



# СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ЗАДАННОМУ ПОКАЗАТЕЛЮ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ: ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И ВНЕШНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ, ОГРАНИЧЕННЫЕ ПО МОЩНОСТИ

В.Н. Честнов, Н.И. Самшорин

Рассмотрена задача синтеза регуляторов по выходу линейных многомерных систем с отклонениями физических параметров объекта в заданных границах и подверженных действию неизвестных полигармонических внешних возмущений, ограниченных только по мощности. Регулятор построен так, чтобы помимо робастной устойчивости замкнутой системы, обеспечивались заданные границы на средние квадраты регулируемых переменных. Решение задачи свелось к некоторой специальным образом сконструированной проблеме  $H$ -бесконечной оптимизации. Приведено решение широко известной тестовой задачи.

**Ключевые слова:** робастная устойчивость, показатель колебательности, ограниченные по мощности внешние возмущения, точность,  $H_\infty$ -управление.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема обеспечения робастных свойств многомерных систем с регуляторами по выходу в современной теории автоматического управления играет существенную роль [1–4]. В этой связи, очевидна необходимость построить регулятор так, чтобы он, с одной стороны, обеспечивал робастную устойчивость замкнутой системы при заданных отклонениях физических параметров объекта от расчетных (номинальных), а с другой, гарантировал бы заданные средние квадраты ошибок регулирования при действии полигармонических внешних возмущений (с неизвестными амплитудами и частотами), ограниченных по мощности.

Настоящая работа выполнена в русле частотного подхода к синтезу робастных регуляторов многомерных систем, развитого в работах [5–11]. Решение задачи опирается на «технику размыкания» системы «объект — регулятор» по варьируемым параметрам объекта [5, 9]. При этом регулятор обеспечивает заданные границы изменения коэффициентов усиления в искусственно созданных каналах, в которых присутствуют варьируемые параметры объекта (представленные их номиналами). Заметим, что традиционно в теории автоматического управления в качестве точек размыкания замкнутой системы используют обычно физический вход или выход объекта управления [6, 7]. Эта задача (обеспечение заданных границ коэффициентов усиления в данных контурах), как

и в работах [5, 10, 11], сводится к стандартной задаче  $H_\infty$ -оптимизации. Для обеспечения заданной точности в эту  $H_\infty$ -задачу добавляется вектор физических регулируемых переменных объекта с весовыми коэффициентами, для которых получены строгие аналитические выражения. В отличие от работ [5–11] здесь рассматривается гораздо более широкий класс внешних возмущений, а допуски на отклонения физических параметров от номинальных обеспечиваются с помощью другого частотного условия, позволяющего значительно улучшить их нижнюю границу. Настоящая работа объединяет подходы к синтезу, представленные в докладах авторов [12, 13].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть объект управления, описывается уравнениями в физических переменных [14]:

$$L_1(p)z_0(t) = L_2(p)u(t) + L_3(p)f(t), y(t) = Nz_0(t), \quad (1)$$

где  $z_0$  —  $n_0$ -мерный вектор физических переменных объекта (скорость, ускорение, ток, напряжение, перемещение, угол поворота и др.);  $u$  —  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий;  $y$  —  $m_2$ -мерный вектор измеряемых (и одновременно регулируемых) переменных объекта;  $f$  —  $m_3$ -мерный вектор неизмеряемых внешних возмущений;  $N$  — известная числовая матрица размером  $m_2 \times n_0$ ;  $L_1(p)$ ,  $L_2(p)$ ,  $L_3(p)$  — полиномиальные матрицы размеров соот-

ответственно  $n_0 \times n_0$ ,  $n_0 \times m$ ,  $n_0 \times m_3$  оператора дифференцирования  $p = d/dt$ :

$$L_1(p) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} L_1^{(i)} p^i, \quad L_2(p) = \sum_{j=0}^{\alpha_2} L_2^{(j)} p^j,$$

$$L_3(p) = \sum_{k=0}^{\alpha_3} L_3^{(k)} p^k,$$

где  $L_1^{(i)}$ ,  $L_2^{(j)}$ ,  $L_3^{(k)}$  — известные вещественные матрицы соответствующих размеров,  $\alpha_2, \alpha_3 < \alpha_1$ .

Будем полагать, что объект (1) стабилизируем и детектируем, а его уравнения представляют собой исходное, наименее преобразованное описание, полученное на основе фундаментальных физических законов механики и электродинамики.

Элементы матриц  $L_1^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, \alpha_1}$ ,  $L_2^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, \alpha_2}$ , далее будем называть физическими параметрами объекта управления. Пусть  $n$  физических параметров объекта с номинальными значениями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  могут принимать значения из заданных интервалов

$$\lambda_i + \Delta\lambda_i \in (\lambda_i^{\min}, \lambda_i^{\max}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $\Delta\lambda_i$  — отклонение параметра от номинального,  $\lambda_i^{\min}, \lambda_i^{\max}$  — известные границы.

Компоненты вектора внешних возмущений  $f$  — полигармонические функции вида:

$$f_i(t) = f_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3}. \quad (3)$$

Здесь  $f_{i0}$  — неизвестная постоянная составляющая, а амплитуды  $w_{ik}$ , начальные фазы  $\psi_{ik}$ , а также частоты  $\omega_k$ ,  $i = 1, \dots, m_3$ , гармоник неизвестны. Число гармоник не ограничено.

Будем полагать, что средние квадраты (мощности) любой компоненты внешнего возмущения подчинены условию:

$$\langle f_i^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_i^2(t) dt = (f_{i0})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik}^2 \leq w_i^{*2},$$

$$i = \overline{1, m_3}, \quad (4)$$

где  $w_i^*$ ,  $i = \overline{1, m_3}$  — заданные числа.

Определим средние квадраты регулируемых переменных соотношениями [15]:

$$\langle y_i^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y_i^2(t) dt > 0, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Будем говорить, что требования к точности выполнены, если выполняются неравенства:

$$\langle y_i^2 \rangle \leq (y_i^*)^2, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad (5)$$

где  $y_i^* > 0$ ,  $i = \overline{1, m_2}$  — заданные числа.

Однако ясно, что такого регулятора может не существовать. Поэтому определим среднеквадратичный радиус установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным соотношением (здесь в отличие от работы [15] не учитываются мощности управлений):

$$\langle r_{st}^2 \rangle = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{\langle y_i^2 \rangle}{(y_i^*)^2}, \quad (6)$$

на который и будем накладывать ограничения.

**Задача 1.** Построить стабилизирующий регулятор по выходу

$$u = K(p)y, \quad (7)$$

такой, чтобы, с одной стороны, при заданных конечных отклонениях параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  от расчетных (2) замкнутая система (1), (7) сохраняла асимптотическую устойчивость, а с другой, выполнялось условие

$$\langle r_{st}^2 \rangle \leq \gamma^2, \quad (8)$$

где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число,  $K(p)$  — искомая правильная передаточная матрица дробно-рациональных функций оператора  $p$  размера  $m \times m_2$ . ♦

Очевидно, что если число  $\gamma$  в результате синтеза получилось меньше или равно единице, то требования к точности (5) заведомо выполнены.

## 2. КАНОНИЧЕСКАЯ ( $W, \Lambda, K$ )-ФОРМА

Для решения поставленной задачи представим уравнения замкнутой системы (1), (7) в канонической ( $W, \Lambda, K$ )-форме [5, 10, 11] с учетом внешнего возмущения  $f$ . Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}} = W_{11}\tilde{y} + W_{12}u + W_{13}f & \tilde{u} = \Lambda\tilde{y} \\ y = W_{21}\tilde{y} + W_{22}u + W_{23}f & u = Ky, \end{cases} \quad (9)$$

где  $W_{ij}(s)$ ,  $i = 1, 2, j = 1, \dots, 3$  — известные передаточные матрицы, не содержащие варьируемых параметров (2);  $u$  и  $y$  — физические вход и выход объекта управления (1);  $\tilde{u}$  и  $\tilde{y}$  —  $n$ -мерные фиктивные вход и выход объекта управления;  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  — диагональная матрица параметров объекта управления, подверженных отклонениям от расчетных;  $K(s)$  — искомая передаточная матрица регулятора (7), далее  $I$  — единичная матрица соответствующего размера;  $s$  — переменная преобразования Лапласа.

Приведение к форме (9) аналогично технике, применяемой в работах [5, 9, 10]. Структурная схема ( $W, \Lambda, K$ )-формы, соответствующая уравнению (9), приведена на рис. 1.

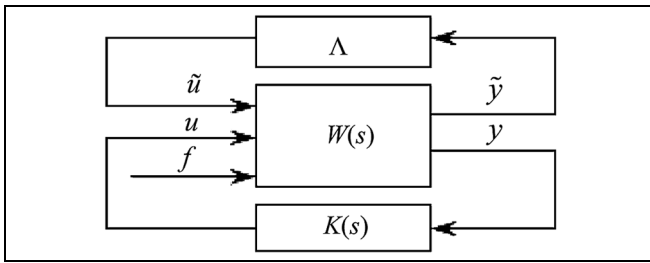


Рис. 1. Структурная схема (W, Lambda, K)-формы системы с внешним возмущением

Заметим, что уравнения замкнутой системы (1), (7) всегда могут быть представлены в канонической (W, Lambda, K)-форме (9) [9, 10].

### 3. ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

В настоящей работе, как и в работах [5, 10] для обеспечения допусков на параметры (2) употребляется понятие передаточной матрицы системы (9), разомкнутой по параметрам  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$  составляющим диагональную матрицу Lambda, когда размыкание осуществляется по переменной  $\tilde{u}$ . Для получения данной передаточной матрицы положим в уравнениях (9)  $f = 0$  и исключим переменные  $u$  и  $y$ . Тогда получим:

$$\tilde{y} = [W_{11} + W_{12}K(I - W_{22}K)^{-1}W_{21}]\tilde{u}, \quad \tilde{u} = \Lambda\tilde{y}. \quad (10)$$

Считая первое соотношение (10) некоторым «фиктивным» объектом управления, а второе соотношение «фиктивным» регулятором, можно непосредственно выписать передаточную матрицу разомкнутой системы по «входу»  $\tilde{u}$  фиктивного объекта:

$$W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(s) = -\Lambda\tilde{W} = -\Lambda[W_{11} + W_{12}K(I - W_{22}K)^{-1}W_{21}],$$

где верхний индекс « $\tilde{u}$ » указывает на точку размыкания. Структурная схема, соответствующая уравнениям (10), которую назовем (W-tilde, Lambda)-формой, приведена на рис. 2.

Особенность данной передаточной матрицы состоит в том, что варьируемые параметры составляют в ней диагональную матрицу коэффициентов усиления, что принципиально важно, поскольку позволяет весьма конструктивно воспользоваться критерием Найквиста для назначения допусков на эти параметры [5, 9, 10].

Заметим, что если эта передаточная матрица удовлетворяет круговому частотному неравенству [5, 9, 10]

$$[I + W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(-j\omega)^T [I + W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(j\omega)] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (11)$$

то имеют место достаточные оценки на интервалы параметров:

$$\min \left\{ \frac{\lambda_i}{1+r}, \frac{\lambda_i}{1-r} \right\} < \lambda_i + \Delta\lambda_i < \max \left\{ \frac{\lambda_i}{1+r}, \frac{\lambda_i}{1-r} \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

гарантирующих робастную устойчивость системы (1), (7). Здесь  $\lambda_i$  — номинальные значения физических параметров объекта, а  $r$  — радиус запасов устойчивости ( $0 < r \leq 1$ ) [5, 9, 10].

Отметим одну особенность оценок (12). Пусть  $\lambda_i > 0$ , а радиус запасов устойчивости равен своему максимально возможному значению  $r = 1$ . Тогда из выражения (12) при положительном  $\lambda_i$  следует, что интервалы возможных значений параметра  $\lambda_i$  удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{\lambda_i}{1+r} = \frac{\lambda_i}{2} \leq \lambda_i \leq \frac{\lambda_i}{1-r} = \infty, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Здесь мы имеем хорошую верхнюю границу для параметра  $\lambda_i$ , однако максимальное уменьшение  $\lambda_i$  от номинала возможно всего лишь в 2 раза, что не всегда приемлемо и приходится для обеспечения допусков (2) выбирать другие номинальные значения варьируемых параметров.

Покажем, что для улучшения нижней границы (12), (13) можно воспользоваться не частотным условием (11), а другим, которое следует из соображений, приведенных далее.

Рассмотрим замкнутую систему, представленную на рис. 3, где введена новая регулируемая переменная  $z = \tilde{u}$  (в работах [5, 10, 11]  $z = w + \tilde{u}$ ).

Здесь дополнительно к рис. 1 введены:  $w \in R^n$  — вектор фиктивных внешних возмущений;  $z \in R^n$  — вектор фиктивных регулируемых переменных, совпадающий с вектором  $\tilde{u}$ .

Легко показать, что передаточная матрица, связывающая фиктивное внешнее возмущение  $w$  с фиктивной регулируемой переменной  $z = \tilde{u}$  в замкнутой системе (см. рис. 3), имеет вид:

$$z = T_{zw}w, \quad T_{zw}(s) = -W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(s)[I + W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(s)]^{-1}.$$

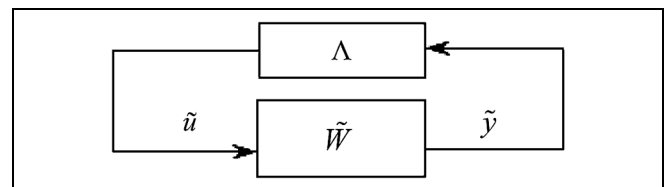


Рис. 2. Структурная схема (W-tilde, Lambda)-формы

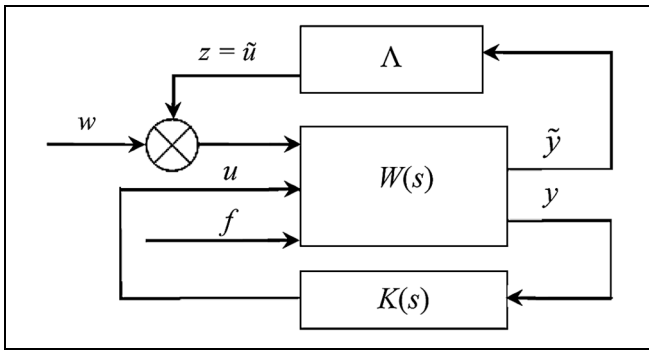


Рис. 3. Структурная схема замкнутой системы с фиктивным возмущением

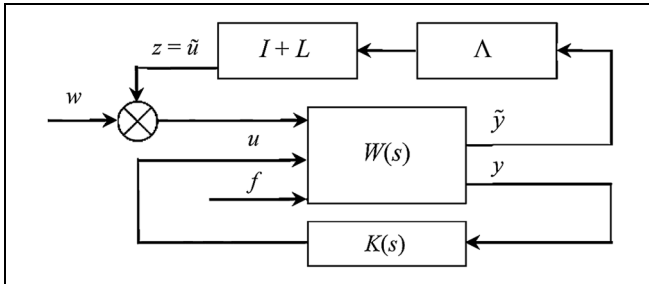


Рис. 4. Структурная схема системы с мультипликативным возмущением

Следуя работе [16], поместим на регулируемый выход замкнутой системы (см. рис. 3) мультипликативное возмущение  $I + L$ , где  $L = \text{diag}[l_1, l_2, \dots, l_n]$ , как показано на рис. 4.

Из работы [16] следует, что замкнутая система (см. рис. 4) асимптотически устойчива, если выполняется условие

$$\bar{\sigma}(L) < \frac{1}{\bar{\sigma}(T_{zw})},$$

где  $\bar{\sigma}(T_{zw})$  — максимальное сингулярное значение матрицы  $T_{zw}(j\omega)$  для всех частот  $\omega \in [0, \infty)$ , которое, как известно [4, 8], есть  $H_\infty$ -норма  $T_{zw}$  и, таким образом, это неравенство с учетом диагональной структуры матрицы  $L$  дает следующие оценки диагональных элементов этой матрицы, которые не нарушают асимптотической устойчивости замкнутой системы (см. рис. 4):

$$|l_i| \leq \frac{1}{\|T_{zw}\|_\infty}. \quad (14)$$

Пусть найдено решение задачи синтеза регулятора  $K(s)$  такого, что выполнено условие

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma, \quad (15)$$

где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число.

Тогда очевидно, в силу диагональной структуры матриц  $L$  и  $\Lambda$  (см. рис. 4) и неравенства (14), что замкнутая система не потеряет устойчивости если

$$\min \left\{ \lambda_i \frac{\gamma-1}{\gamma}, \lambda_i \frac{\gamma+1}{\gamma} \right\} \leq \lambda_i + \Delta \lambda \leq \max \left\{ \lambda_i \frac{\gamma-1}{\gamma}, \lambda_i \frac{\gamma+1}{\gamma} \right\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Таким образом доказана

**Теорема 1.** Пусть регулятор (7) гарантирует выполнение неравенства (15). Тогда границы робастной устойчивости системы (1), (7) по физическим параметрам объекта имеют вид (16). ♦

В одномерном случае ( $n = 1$ ) неравенство (15) означает, что модуль частотной передаточной функции замкнутой системы  $|T_{zw}(j\omega)|$  для всех вещественных частот  $\omega$  не превышает значения  $\gamma$ . В классической теории автоматического управления такое число есть показатель колебательности  $M(\gamma = M)$  [17]. Это, в частности, говорит о том, что годограф Найквиста, соответствующий передаточной функции разомкнутой системы  $W_{\text{раз}}^{\tilde{u}}(s)$ , не пересекает круга радиусом  $R = \gamma/(\gamma^2 - 1)$  с центром в точке  $(-C, j \cdot 0)$  на плоскости годографа, где  $C = \gamma^2/(\gamma^2 - 1)$ . Отсюда, в частности, следует, что коэффициент усиления в замкнутом контуре (см. рис. 2) без потери устойчивости можно изменять от 1 в интервале  $((\gamma - 1)/\gamma, (\gamma + 1)/\gamma)$ .

В многомерном случае ( $n > 1$ ) условие (14) имеет следующую физическую интерпретацию: по каждому входу  $\tilde{u}$  (см. рис. 2), коэффициенты усиления от номинального значения, равного единице, можно независимо от других изменять в интервалах  $((\gamma - 1)/\gamma, (\gamma + 1)/\gamma)$  без потери устойчивости. Отсюда, кстати, и следуют соотношения (16).

Таким образом, решение первой части задачи 1 сводится к такому построению регулятора (7) в  $H_\infty$ -проблеме (15), при котором величина  $\gamma$  принимает заданное или минимально возможное значение. Далее покажем, что поставленная задача 1 также может быть сведена к некоторой стандартной проблеме  $H_\infty$ -оптимизации, уже с учетом заданных допусков на ошибки регулирования (5) при действии ограниченных внешних возмущений (3), (4).

#### 4. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К СТАНДАРТНОЙ ПРОБЛЕМЕ $H_\infty$ -ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим замкнутую систему, представленную на рис. 5.



Она описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}(z_1 + w_1) + W_{12}u + W_{13}f, \\ \tilde{u} &= \Lambda \tilde{y}, \quad z_1 = \tilde{u}, \\ y &= W_{21}(z_1 + w_1) + W_{22}u + W_{23}f, \\ u &= Ky, \quad z_2 = Q^{1/2}y. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь дополнительно к рис. 1:  $w_1 \in R^n$  — вектор фиктивных внешних возмущений;  $z_1 \in R^n$  — вектор фиктивных регулируемых переменных;  $z_2 \in R^{m_2}$  — вектор физических регулируемых переменных объекта, взвешенный с помощью диагональной весовой матрицы  $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{m_2}]$  с положительными элементами  $q_i > 0, i = \overline{1, m_2}$ .

Введем расширенный вектор внешних возмущений  $w$ , включающий в себя вектор фиктивных внешних возмущений  $w_1$  и вектор реально действующих на объект внешних возмущений  $f$ , и расширенный вектор регулируемых переменных  $z$ , объединяющий векторы  $z_1$  и  $z_2$ . Передаточную матрицу замкнутой системы, связывающую эти векторы, обозначим через  $T_{zw}$ . Тогда можно записать:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{zw}w = \begin{bmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 f} \\ Q^{1/2} T_{y w_1} & Q^{1/2} T_{y f} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ f \end{bmatrix}.$$

Пусть регулятор  $K(s)$  разрешает задачу минимизации  $H_\infty$ -нормы передаточной матрицы такой замкнутой системы:

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma. \quad (18)$$

Тогда каждый из блоков этой матрицы удовлетворяет аналогичному условию [18], в частности,

$$\|T_{z_1 w_1}\|_\infty \leq \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{y f}\|_\infty \leq \gamma. \quad (19)$$

Первое из неравенств (19) совпадает с условием (15), поэтому имеем гарантируемые допуски на параметры (16), где  $\gamma$  — реализовавшееся значение при решении задачи (18). Второе из неравенств (19) может быть представлено в эквивалентной частотной форме [7, 8]:

$$T_{y f}^T(-j\omega) Q T_{y f}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty). \quad (20)$$

Имеет место

**Лемма** (о средних квадратах). Пусть выполнено частотное неравенство (20) с диагональной матрицей  $Q$ , тогда средние квадраты выходных переменных устойчивой системы при действии входного сигнала из класса (3), (5) принадлежат множеству, описываемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{m_2} q_i \langle y_i^2 \rangle \leq \gamma^2 \|w^*\|^2,$$

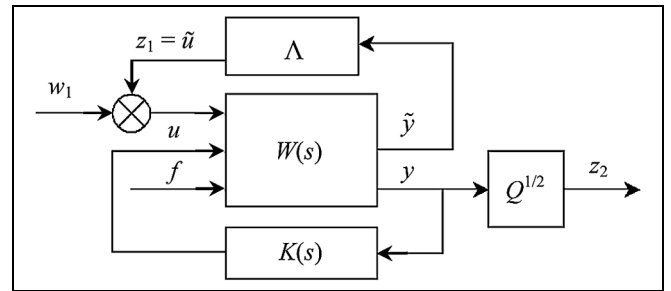


Рис. 5. Структурная схема замкнутой системы

где  $\|w^*\|$  — евклидова норма вектора  $w^*$  с компонентами правой части условия (4). ♦

Доказательство леммы приведено в работе [15].

Очевидно, что выбирая элементы диагональной весовой матрицы  $Q$  из равенств

$$q_i = \frac{\|w^*\|^2}{(y_i^*)^2}, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad (21)$$

придем к выполнению целевого условия (8), где  $\gamma$  — реализовавшееся значение при решении задачи (18).

Задачу по нахождению правильной передаточной матрицы регулятора  $K(s)$ , при котором бы выполнялось неравенство (18), можно переформулировать в виде следующих вспомогательных задач  $H_\infty$ -оптимального и субоптимального управления.

**Задача 2.** Найти регулятор (7), который бы обеспечивал выполнение неравенства (18) с минимально возможным значением  $\gamma = \gamma_0$ .

**Задача 3.** Дано число  $\gamma > \gamma_0$ . Найти регулятор (7) такой, что имеет место неравенство (18). ♦

Если задачи 2 и 3 решены, то зная значение параметра  $\gamma$ , реализовавшееся в результате синтеза, с учетом неравенств (16), легко найти достаточные оценки интервалов возможных значений параметров, гарантирующих робастную устойчивость системы (1), (7), а из целевого неравенства (8) найти оценки ошибок регулирования, которые заведомо будут не хуже оценок  $\langle y_i^2 \rangle \leq \gamma^2 (y_i^*)^2, i = \overline{1, m_2}$ .

Суммируя изложенное, сформулируем главный результат.

**Теорема 2.** Пусть решена  $H_\infty$ -задача (18) при условии (21). Тогда реализовавшееся при ее решении число  $\gamma$  определяет:

— границы робастной устойчивости (16) на отклонения  $\Delta \lambda_i$  физических параметров от номинальных  $\lambda_i$ ;

— оценки средних квадратов регулируемых переменных из условий (6), (8), которые будут заведомо не хуже оценок  $\langle y_i^2 \rangle \leq \gamma^2 (y_i^*)^2, i = \overline{1, m_2}$ . ♦

Теперь придадим уравнениям (17) стандартную форму записи, принятую в теории  $H_\infty$ -управления:

$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}u \\ y &= G_{21}w + G_{22}u \\ u &= Ky, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $G_{ij}(s)$ ,  $i, j = 1, 2$  — блоки передаточной матрицы  $G(s)$  обобщенного объекта.

**Утверждение.** Передаточные матрицы  $G_{ij}(s)$ ,  $i, j = 1, 2$ , обобщенного объекта (22) связаны с передаточными матрицами системы (17) равенствами:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \\ &= \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} & (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} \\ \left( Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \times \right. & \left. \left( Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Lambda W_{11} + Q^{1/2} W_{21} \right) \right) & \left. \left( \times \Lambda W_{13} + Q^{1/2} W_{23} \right) \right) \end{bmatrix}, \\ G_{12} &= \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + Q^{1/2} W_{22} \end{bmatrix}, \\ G_{21} &= \begin{bmatrix} \left( W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \times \right) & \left( W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \times \right) \\ \left( \times \Lambda W_{11} + W_{12} \right) & \left( \times \Lambda W_{13} + W_{23} \right) \end{bmatrix}, \\ G_{22} &= [W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + W_{22}]. \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство утверждения элементарное и здесь не приводится.

Таким образом, решая  $H_\infty$ -проблему (18), где весовые коэффициенты выбраны из равенств (21), добиваемся разрешения поставленной задачи 1.

## 5. ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА

Представим процедуру синтеза в виде последовательности действий.

1. Привести уравнения системы (1), (7) к виду (9), где  $\Lambda$  — диагональная матрица, включающая в себя выбранные проектировщиком номиналы физических параметров, подверженных отклонениям от расчетных.

2. Записать с учетом равенств (23) уравнения (17) в стандартной форме (22), принятой в теории  $H_\infty$ -управления, и привести эту форму к уравнениям состояния (см. работы [8, 10]).

3. Решить задачи 2 и 3  $H_\infty$ -управления (18) с учетом равенств (21) и найти передаточную матрицу  $K(s)$  регулятора (7).

4. Найти границы гарантируемых допусков на параметры объекта по формулам (16) и найти оценки ошибок регулирования из условия (8).

5. Сравнить найденные в п. 4 границы допусков с заданными.

6. Если найденные из формул (16) границы допусков на параметры объекта не покрывают заданные (2) или найденные границы на ошибки регулирования превышают заданные, то данный метод не дает решения. Однако можно выбрать другие значения номинальных параметров или уменьшить желаемые значения ошибок регулирования и повторить синтез, начиная с п. 2. Но в общем случае, например, если объект не минимально-фазовый по управлению, а заданные ошибки меньше предельно достижимых (либо интервалы (2) настолько широки, что никакой линейный регулятор не может стабилизировать систему), то нет гарантии на успех решения. Численные эксперименты показали, что в случае такой «пробуксовки» метода достаточно одной-двух итераций, чтобы понять, что цели регулирования недостижимы.

**Замечание.** Поскольку вектор регулируемых переменных системы (17) не содержит управления  $u$ , а вектор внешних воздействий не включает в себя помех измерения, то  $H_\infty$ -задача (18) является вырожденной и не может быть решена популярным 2-Риккати подходом [10] и для ее численного решения необходимо применять технику линейных матричных неравенств, реализованную в рамках MATLAB в пакете Robust Control Toolbox [19]. ♦

Прокомментируем отдельные шаги этого алгоритма. В пакете [19] регулятору ставится в соответствие четверка матриц  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$ , определяющих его уравнения состояния, а искомая передаточная матрица регулятора имеет вид  $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$ . При этом порядок регулятора не превышает порядка объекта [20] — степени полинома  $\det L_1(s)$ . В п. 3 процедуры сначала определяется минимально возможное значение  $\gamma = \gamma_0$  в задаче (18) с помощью функции `hinflmi` (см. подробнее в работе [8]), а затем решается субоптимальная задача (также с помощью `hinflmi`) при  $\gamma > \gamma_0$  (при  $\gamma = \gamma_0$  часть собственных значений матрицы замкнутой системы (1), (7) оказывается почти на мнимой оси!) и находится собственно регулятор  $K(s)$ .

## 6. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Проиллюстрируем эффективность предложенного метода синтеза на примере двухмассовой системы с упругой связью: двух тележек, соединенных пружиной [5, 6, 10]. Модель такой системы описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, & \dot{x}_2 &= x_4, & \dot{x}_3 &= -qx_1 + qx_2 + u + f, \\ \dot{x}_4 &= qx_1 - qx_2, & y &= x_2, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $q$  — варьируемый параметр (жесткость пружины), номинальное значение которого выбрано рав-

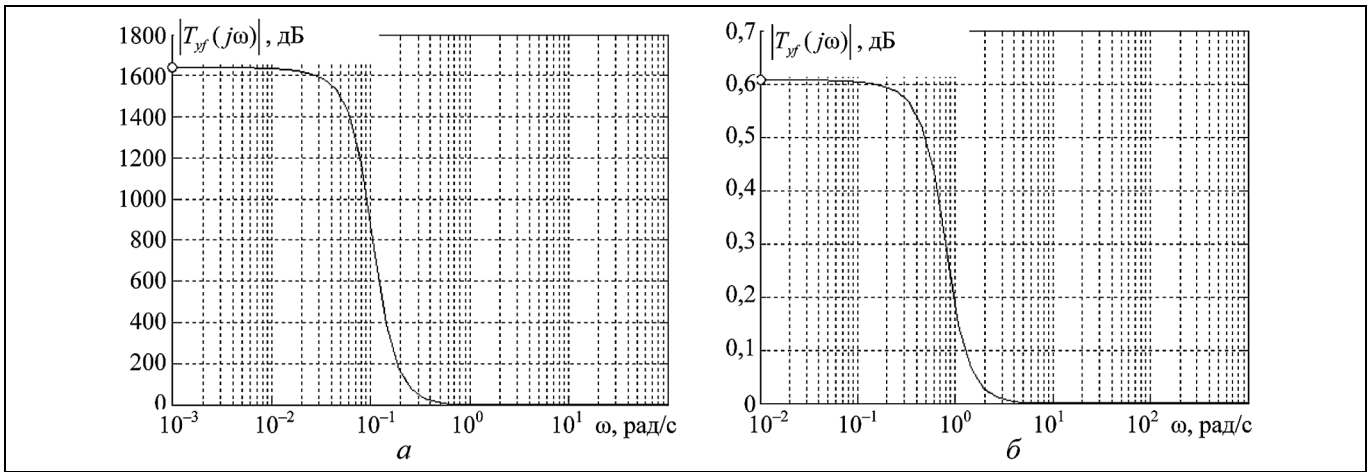


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы: а — с регулятором  $K_1$ ; б — с регулятором  $K_2$

ным 2;  $x_1$  — координата первой тележки;  $x_2$  — координата второй тележки;  $u$  — управляющее воздействие;  $f$  — внешнее возмущение. Измеряемая переменная  $y = x_2$ .

Для решения задачи синтеза на основе стандартной процедуры  $H_\infty$ -оптимизации опишем объект (24) уравнениями в пространстве состояний [5, 6, 10]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned}$$

где  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -q & q & 0 & 0 \\ q & -q & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$C_1 = \begin{bmatrix} -q & q & 0 & 0 \\ Q^{1/2} & (0 & 1 & 0 & 0) \end{bmatrix}$ ,  $C_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ ,

$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $D_{21} = [0 \ 0]$ ,  $D_{22} = [0]$ .

С целью сравнения сначала был осуществлен синтез регулятора, разрешающего первую часть задачи 1 (см. § 3), когда внешнее возмущение  $f$  не принималось во внимание при синтезе. Регулятор имеет вид:

$$K_1(s) = \frac{-201,9s^3 + 4694s^2 - 38,36s - 1,561}{s^4 + 21,84s^3 + 211,9s^2 + 1056s + 2560}.$$

Пусть средний квадрат регулируемой переменной не должен превышать значения  $y^* = 1$ , а внешнее возмущение ограничено значением  $w^* = 1$ . Тогда в соответствии с равенствами (21) получим

значение  $q_1 = 1$  единственного весового коэффициента при скалярной регулируемой переменной  $y$  в структурной схеме (см. рис. 5). Передаточная функция искомого регулятора:

$$\begin{aligned} K_2(s) &= \frac{-8,148 \cdot 10^7 s^3 - 8,676 \cdot 10^7 s^2 -}{s^4 + 69,1s^3 + 1,387 \cdot 10^4 s^2 +} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-8,164 \cdot 10^7 s - 2,524 \cdot 10^7}{+ 6,525 \cdot 10^5 s + 1,534 \cdot 10^7}. \end{aligned}$$

Заметим, что амплитудно-частотные характеристики замкнутых систем  $|T_{yf}(j\omega)|$  с построенными регуляторами  $K_1$  и  $K_2$ , как видно из рис. 6, являются монотонно убывающими функциями частоты  $\omega$ . Поэтому наихудшее возмущение для этих систем — ступенчатая функция.

Переходные процессы по переменной  $y = x_2$  в замкнутой системе при нулевых начальных условиях и ступенчатом возмущении  $f = 1$  приведены на рис. 7.

Очевидно, что установившаяся ошибка для регулятора  $K_2$  на 3 порядка меньше (при этом время регулирования также значительно — на порядок — уменьшилось). Это подчеркивает эффективность предложенного подхода к обеспечению заданной точности. Помимо этого было исследованы допуски на варьируемый параметр  $q$  с номинальным значением, равным 2. Гарантируемые границы были найдены по формулам (16), а истинные на основе применения критерия Найквиста к системе (см. рис. 2), разомкнутой по переменной  $\tilde{u}$  (параметру  $q$ , как в работах [5, 9]) при известном регуляторе. Так как параметр  $q$  есть множитель передаточной функции разомкнутой системы (10) (на рис. 2 матрица  $\Lambda$  есть просто скаляр  $q$ ), то, определив точки пересечения годографа Найквиста

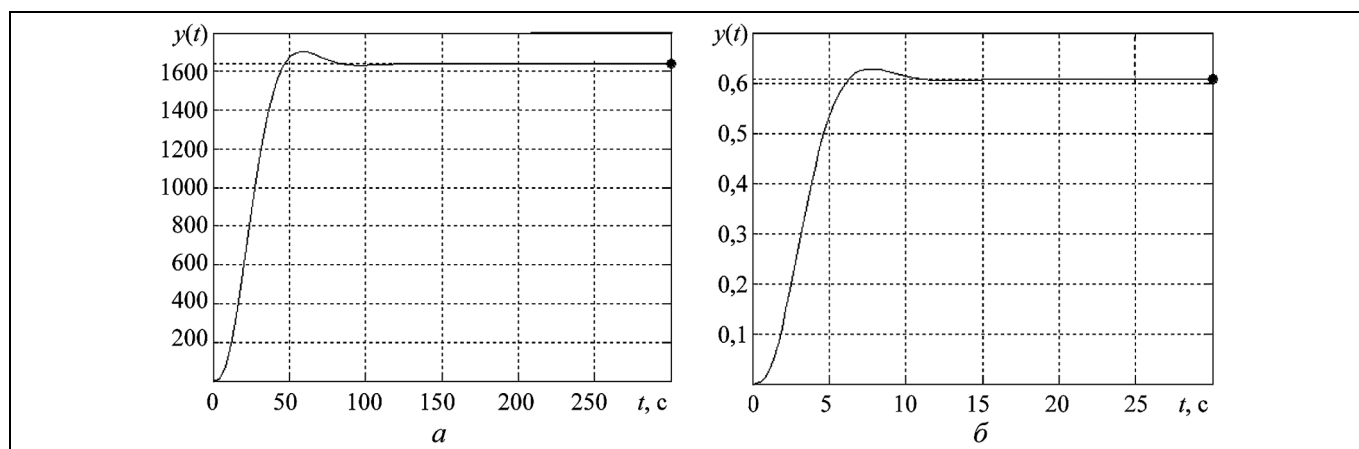


Рис. 7. Реакция замкнутой системы на единичное ступенчатое воздействие: *a* — с регулятором  $K_1$ ; *b* — с регулятором  $K_2$

с вещественной осью, найдем истинный интервал устойчивости по  $q$ . В табл. 1 приведены результаты этого исследования.

В последней строке табл. 1 приведены значения запасов устойчивости по модулю  $L$  и фазе  $\varphi_3$ , которые определяются при размыкании замкнутой системы по переменной  $u$  (физическому входу

объекта). Здесь надо отметить весьма низкие запасы устойчивости по фазе и модулю, если регулятор строится без учета внешнего возмущения, хотя границы на варьируемый параметр весьма широки (см. также работу [10]).

Заключая этот раздел работы, приведем табл. 2, взятую частично из работы [21] и содержащую ин-

Таблица 1

Результаты анализа системы с полученными регуляторами

Характеристика	Без учета возмущения $f$ (с регулятором $K_1$ )	С учетом возмущения $f$ (с регулятором $K_2$ )
Значение параметра $\gamma$	1,1354	1,1808
Гарантируемые границы	$0,2385 < q < 3,7615$	$0,3062 < q < 3,6938$
Истинные границы	$0,1372 < q < 12,928$	$0,171 < q < 8,176$
Запасы устойчивости	$L = 0,539$ дБ, $\varphi_3 = 5,12^\circ$	$L = 12,2$ дБ, $\varphi_3 = 57,2^\circ$

Таблица 2

Сравнительная таблица подходов к синтезу регулятора для объекта (24)

Метод	Авторы, год, источник	Требования			Границы устойчивости $q_{\min} - q_{\max}$
		Запас по фазе $\varphi_3, ^\circ$	Запас по модулю $L, \text{дБ}$	Время регулирования $t_p, \text{с}$	
		30	6,0	15	0,5—2,0
Maximum Entropy robust approach	W.M. Haddad, E.G. Collins, D.S. Bernstein, 1993, [22]	26,2	4,5	20	0,4459—2,066
Robust $H_2$	A. Farag, H. Werner, 2002, [21]	32	6,6	14,5	0,410—3,1
$H_\infty$ Pole Placement	M. Chilali, P. Gahinet, 1996, [23]				0,5—12 (система неустойчива)
$(W, \Lambda, K) - r$	В.Н. Честнов, 2015, [10]	65,2	20,7	5,5	0,4245—6,9264 (гарантируемые) 0,213—8,6022 (истинные)
$(W, \Lambda, K) - M$	В.Н. Честнов, Н.И. Самшорин, 2016, настоящая работа	57,2	12,2	9,21	0,3062—3,6938 (гарантируемые) 0,171—8,176 (истинные)





формацию о других, наиболее успешных работах [10, 21–23], посвященных решению задачи управления объектом (24) в качестве «benchmark» задачи. Из таблицы видно, что предложенный здесь подход, как и подход, несколько ранее развитый в работах [10, 11], обеспечивает значительно более высокие показатели качества, нежели методы широко известные на Западе. Этот метод можно рассматривать как дополнение подхода [10, 11], с лучшей нижней границей для области робастной устойчивости по параметру  $q$ , но худшей верхней.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено решение задачи робастной стабилизации при параметрической неопределенности с учетом ограниченных внешних возмущений, дополняющее известное [10, 11]. Отметим некоторые привлекательные, с инженерной точки зрения, особенности предложенного подхода:

— рассматриваются отклонения физических параметров от расчетных;

— ясные инженерные критерии: показатель колебательности и среднеквадратичный радиус установившегося состояния замкнутой системы;

— процедура синтеза сведена к стандартной задаче  $H_\infty$ -оптимизации;

— порядок регулятора не превышает порядка исходного физического объекта;

— в качестве внешнего возмущения может выступать любая кусочно-постоянная функция, разложимая в ряд Фурье и имеющая ограниченную мощность.

Таким образом, теория  $H_\infty$ -оптимизации, изначально предназначенная к условиям неопределенностей в частотной области и внешним возмущениям из класса  $L_2$  исчезающих функций времени, показывает превосходную работоспособность в рамках, более приближенных к инженерной практике.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ackermann J. Robust control: system with uncertain physical parameters. — London: Springer, 1993. — 483 p.
2. Barmich B.R. New tools for robustness of linear systems. — N.-Y.: Macmillan, 1994. — 334 p.
3. Bhattacharyya S.P., Keel L.A., Chapellat H. Robust control: the parametric approach. — Hertfordshire: Prentice Hall, 1995. — 647 p.
4. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
5. Честнов В.Н. Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 3. — С. 229–238.
6. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры  $H_\infty$ -оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 7. — С. 100–109.
7. Агафонов П.А., Честнов В.Н. Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе  $H_\infty$ -подхода // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 101–108.
8. Честнов В.Н. Синтез  $H_\infty$ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 10. — С. 170–185.
9. Честнов В.Н. Подход к задаче синтеза допусков на параметры линейных многомерных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1995. — № 2. — С. 72–79.
10. Честнов В.Н.  $H_\infty$ -подход к синтезу регуляторов при параметрической неопределенности и полигармонических внешних возмущениях // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 6. — С. 109–117.
11. Chestnov V.N. Design of  $H_\infty$  Controllers under Parametric Uncertainty and Power-Bounded External Disturbances / Proc. of the 8th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND-2015). — Bratislava: IFAC Publication, 2015. — С. 56–61.
12. Честнов В.Н., Самшорин Н.И. Синтез робастных регуляторов при параметрической неопределенности и внешних возмущениях / Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). — М.: ИПУ РАН, 2014. — С. 1033–1045.
13. Самшорин Н.И., Честнов В.Н. К синтезу регуляторов при параметрической неопределенности и ограниченных по мощности внешних возмущениях / Тр. 7-й всерос. науч. конф. «Системный синтез и прикладная синергетика» (ССПС-2015). — Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2015. — С. 271–282.
14. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
15. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности по среднеквадратичному критерию // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 12. — С. 109–117.
16. Doyle J.C., Stein G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1981. — Vol. AC-26, N 1. — P. 4–16.
17. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. — М.: Энергия, 1980. — 312 с.
18. The Control Handbook / Editor W.S. Levine. — N.-Y.: IEEE Press, 1996. — 1548 p.
19. Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., et al. Robust Control Toolbox 3. User's guide. — Natick (Mass.): The Math Works, Inc., 2010. — 178 p.
20. Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 1994. — Vol. 4. — P. 421–448.
21. Farag A., Werner H. Robust H2 Controller Design and Tuning for the ACC Benchmark Problem and a Real-time Application // Proc. of the 15-th World Congress IFAC. — Barcelona, Spain, 2002. — 6 p.
22. Haddad W.M., Collins E.G., Bernstein D.S. Robust Stability Analysis Using The Small Gain, Circle, Positivity and Popov Theorems: A Comparative Study // IEEE Trans. on Control Systems Technology. — 1993. — Vol. 1, N 4. — P. 290–293.
23. Chilali M., Gahinet P.  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1996. — Vol. AC-41, N 3. — P. 358–367.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

**Честнов Владимир Николаевич** — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ vnchest@rambler.ru,

**Самшорин Николай Иванович** — инженер-конструктор, Электростальский завод тяжелого машиностроения, г. Электросталь, ✉ tesla\_pro@mail.ru.