathrm{lmi}}$ (см. замечание 3 ниже), то $\|K_{\mathrm{ric}}\| \leqslant \|K_{\mathrm{lmi}}\|$. Таким образом, норма оптимального регулятора (полученного через решение уравнения Риккати) меньше нормы любого из регуляторов K_{lmi}; это соответствует меньшим коэффициентам усиления в цепи обратной связи, что приветствуется на практике.

Пример 1. Проиллюстрируем сказанное на примере задачи HE3 из библиотеки COMPl_e*ib* [16]. В ней собраны тестовые задачи, которые имеют прозрачное инженерное происхождение и часто используются для проверки эффективности алгоритмов управления. Рассматриваемая система описывает линеаризованную модель динамики вертолета Bell201A-1 с восемью состояниями и четырьмя управлениями; соответствующие матрицы имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}0046 & 0{,}0380 & 0{,}3259 & -0{,}0045 & -0{,}4020 & -0{,}0730 & -9{,}81 & 0 \\ -0{,}1978 & -0{,}5667 & 0{,}3570 & -0{,}0378 & -0{,}2149 & 0{,}5683 & 0 & 0 \\ 0{,}0039 & -0{,}0029 & -0{,}2947 & 0{,}0070 & 0{,}2266 & 0{,}0148 & 0 & 0 \\ 0{,}0133 & -0{,}0014 & -0{,}4076 & -0{,}0654 & -0{,}4093 & 0{,}2674 & 0 & 9{,}81 \\ 0{,}0127 & -0{,}0100 & -0{,}8152 & -0{,}0397 & -0{,}8210 & 0{,}1442 & 0 & 0 \\ -0{,}0285 & -0{,}0232 & 0{,}1064 & 0{,}0709 & -0{,}2786 & -0{,}7396 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}0676 & 0{,}1221 & -0{,}0001 & -0{,}0016 \\ -1{,}1151 & 0{,}1055 & 0{,}0039 & 0{,}0035 \\ 0{,}0062 & -0{,}0682 & 0{,}0010 & -0{,}0035 \\ -0{,}0170 & 0{,}0049 & 0{,}1067 & 0{,}1692 \\ -0{,}0129 & 0{,}0106 & 0{,}2227 & 0{,}1430 \\ 0{,}1390 & 0{,}0059 & 0{,}0326 & -0{,}4070 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Примем весовые матрицы R и S равными единичным; решение уравнения Риккати приводит к оптимальному регулятору

$$K_{\mathrm{ric}} = \begin{pmatrix} -0{,}0706 & 0{,}5951 & -1{,}1377 & 0{,}0223 & -0{,}1308 & 0{,}0582 & -0{,}9379 & 0{,}3025 \\ -0{,}9223 & -0{,}0494 & 18{,}8912 & -0{,}1157 & 0{,}1823 & 0{,}1532 & 20{,}6423 & -3{,}7412 \\ 0{,}1964 & 0{,}0172 & -1{,}4686 & -0{,}6601 & -6{,}2641 & -0{,}7246 & -4{,}7574 & -11{,}2117 \\ 0{,}0058 & 0{,}0811 & 1{,}4130 & -0{,}4595 & -2{,}9681 & 0{,}0198 & -0{,}1048 & -6{,}4545 \end{pmatrix}.$$

Положив начальные условия равными

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top,$$

решим задачу полуопределенного программирования из теоремы 1, для чего воспользуемся известным MATLAB – совместимым пакетом `cvx` [17] с решателем `sedumi`. В результате получаем регулятор

$$K_{\text{lmi}} = \begin{pmatrix} 0{,}1046 & 0{,}6716 & -3{,}2187 & -0{,}0542 & -0{,}6137 & 0{,}0282 & -2{,}9783 & 0{,}0226 \\ -1{,}3036 & -0{,}2058 & 23{,}4118 & 0{,}0406 & 1{,}1541 & 0{,}1846 & 25{,}0342 & -3{,}2358 \\ 0{,}4482 & 0{,}1266 & -4{,}4580 & -0{,}7694 & -6{,}9542 & -0{,}7661 & -7{,}6865 & -11{,}6090 \\ 0{,}1508 & 0{,}1402 & -0{,}3057 & -0{,}5186 & -3{,}3350 & 0{,}0091 & -1{,}7729 & -6{,}6432 \end{pmatrix},$$

норма которого $\|K_{\text{lmi}}\| = 35{,}822$ превосходит норму оптимального регулятора $\|K_{\text{ric}}\| = 28{,}5230$ более чем на 25%.

Следует также отметить, что некорректность задачи SDP из теоремы 1 проявляется и при численном решении: использование иных вычислительных средств, реализующих различные варианты метода внутренней точки, может приводить к разным регуляторам K_{lmi}. Нетрудно построить примеры, в которых отличие может быть сколь угодно велико; однако не будем останавливаться на этом подробно.

В то же время нужно ясно понимать, что при фиксированном (произвольном) начальном условии и *управление*, и сама *траектория* системы, замкнутой любым из полученных выше регуляторов, остаются теми же самыми. Это следует из исходной постановки задачи [2], в которой управление ищется в виде функции времени; при этом оказывается, что оптимальное управление дается линейной обратной связью по состоянию.

Замечание 2. Часто встречается (см., например, [7, 10]) следующее представление решения задачи о линейно-квадратичном регуляторе.

Пусть $P \succ 0$ и $\gamma > 0$ удовлетворяют матричному неравенству

$$AP + PA^\top + (\gamma - 2)BS^{-1}B^\top + \gamma PRP \preccurlyeq 0. \tag{13}$$

Тогда регулятор

$$K = -S^{-1}B^\top P^{-1}$$

стабилизирует систему (1) *и при этом для функционала* (3) *справедлива оценка*

$$J \leqslant \frac{1}{\gamma} x_0^\top P^{-1} x_0. \tag{14}$$

Остановимся подробнее на такой форме записи. Введем в рассмотрение величину

$$\widetilde{P} = \gamma P.$$

Тогда соотношение (13) примет вид

$$A\widetilde{P} + \widetilde{P}A^\top + \gamma(\gamma - 2)BS^{-1}B^\top + \widetilde{P}R\widetilde{P} \preccurlyeq 0,$$

а правая часть оценки (14) станет равной $x_0^\top \widetilde{P}^{-1} x_0$.

Остается заметить, что функция $\gamma(\gamma-2)$ принимает минимальное значение, равное -1, при $\gamma = 1$. В результате приходим в точности к утверждению теоремы 1.

Таким образом, по сравнению с теоремой 1 такая формулировка задачи не дает ничего нового.

Ниже будет предложен способ нахождения решения задачи (по-прежнему в терминах линейных матричных неравенств), которое уже не будет зависеть от начальных условий и будет совпадать с Риккати-решением.

3.3. LMI-решение, инвариантное к начальным условиям

Обсудим несколько технических, но важных моментов.

Утверждение 1. Решение $\widehat{P}$ задачи SDP

$$\mathrm{tr}P \longrightarrow \min \quad \textit{при ограничении} \quad P \succcurlyeq P_0 \succcurlyeq 0$$

равно P_0.

Результат немедленно следует из очевидного факта: две симметричные матрицы P, P_0, удовлетворяющие $P \succcurlyeq P_0$ и $\mathrm{tr}P = \mathrm{tr}P_0$, равны.

Рассмотрим теперь уравнение Ляпунова

$$AP + PA^\top + BB^\top = 0$$

и соответствующее ему неравенство

$$AP + PA^\top + BB^\top \preccurlyeq 0,$$

где матрица A устойчива, а пара (A, B) управляема. Тогда, во-первых, уравнение имеет единственное положительно определенное решение P_{eq}, а во-вторых, по замечанию 1 для любого решения P неравенства выполнено

$$P \succcurlyeq P_{\mathrm{eq}} \succ 0.$$

Воспользовавшись утверждением 1, получаем, что решение задачи

$$\mathrm{tr}P \longrightarrow \min \quad \text{при ограничении} \quad AP + PA^\top + BB^\top \preccurlyeq 0 \tag{15}$$

достигается на решении соответствующего уравнения Ляпунова. Таким образом, решением задачи (15) является минимальное (в смысле порядка $\preccurlyeq$) решение неравенства Ляпунова.

Замечание 3. Между решениями уравнения и неравенства Риккати имеется связь, аналогичная установленной выше для уравнения и неравенства Ляпунова, см. [5, с. 26, 35, 115], а также [18]. А именно пусть Q_{eq} является решением *уравнения* Риккати

$$A^\top Q + QA - QSQ + R = 0;$$

тогда для любого решения Q соответствующего *неравенства* Риккати

$$A^\top Q + QA - QSQ + R \preccurlyeq 0$$

справедливо

$$Q \succcurlyeq Q_{\text{eq}},$$

т.е. Q_{eq} является минимальным (в смысле порядка $\preccurlyeq$) среди всех решений неравенства Риккати.

Поэтому решение задачи

$$\text{tr}Q \longrightarrow \min \quad \text{при} \quad A^\top Q + QA - QSQ + R \preccurlyeq 0$$

достигается на решении Q_{eq} уравнения Риккати[1].

При этом в силу двойственности решением задачи

$$\text{tr}P \longrightarrow \max \quad \text{при} \quad AP + PA^\top + PRP - S \preccurlyeq 0$$

(которое также достигается на решении соответствующего уравнения Риккати) является $P_{\text{eq}} = Q_{\text{eq}}^{-1}$.

Итак, возвращаясь к исходной задаче, вместо величины $x_0^\top Q x_0$ будем минимизировать $\text{tr}Q$. Это приводит к минимальному (в смысле порядка $\preccurlyeq$) решению Q_{ric} неравенства (7) и, соответственно, к минимальному значению функционала J *независимо от начальной точки* x_0.

С учетом замечания 3 заключаем, что задача минимизации $\text{tr}Q$ при ограничении (7) эквивалентна задаче максимизации $\text{tr}P$ на решении двойственного неравенства, представимого в виде LMI (12). Таким образом, получаем следующий основной результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть P_{ric} — решение задачи SDP*

$$\text{tr}P \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$.

Тогда

$$Q_{\text{ric}} = P_{\text{ric}}^{-1}, \qquad K_{\text{ric}} = -S^{-1}B^\top P_{\text{ric}}^{-1},$$

где Q_{ric} и K_{ric} определены в (4) *и* (5) *через решение уравнения Риккати.*

[1] Отметим, что это соображение использовалось ранее, например, применительно к матричному дифференциальному неравенству Риккати несколько иной структуры в задаче H_∞-оптимизации, см. [19].

Таким образом, решение уравнения Риккати может быть найдено с использованием аппарата LMI как решение задачи SDP.

Попытки строить x_0-независимый LQR-регулятор с применением аппарата LMI предпринимались и ранее. Так, например, в [15] такой регулятор строился исходя из естественных соображений робастности — против наихудших начальных условий из единичного шара. Формулировка соответствующего результата (теорема 2 из [15]), который относится к задаче $\mathcal{H}_2$-оптимизации, приводится ниже в терминах настоящей работы.

Т е о р е м а 3. *Пусть P_{eig} — решение задачи SDP*

$$\gamma \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succcurlyeq \gamma I,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$ и скалярной переменной γ.

Тогда регулятор

$$K_{\mathrm{eig}} = -S^{-1}B^\top P_{\mathrm{eig}}^{-1}$$

стабилизирует систему и доставляет минимум квадратичному функционалу (3) *против наихудших начальных условий $\|x_0\| \leqslant 1$.*

Поскольку для любой матрицы $M \succ 0$ справедливо

$$\max_{\|x\| \leqslant 1} x^\top M x = \|M\|,$$

то минимальное значение функционала равно

$$J = \|P_{\mathrm{eig}}^{-1}\|$$

и достигается на единичном собственном векторе, соответствующем максимальному собственному значению матрицы P_{eig}^{-1} (чем и объясняется принятое обозначение P_{eig}).

Будучи робастным относительно начальных условий на единичном шаре, такой регулятор может отличаться от оптимального, полученного в теореме 2, — по той же причине, что и регулятор K_{lmi}. А именно нетрудно видеть, что решение P, Y сформулированной выше задачи SDP неединственно, хотя и доставляет оптимальное значение критерию (величине γ). Что более существенно, для разных начальных условий из единичного шара значение функционала (3) для системы, замкнутой таким регулятором, может оказаться существенно хуже оптимального.

П р и м е р 2. Вернемся к системе из примера 1. Воспользовавшись, как и выше, пакетом `cvx` с тем же решателем `sedumi`, получаем регулятор

$$K_{\mathrm{eig}} = \begin{pmatrix} -0{,}0833 & 0{,}6133 & -1{,}0143 & 0{,}0392 & -0{,}2063 & -0{,}1598 & -1{,}0404 & 0{,}2093 \\ -0{,}9249 & -0{,}0461 & 18{,}9180 & -0{,}1128 & 0{,}1623 & 0{,}1065 & 20{,}6195 & -3{,}7671 \\ 0{,}1901 & 0{,}0237 & -1{,}4049 & -0{,}6552 & -6{,}3204 & -0{,}8341 & -4{,}8131 & -11{,}2871 \\ 0{,}0265 & 0{,}0523 & 1{,}2115 & -0{,}4859 & -2{,}8392 & 0{,}3751 & 0{,}0636 & -6{,}2936 \end{pmatrix},$$

который заметно отличается от оптимального K_{ric}. Поскольку $P_{\text{ric}}^{-1} \preccurlyeq P_{\text{eig}}^{-1}$, то ни для какого начального условия регулятор K_{ric} заведомо не может дать худшее значение функционала (3), чем регулятор K_{eig}. В то же время несложными выкладками можно показать, что максимум отношения двух таких квадратичных форм на единичном шаре равен

$$\max_{\|x\|=1} \frac{x^\top P_{\text{eig}}^{-1} x}{x^\top P_{\text{ric}}^{-1} x} = \lambda_{\max}(P_{\text{eig}}^{-1}, P_{\text{ric}}^{-1}),$$

т.е. максимальному обобщенному собственному значению пары матриц P_{eig}^{-1} и P_{ric}^{-1}, и достигается на соответствующем обобщенном собственном векторе $e_{\max}$. Для рассматриваемого примера вычисления дают

$$P_{\text{eig}} = \begin{pmatrix} 1{,}8998 & 0{,}2133 & -0{,}1156 & 0{,}0928 & -0{,}0957 & -0{,}0876 & 0{,}1912 & 0{,}0200 \\ 0{,}2133 & 1{,}8376 & -0{,}0272 & 0{,}0842 & 0{,}0424 & -0{,}1242 & 0{,}0304 & -0{,}0212 \\ -0{,}1156 & -0{,}0272 & 0{,}0243 & -0{,}1278 & -0{,}0251 & 0{,}0058 & -0{,}0203 & 0{,}0247 \\ 0{,}0928 & 0{,}0842 & -0{,}1278 & 3{,}2558 & 0{,}6501 & -0{,}0001 & 0{,}0352 & -0{,}5410 \\ -0{,}0957 & 0{,}0424 & -0{,}0251 & 0{,}6501 & 0{,}2995 & -0{,}0868 & -0{,}0116 & -0{,}1727 \\ -0{,}0876 & -0{,}1242 & 0{,}0058 & -0{,}0001 & -0{,}0868 & 0{,}5947 & -0{,}0105 & 0{,}0095 \\ 0{,}1912 & 0{,}0304 & -0{,}0203 & 0{,}0352 & -0{,}0116 & -0{,}0105 & 0{,}0274 & -0{,}0007 \\ 0{,}0200 & -0{,}0212 & 0{,}0247 & -0{,}5410 & -0{,}1727 & 0{,}0095 & -0{,}0007 & 0{,}1249 \end{pmatrix}$$

и

$$P_{\text{ric}} = \begin{pmatrix} 1{,}9389 & 0{,}1458 & -0{,}1189 & 0{,}0472 & -0{,}1261 & 0{,}0820 & 0{,}1959 & 0{,}0290 \\ 0{,}1458 & 1{,}9604 & -0{,}0218 & 0{,}1724 & 0{,}0983 & -0{,}4204 & 0{,}0223 & -0{,}0386 \\ -0{,}1189 & -0{,}0218 & 0{,}0246 & -0{,}1244 & -0{,}0227 & -0{,}0085 & -0{,}0207 & 0{,}0241 \\ 0{,}0472 & 0{,}1724 & -0{,}1244 & 3{,}3237 & 0{,}6909 & -0{,}2035 & 0{,}0298 & -0{,}5542 \\ -0{,}1261 & 0{,}0983 & -0{,}0227 & 0{,}6909 & 0{,}3249 & -0{,}2204 & -0{,}0152 & -0{,}1807 \\ 0{,}0820 & -0{,}4204 & -0{,}0085 & -0{,}2035 & -0{,}2204 & 1{,}3313 & 0{,}0100 & 0{,}0496 \\ 0{,}1959 & 0{,}0223 & -0{,}0207 & 0{,}0298 & -0{,}0152 & 0{,}0100 & 0{,}0280 & 0{,}0004 \\ 0{,}0290 & -0{,}0386 & 0{,}0241 & -0{,}5542 & -0{,}1807 & 0{,}0496 & 0{,}0004 & 0{,}1275 \end{pmatrix},$$

так что $\lambda_{\max}(P_{\text{eig}}^{-1}, P_{\text{ric}}^{-1}) = 2{,}3692$ и

$$e_{\max} = (0{,}2598 \;\; -0{,}4544 \;\; -0{,}0218 \;\; -0{,}3123 \;\; -0{,}2050 \;\; 1{,}1289 \;\; 0{,}0314 \;\; 0{,}0615)^\top.$$

Таким образом, при $x_0 = e_{\max}$ регулятор K_{eig} проигрывает по функционалу почти в 2,5 раза регулятору K_{ric}.

В заключение отметим, что эквивалентная формулировка результата теоремы 2 может быть получена из иных соображений, поясняющих его физический смысл.

При выводе теоремы 1 было показано, что если матрица P удовлетворяет LMI (10), то соответствующий регулятор дает значение критерия, равное $x_0^\top P^{-1} x_0$, где x_0 — заданные начальные условия. Поэтому в теореме 1 эта величина просто минимизирована по всем допустимым P; при этом получено решение, оптимальное для данного x_0.

Чтобы освободиться от зависимости от x_0, воспользуемся приемом, применявшимся еще в [20], *усредняя* полученные решения по всем начальным условиям из единичного шара. Точнее, пусть x_0 случайно и имеет равномерное распределение на поверхности единичного шара в евклидовой норме. Нетрудно показать, что математическое ожидание случайной величины $x_0^\top P^{-1}x_0$ равно

$$\mathsf{E}\bigl(x_0^\top P^{-1}x_0\bigr) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(P^{-1}),$$

поэтому будем минимизировать правую часть по всем P, удовлетворяющим (10). Эта задача сводится к задаче полуопределенного программирования с помощью следующей леммы.

Лемма 2. Задача

$$\mathrm{tr}P^{-1} \longrightarrow \min \tag{16}$$

при ограничении

$$L(P) \preccurlyeq 0,$$

где $P = P^\top$ — матричная переменная, а $L(P)$ — некоторая линейная функция, эквивалентна задаче SDP

$$\mathrm{tr}Z \longrightarrow \min \tag{17}$$

при ограничениях

$$L(P) \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z & I \\ I & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{18}$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $P = P^\top$ и $Z = Z^\top$.

Доказательство. Заметим, что аргумент P^{-1} целевой функции в (16) имеет структуру дополнения по Шуру к блоку Z в матрице

$$\begin{pmatrix} Z & I \\ I & P \end{pmatrix},$$

поэтому, вводя новую матричную переменную $Z = Z^\top$ и требуя выполнения второго ограничения в (18), по лемме Шура имеем в силу монотонности следа матрицы

$$\mathrm{tr}Z \geqslant \mathrm{tr}P^{-1}.$$

Таким образом, решение задачи (17), (18) даст оценку сверху для решения исходной задачи.

С другой стороны, если $\widehat{P}$ — решение исходной задачи, то, полагая $Z = \widehat{P}^{-1}$, получаем $\mathrm{tr}Z = \mathrm{tr}\widehat{P}^{-1}$, и при этом второе неравенство в (18) выполнено, т.е. $\widehat{P}$, Z — решение задачи (17), (18).

В несколько более общей форме этот результат приведен в [8]; отметим также, что он остается справедливым, если вместо следа используется любая иная монотонная функция.

С учетом замечания 3 приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 4. *Пусть* P_{ric} *— решение задачи SDP*

$$\mathrm{tr} Z \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} - BS^{-1}B^{\top} & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad \begin{pmatrix} Z & I \\ I & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\top}$ *и* $Z = Z^{\top}$.

Тогда

$$Q_{\text{ric}} = P_{\text{ric}}^{-1}, \qquad K_{\text{ric}} = -S^{-1}B^{\top}P_{\text{ric}}^{-1},$$

где Q_{ric} *и* K_{ric} *определены в* (4) *и* (5) *через решение уравнения Риккати.*

Таким образом, решение уравнения Риккати может быть получено через решение SDP исходя из совершенно иных, естественных соображений. Авторы предполагают вернуться к такой формулировке во второй части работы, где будут обсуждаться робастные постановки задачи.

4. Заключение

В работе получено решение классической задачи о линейно-квадратичном регуляторе с использованием аппарата линейных матричных неравенств путем сведéния ее к корректно сформулированной задаче полуопределенного программирования. Исследованы недостатки регуляторов, полученных с помощью LMI другими известными из литературы методами.

Основной интерес для дальнейших исследований представляет распространение развитого подхода на различные робастные постановки задач.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Б.Т. Поляку, М.М. Когану, С. Бойду (Stephen Boyd), Ф. Даббене (Fabrizio Dabbene), А. Юдицкому (Anatoli Iouditsky) и Р. Темпо (Roberto Tempo) за интерес к работе, плодотворные обсуждения, важные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов // АиТ. 1960. № 4. С. 436–443; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665.
2. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // Bol. Soc. Mat. Mexicana (2). 1960. V. 5. No. 2. P. 102–119.
3. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Linear Optimal Control. N.Y.: Prentice-Hall, 1971.
4. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
5. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
6. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
7. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

8. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств). М.: ЛЕНАНД, 2014.
9. *Willems J.S.* Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation // IEEE TAC. 1971. V. 16. No. 6. P. 621–634.
10. *Petersen I.R., McFarlane D.C.* Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems // IEEE TAC. 1994. V. 39. P. 1971–1977.
11. *Александров А.Г., Небалуев Н.А.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов на основе частотных критериев качества. I // АиТ. 1971. № 12. С. 12–20.

    Aleksandrov A.G., Nebaluev N.A. Analytic Synthesis of Regulator Transfer matrices on basis of frequency quality indices. I // Autom. Remote Control. 1971. V. 32. No. 12. Part 1. P. 1871–1878.
12. *Kalman R.E.* When is a Linear Control System Optimal? // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic. Eng. 1964. V. 86. P. 51–60.
13. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods. N.Y.: Prentice-Hall, 1989.
14. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and Optimal Control. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
15. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез оптимальных линейно-квадратичных законов управления на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2007. № 3. С. 3–18.

    Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of Linear Quadratic Control Laws on Basis of Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 371–385.
16. *Leibfritz F., Lipinski W.* Description of the Benchmark Examples in COMPleib 1.0 // Technical report, University of Trier, 2003, URL: `www.complib.de`.
17. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming (web page and software), URL: `http://stanford.edu/ boyd/cvx`.
18. *Badawi F.A.* On a Quadratic Matrix Inequality and the Corresponding Algebraic Riccati Equation // Int. J. Control. 1982. V. 36. No. 2. P. 313–322.
19. *Shaked U., Suplin V.* A New Bounded Real Lemma Representation for the Continuous-Time Case // IEEE TAC. 2001. V. 15. No. 1. P. 44–48.
20. *Levine W.S., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // IEEE TAC. 1970. V. 46. No. 9. P. 1420–1426.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 31.12.2013