Автоматика и телемеханика, № 5, 2015

© 2015 г. **А.Г. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук (alex7@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ ТОЧНОСТИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЮ. I. МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Предлагается метод синтеза регуляторов одномерных, минимально-фазовых объектов при неизвестных ограниченных внешних возмущениях. Метод основан на определении параметров тождества Безу, при которых обеспечивается заданная точность регулирования и быстродействие.

1. Введение

Системы автоматического управления характеризуются показателями, основными из которых служат точность, быстродействие, перерегулирование, запасы устойчивости по фазе и модулю. Первым методом синтеза по этим показателям систем стал метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик (метод ЛАЧХ) [1, 2] для одномерных объектов (объектов с одной измеряемой и одной управляющей переменными).

Развитие этого метода для многомерных объектов оказалось затруднительным. Методы LQ- и H_∞-оптимизации [3–6] не связаны с числом измеряемых и управляющих переменных, и поэтому были исследованы показатели оптимальных систем. В частности, установлены их запасы устойчивости [7, 8], получена связь точности регулирования со структурой и параметрами функционалов оптимизации и на этой основе были разработаны методы [9] синтеза регуляторов многомерных объектов по заданной точности и необходимым запасам устойчивости.

Быстродействие является важным показателем систем регулирования. Метод синтеза регуляторов по точности и быстродействию для минимально-фазовых одномерных объектов предложен в [10]. Метод основан на решении тождества Безу, правая часть которого является устойчивой частью полинома для экстремалей специального функционала, который обеспечивает запасы устойчивости системы, ее точность и быстродействие.

В настоящей статье предлагается способ формирования правой части тождества Безу, в котором исключена операция определения корней указанного полинома. Последнее особенно существенно в многомерном случае, рассматриваемом во второй части статьи, где синтез регулятора по требованиям точности, быстродействия и запасам устойчивости осуществляется на основе матричного тождества Безу. Решение этого тождества состоит в решении системы линейных алгебраических уравнений в отличие от [11, 10], где аналогичная задача сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения Риккати либо к задаче H_∞-оптимизации, решение которой осуществляется на основе линейных матричных неравенств.

Методам подавления внешних возмущений посвящена книга [12], где находится регулятор, обеспечивающий заданную границу квадратичной формы регулируемых переменных. Коэффициенты этой квадратичной формы являются наилучшими в некотором смысле. Метод учитывает ограничения на управления и влияние начальных условий.

2. Постановка задачи

2.1. Показатели точности и быстродействия

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему управления, описываемую уравнениями

$$\begin{gathered} d_n y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + d_1 \dot{y} + d_0 y = k_m u^{(m)} + \ldots \\ \ldots + k_1 \dot{u} + k_0 u + c_p f^{(p)} + \ldots + c_1 \dot{f} + c_0 f, \quad m < n, \quad p < n, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \end{gathered} \tag{1}$$

$$g_{n_c} u^{(n_c)} + \ldots + g_1 \dot{u} + g_0 u = r_{m_c} y^{(m_c)} + \ldots + r_1 \dot{y} + r_0 y, \quad n_c \geqslant m_c, \tag{2}$$

где $y(t)$ – измеряемый выход объекта (1), являющийся регулируемой переменной, $u(t)$ – управление, формируемое регулятором (2), $f(t)$ – неизвестное, ограниченное известным числом f^* внешнее возмущение. Начальные условия для этой системы нулевые:

$$y(t_0) = \dot{y}(t_0) = \ldots = y^{(n-1)}(t_0) = 0, \quad u(t_0) = \dot{u}(t_0) = \ldots = u^{(n_c-1)}(t_0) = 0,$$

t_0 и t_1 – заданные числа.

Уточним вид внешнего возмущения. Разобьем интервал работы системы на N подынтервалов, каждый длительностью $h = \frac{t_1 - t_0}{N}$, и используя существование чисел $f(kh) = f(k)$, $k = \overline{1, N}$, разложим $f(k)$ в ряд Фурье

$$f(k) = \sum_{i=1}^{N} f_i \sin(\omega_i k + \varphi_{f,i}), \quad k = \overline{1, N},$$

где f_i, $i = \overline{1, N}$ – коэффициенты ряда Фурье, $\omega_i = \frac{2\pi}{N} i$, $i = \overline{1, N}$. Далее полагаем, что внешнее возмущение – полигармоническая функция

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} f_i \sin(\omega_i t + \varphi_{f,i}) \tag{3}$$

с неизвестными частотами ω_i и фазами $\varphi_{f,i}$, $i = \overline{1, N}$, а ее неизвестные амплитуды удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{N} |f_i| \leqslant f^*. \tag{4}$$

Выход системы $y(t)$ состоит из двух процессов: *рабочего* (основного) процесса — $y_b(t)$ и *переходного* (к рабочему) — $y_{tr}(t)$,

$$y(t) = y_b(t) + y_{tr}(t).$$

Рабочий процесс имеет вид

$$y_b(t) = \sum_{i=0}^{N} a(\omega_i) \sin(\omega_i t + \varphi_i), \tag{5}$$

где $a(\omega_i)$ и φ_i, $i = \overline{1, N}$ — амплитуды и фазы выхода системы.

Если внешнее возмущение (3) состоит из одной или нескольких действительно существующих гармоник, то процесс (5) называют установившимся процессом. В рассматриваемом случае такие гармоники могут отсутствовать (например, $f(t)$ – линейная функция либо экспонента) и частоты ω_i, $i = \overline{1, N}$, – это результат разложения в ряд Фурье почти произвольного внешнего возмущения (эти частоты зависят от выбора длины интервалов $[t_0, t_1]$ и h). Поэтому будем использовать понятие рабочего процесса.

Введем понятия показателей системы (1), (2), которые являются обобщением известных показателей [1, 2] для типовых задающих воздействий.

Точность регулирования — это наименьшее положительное число y_b^a такое, что ошибка регулирования удовлетворяет условию

$$|y_b(t)| \leqslant y_b^a, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Из-за переходного процесса, вызванного начальными условиями и начальным значением внешнего возмущения, выход системы может превышать значение y_b^a:

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |y(t)| > y_b^a.$$

Длительность и относительная величина превышения числа y_b^a характеризуются временем регулирования и перерегулированием.

Время регулирования — это наименьшее время $t_{\text{рег}}$, когда выполняется неравенство

$$|y(t) - y_b(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant t_{\text{рег}},$$

где ε – заданное положительное число.

Для единичного ступенчатого либо гармонического задающего воздействия принято [1, 2] значение $\varepsilon = 0{,}05 \sup\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |y(t)|$.

Перерегулирование есть

$$\sigma = \frac{\sup\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |y(t)| - \sup\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |y_b(t)|}{\sup\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |y_b(t)|} \cdot 100\%.$$

Запасы устойчивости по фазе ($\varphi_з$) и модулю (L) [1, 2] системы (1), (2) находятся путем приложения к объекту (1) вместо управления сигнала $(-\sin \omega t)$ и измерения выхода регулятора $u = a(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$. С использованием функции $a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ находятся запасы устойчивости.

При таком их определении система может терять устойчивость из-за ее размыкания, и поэтому для определения запасов устойчивости используют радиус запасов устойчивости [9]

$$r_a = \inf_{0\leqslant\omega<\infty} |\mathrm{v}(j\omega)|, \tag{6}$$

где $\mathrm{v}(j\omega) = 1 + a(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = 1 + w(j\omega)$ — функция возвратной разности (в которой $w(j\omega)$ – передаточная функция разомкнутой системы), которая находится экспериментально, без размыкания системы. Если $r_a \geqslant 0{,}75$, то $\varphi_з \geqslant 42^\circ$, $L \geqslant 1{,}7$, а при $r_a \geqslant 1$, $\varphi_з \geqslant 60^\circ$, $L \geqslant 2{,}0$.

Задача 2.1 состоит в нахождении для заданного полностью управляемого и полностью наблюдаемого объекта (1) регулятора (2), обеспечивающего выполнение требований к:

- точности

$$|y_b(t)| \leqslant y^*, \tag{7}$$

- качеству

$$t_{\text{рег}} \leqslant t^*_{\text{рег}}, \quad \sigma \leqslant \sigma^*, \tag{8}$$

- запасам устойчивости

$$r_a \geqslant r^*_a, \tag{9}$$

где y^*, $t^*_{\text{рег}}$, σ^*, r^*_a — заданные положительные числа.

Примечание 2.1. В действительности требования к показателям системы выражаются неравенствами

$$\begin{gathered} a_y y^* \leqslant |y(t)| \leqslant y^*, \quad a_t t^*_{\text{рег}} \leqslant t_{\text{рег}} \leqslant t^*_{\text{рег}}, \\ a_\sigma \sigma^* \leqslant \sigma \leqslant \sigma^*, \quad a_r r^*_a \leqslant r_a \leqslant r^*_a, \end{gathered} \tag{10}$$

где a_y, a_t, a_σ и a_r — заданные положительные числа ($a_y < 1$, $a_t < 1$, $a_\sigma < 1$ и $a_r < 1$), выражающие допуски на отклонения от чисел y^*, $t^*_{\text{рег}}$, σ^* и r^*_a. Дело в том, что при условиях (7)–(9) может случиться так, что в результате расчета будет получен регулятор (2), обеспечивающий ошибку регулирования (при внешнем возмущении, близком к границе f^*) в несколько раз меньше величины y^*. Тогда для получения такой точности требуется более точная, чем необходимо, аппаратура для измерения функции $y(t)$.

Ситуация с быстродействием аналогична: если время регулирования в несколько раз меньше требуемой величины $t^*_{\text{рег}}$, то это приводит к динамической перегрузке исполнительных органов, плохой помехозащищенности системы и т. п. Изложенное далее построено исходя из целей (7)–(9), однако оно часто может быть развито для случая (10).

2.2. Редукция задачи

Преобразуя уравнения (1), (2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, запишем их как

$$d(s)y = k(s)u + c(s)f, \tag{11}$$
$$g(s)u = r(s)y, \tag{12}$$

где

$$d(s) = \sum_{i=0}^{n} d_i s^i, \quad k(s) = \sum_{i=0}^{m} k_i s^i, \quad g(s) = \sum_{i=0}^{n_c} g_i s^i,$$
$$r(s) = \sum_{i=0}^{m_c} r_i s^i, \quad c(s) = \sum_{i=0}^{p} c_i s^i.$$

Выразим требования (7)–(9), используя передаточную функцию системы и ее характеристический полином.

Передаточная функция системы $t_{yf}(s)$, связывающая выход с внешним возмущением, имеет вид

$$t_{yf}(s) = \frac{g(s)c(s)}{d(s)g(s) - k(s)r(s)}. \tag{13}$$

Требование (7) к точности выполняется, если

$$\sup_{0 \leqslant \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)| \leqslant \frac{y^*}{f^*}. \tag{14}$$

Действительно, выход системы (1), (2) при возмущении (3) имеет вид (5). Учитывая ограничения (4), запишем

$$|y_b(t)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |a(\omega_i)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |t_{yf}(j\omega_i)||f_i| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)| \sum_{i=0}^{\infty} |f_i| = f^* \sup_{0 \leqslant \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)| \leqslant y^*.$$

Из последнего неравенства следует выражение (14).

Характеристический полином системы имеет вид

$$d^s(s) = d(s)g(s) - k(s)r(s).$$

Полагая далее $n_c = n$, упорядочим модули вещественных частей корней $s_{s,i}$, $i = \overline{1, 2n}$ этого полинома:

$$|\mathrm{Re} s_{s,1}| \leqslant |\mathrm{Re} s_{s,2}| \leqslant \ldots \leqslant |\mathrm{Re} s_{s,2n}|.$$

Время регулирования будем характеризовать числом

$$t_{\text{рег}} = \beta |\operatorname{Re} s_{s,1}|^{-1},$$

где β — положительное число; $\beta = 3$, если $|\operatorname{Re} s_{s,2}|$ и модули вещественных частей корней полиномов $g(s)$ и $c(s)$ в передаточной функции (13) достаточно велики по сравнению с числом $|\operatorname{Re} s_{s,1}|$.

Будем полагать, что требование (8) к времени регулирования выполнено, если

$$|\operatorname{Re} s_{s,1}| \geqslant \beta t^{*-1}_{\text{рег}}. \tag{15}$$

Запишем выражение (6) более подробно как

$$r_a^2 = \inf_{0 \leqslant \omega < \infty} |1 + w(j\omega)|^2,$$

где

$$w(s) = -\frac{k(s)r(s)}{d(s)g(s)}.$$

Будем полагать, что система обладает запасами устойчивости, если

$$r_a \geqslant r_a^*, \tag{16}$$

где, в частности, $r_a^* = 0{,}75$.

Рассмотрим тождество Безу

$$d(s)g(s) - k(s)r(s) = \psi(s), \tag{17}$$

где $\psi(s)$ — полином степени $2n$, корни которого имеют отрицательные вещественные части.

При условии $\deg d(s) = n,\ \deg r(s) = n - 1$ это тождество имеет единственное решение для полиномов $g(s)$ и $r(s)$ регулятора, которое находится как решение системы линейных алгебраических уравнений, получающихся после сравнения коэффициентов при одинаковых степенях s в левой и правой частях тождества [13].

Задача 2.2 состоит в том, чтобы найти коэффициенты полинома правой части тождества (17) такие, чтобы система (1), (2) удовлетворяла условиям (14), (15), (16).

Решение задачи 2.2 существенно зависит от свойств полинома $k(s)$ объекта. Далее полагаем, что корни полинома $k(s)$ имеют отрицательные вещественные части. Объект (1) в этом случае называют минимально-фазовым.

3. Структуры полинома правой части тождества Безу и полиномов регулятора

Примем следующую структуру полинома (17):

$$\psi(s) = \varepsilon(s)k(s)\delta(s), \tag{18}$$

где $\varepsilon(s)$ — полином реализуемости степени $n-m-1$, который необходим для реализуемости регулятора (условие реализуемости $\deg g(s) \geqslant \deg r(s)$), $\delta(s)$ — базовый (основной) полином степени n с вещественными корнями $(-s_{\delta,i})$, $i = \overline{1,n}$:

$$\delta(s) = \delta_n \prod_{i=1}^{n} (s + s_{\delta,i}),$$

в котором далее будем полагать (если не указано противное), что

$$\delta_n = d_n > 0. \tag{19}$$

Если степень полинома $k(s)$

$$m = n - 1,$$

то регулятор реализуем при $\varepsilon(s) = 1$, а тождество Безу (17) имеет очевидное решение

$$g(s) = k(s), \quad r(s) = d(s) - \delta(s).$$

Если степень полинома $k(s)$ меньше $n-1$, то регулятор (2) нереализуем, так как степень полинома $r(s)$ равна $n-1$. В этом случае полином реализуемости имеет вид

$$\varepsilon(s) = \varepsilon_\rho s^\rho + \ldots + \varepsilon_1 s + 1,$$

где $\rho = n - m - 1$, а корни $\varepsilon(s)$ имеют отрицательные вещественные части.

Полином $g(s)$ имеет структуру

$$g(s) = g_\varepsilon(s) k(s), \tag{20}$$

в которой

$$g_\varepsilon(s) = g_{\varepsilon,\rho} s^\rho + \ldots + g_{\varepsilon,1} s + g_{\varepsilon,0}.$$

Выберем коэффициенты полинома реализуемости так, что

$$\varepsilon_i = \nu_i \varepsilon_{i-1}, \quad i = \overline{1,\rho}, \quad \varepsilon_0 = 1, \tag{21}$$

где $\nu_i,\ i = \overline{1,\rho}$ — достаточно малые положительные числа, такие что корни полинома $\varepsilon(s)$ имеют отрицательные вещественные части.

Условие (21) выполняется, если принять

$$\varepsilon(s) = \prod_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\mu_i}{s_\delta} s + 1 \right), \tag{22}$$

где $s_\delta = \max[s_{\delta,1}, \ldots, s_{\delta,n}],\ i = \overline{1,\rho}$, а $\mu_i,\ i = \overline{1,\rho}$ — достаточно малые различные положительные числа.

Учитывая структуру модального полинома и полинома $g(s)$, запишем тождество Безу как

$$d(s) g_\varepsilon(s) - r(s) = \varepsilon(s) \delta(s).$$

Утверждение 3.1. *При достаточно малых числах ν_i, $i = \overline{1, \rho}$ коэффициенты полиномов $g_\varepsilon(s)$ и $\tilde{r}(s)$, являющиеся решением тождества*

$$d(s)g_\varepsilon(s) - \tilde{r}(s) = \delta(s)\varepsilon(s),$$

имеют вид

$$g_{\varepsilon,i} = \varepsilon_i + 0_{1,\,i}(\nu), \quad \tilde{r}_j = r_j + 0_{2,\,j}(\nu), \quad i = \overline{1, \rho}, \quad j = \overline{0, n-1},$$

где $0_{1,\,i}(\nu)$ и $0_{2,\,j}(\nu)$ — функции, исчезающие вместе с вектором $\nu = [\nu_1, \ldots, \nu_\rho]$:

$$\lim_{\nu\to 0} 0_{1,\,i}(\nu) = 0, \quad \lim_{\nu\to 0} 0_{2,\,j}(\nu) = 0, \quad i = \overline{1, \rho}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Доказательство этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

4. Синтез регуляторов

4.1. Запасы устойчивости

Используя функцию возвратной разности

$$\mathrm{v}(s) = 1 + w(s),$$

заключаем, что система обладает запасами устойчивости, если

$$|\mathrm{v}(j\omega)| \geqslant r_a^*, \quad 0 \leqslant \omega < \infty. \tag{23}$$

Разделим тождество Безу (17) на полином $d(s)g(s)$ и получим выражение

$$\mathrm{v}(s) = 1 + w(s) = \frac{\psi(s)}{d(s)g_\varepsilon(s)k(s)} = \frac{\varepsilon(s)\delta(s)}{g_\varepsilon(s)d(s)} = \frac{\varepsilon(s)\delta(s)}{[\varepsilon(s) + 0_1(s,\nu)]d(s)}.$$

Пренебрегая полиномом $0_1(s,\nu)$, исчезающим вместе с вектором ν, запишем условие (23) как

$$\frac{|\delta(j\omega)|^2}{|d(j\omega)|^2} \geqslant r_a^*, \quad 0 \leqslant \omega < \infty, \tag{24}$$

которое в более подробной форме имеет вид

$$\frac{|\delta(j\omega)|^2}{|d(j\omega)|^2} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n_1}(\omega^2 + s_{\delta,i}^2)\prod\limits_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}(\omega^2 + s_{\delta,i}^2)(\omega^2 + s_{\delta,i+1}^2)}{\prod\limits_{i=1}^{n_1}(\omega^2 + s_{d,i}^2)\prod\limits_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}[\omega^4 + 2(2\xi_{d,i}^2 - 1)s_{d,i}^2\omega^2 + s_{d,i}^4]} \geqslant r_a^*, \tag{25}$$

где $(-\xi_{d,i} \pm j\sqrt{1-\xi_{d,i}^2})s_{d,i}$, $\xi_{d,i}^2 \leqslant 1$, $i = \overline{n_1+1, n_1+n_2}$, $(n_1 + 2n_2 = n)$ – комплексные корни, а $(-s_{d,i})$, $i = \overline{1, n_1}$ – вещественные корни полинома $d(s)$.

У т в е р ж д е н и е 4.1. Система (11), (12), *регулятор которой получен из тождества Безу* (17) *с полиномом* (18), *имеет радиус запасов устойчивости $r_a = 1$, если модули корней полинома $\delta(s)$ удовлетворяют неравенствам*

$$s_{\delta,i} \geqslant |s_{d,i}|, \quad i = \overline{1, n_1}, \tag{26}$$

$$s_{\delta,n_1+1} \geqslant |s_{d,n_1+1}|, \ \ s_{\delta,n_1+2} \geqslant |s_{d,n_1+1}|, \ \ldots, \ s_{\delta,n-1} \geqslant |s_{d,n}|, \ \ s_{\delta,n} \geqslant |s_{d,n}| \tag{27}$$

и числа μ_i, $i = \overline{1, n-m}$ в выражении (22) *достаточно малы.*

Это утверждение получено в [14] для случая, когда полином $\delta(s)$ содержит комплексные корни, число которых равно числу комплексных корней полинома $d(s)$.

Из этого утверждения следует достаточное условие обеспечения запасов устойчивости

$$s_{\delta,i} = |s_{d,i}|(1 + \rho_i), \quad i = \overline{1, n}, \tag{28}$$

где ρ_i, $i = \overline{1, n}$ – произвольные неотрицательные числа.

Из неравенства (24) нетрудно получить менее конструктивные по сравнению с (28), но необходимые условия запасов устойчивости.

У т в е р ж д е н и е 4.2. Для обеспечения запасов устойчивости системы необходимо и достаточно существование полинома $h(s)$ степени n, корни которого имеют отрицательные действительные части, такого что

$$|\delta(j\omega)|^2 - |d(j\omega)|^2 = |h(j\omega)|^2.$$

Действительно, из условия (24) при $r_a^* = 1$ следует, что

$$a(j\omega) = |\delta(j\omega)|^2 - |d(j\omega)|^2 \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \omega < \infty.$$

Это неравенство выполняется, если существует полином $h(s)$, корни которого имеют отрицательные действительные части, такой что

$$a(j\omega) = h(-j\omega)h(j\omega) = |h(j\omega)|^2 \geqslant 0.$$

Верно и обратное. Если

$$|\delta(j\omega)|^2 - |d(j\omega)|^2 \geqslant |h(j\omega)|^2,$$

то $r_a = 1$.

Действительно, из последнего неравенства следует

$$\frac{|\delta(j\omega)|^2}{|d(j\omega)|^2} \geqslant 1 + \frac{|h(j\omega)|^2}{|d(j\omega)|^2}.$$

Так как $\frac{|h(j\omega)|^2}{|d(j\omega)|^2} \geqslant 0$, то условие (24) выполняется.

4.2. Время регулирования

Упорядочим модули корней объекта и базового полинома следующим образом:

$$|s_{d,1}| \leqslant |s_{d,2}| \leqslant \ldots \leqslant |s_{d,n}|, \quad s_{\delta,1} \leqslant s_{\delta,2} \leqslant \ldots \leqslant s_{\delta,n}.$$

Нетрудно видеть, что требование к времени регулирования выполняется, если

$$s_{\delta,1} \geqslant \beta t_{\text{рег}}^{*-1}.$$

Для обеспечения времени регулирования достаточно выбрать числа ρ_i, $i = \overline{1,n}$ в равенствах (28) как

$$\rho_i = \frac{\beta t_{\text{рег}}^{*-1}}{|s_{d,i}|} - 1, \quad i = \overline{1,n_1}, \quad \rho_i = 0, \quad i = \overline{n_1+1,n}, \tag{29}$$

где $n_1 \leqslant n$ – число корней объекта, модули вещественных частей которых меньше числа $t_{\text{рег}}^{*-1}$.

4.3. Точность управления и перерегулирование при $c(s) = c_0$

Из выражений (13), (17), (18) и (20) следует, что при достаточно малых μ_i, $i = \overline{1,\rho}$ в (22)

$$|t_{yf}(j\omega)|^2 = \frac{|c(j\omega)|^2}{|\delta(j\omega)|^2}.$$

В случае $c(s) = c_0$

$$|t_{yf}(j\omega)|^2 = \frac{c_0^2}{\delta_n^2 \prod\limits_{i=1}^{n} (\omega^2 + s_{\delta,i}^2)} \leqslant \frac{c_0^2}{\delta_n^2 \prod\limits_{i=1}^{n} s_{\delta,i}^2} = \frac{c_0^2}{\delta_0^2}.$$

Из последнего неравенства и условия (14) заключаем, что если

$$\delta_0 = \frac{|c_0| f^*}{y^*}, \tag{30}$$

то $\sup\limits_{0 \leqslant \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)| \leqslant \frac{|c_0|}{\delta_0} = \frac{y^*}{f^*}$.

Итак, справедливо следующее

У т в е р ж д е н и е 4.3. *Требование к точности выполняется, если свободный коэффициент δ_0 полинома $\delta(s)$ удовлетворяет условию (30), а числа μ_i, $i = \overline{1,n-m}$ в выражении (22) достаточно малы.*

Перерегулирование равно

$$\sigma = 0.$$

Действительно, передаточная функция системы имеет вид $t_{yf}(s) = \frac{c_0}{\delta(s)}$, где корни полинома $\delta(s)$ вещественные. Последнее означает отсутствие перерегулирования, так как в соответствии с [15] при наихудшем внешнем возмущении $\sup\limits_{t_0 \leqslant t < t_1} |y(t)| = \frac{|c_0| f^*}{\delta_0}$.

4.4. Процедура синтеза

Процедура 4.1 (синтеза регулятора) состоит из операций:

1. Определить корни модального полинома по формулам (28), (29), что обеспечивает запасы устойчивости и время регулирования.

2. Вычислить свободный коэффициент полинома $\delta(s)$

$$\delta_0 = \delta_n \prod_{i=1}^{n} s_{\delta,i}$$

и сравнить его с требуемым числом в правой части (30).

Если этот коэффициент меньше этого числа, то необходимо следующее.

3. Сформировать на основе выражения (28) величины

$$s_{\delta,i} = |s_{d,i}|(1+\rho_i q_m), \quad i=\overline{1,n},$$

где $q_m > 1$, и увеличивать последовательно число q_m до тех пор, пока не выполнится условие из пункта 2.

4. Найти полиномы регулятора (12), решая тождество Безу $d(s)g(s)-$ $-k(s)r(s) = \varepsilon(s)k(s)\delta(s)$, в котором полином $\varepsilon(s)$ вида (22) с достаточно малыми числами μ_i, $i=\overline{1,n-m}$.

4.5. Точность управления в общем случае полинома $c(s)$ при возмущении

В общем случае полином $c(s)$ имеет вид

$$c(s) = c_p \prod_{i=1}^{p_1}(s+s_{c,i}) \prod_{i=p_1+1}^{p_1+p_2}(s^2+2\xi_{c,i}s_{c,i}+s_{c,i}^2),$$

где c_p — число, $(-s_{c,i})$, $i=\overline{1,p_1}$, $p_1+2p_2=n$ — вещественные корни, $(-\xi_{c,i} \pm j\sqrt{1-\xi_{c,i}^2})s_{c,i}$, $|\xi_{c,i}|<1$, $i=\overline{p_1+1,p+p_2}$ — комплексные корни.

В этом случае частотная передаточная функция системы принимает при $d_n=\delta_n=1$ вид

(31)
$$|t_{yf}(j\omega)|^2 = \frac{c_p^2 \prod\limits_{i=1}^{p_1}(\omega^2+s_{c,i}) \prod\limits_{i=p_1+1}^{p_1+p_2}[\omega^4+2(2\xi_{c,i}^2-1)s_{c,i}^2\omega^2+s_{c,i}^4]}{\prod\limits_{i=1}^{p_1}(\omega^2+s_{\delta,i}) \prod\limits_{i=p_1+1}^{p_1+p_2}(\omega^2+s_{\delta,i}^2)(\omega^2+s_{\delta,i+1}^2) \prod\limits_{i=p_1+p_2+1}^{n}(\omega^2+s_{\delta,i}^2)}.$$

Пусть для корней полиномов $c(s)$ и $\delta(s)$ выполняются неравенства

$$s_{c,i}^2 \leqslant s_{\delta,i}^2, \quad i=\overline{1,p_{11}}, \quad s_{c,i}^2 \geqslant s_{\delta,i}^2, \quad i=\overline{p_{11}+1,p_1},$$
$$s_{c,i}^2 \leqslant s_{\delta,i}^2, \quad i=\overline{p_1+1,p_{22}}, \quad s_{c,i}^2 \geqslant s_{\delta,i}^2, \quad i=\overline{p_{22}+1,p_1+p_2}.$$

Представим передаточную функцию (31) в виде

$$|t_{yf}(j\omega)|^2 = c_p^2 \beta_{11}(\omega)\beta_{12}(\omega)\beta_{21}(\omega)\beta_{22}(\omega)\beta_3(\omega),$$

где

$$\beta_{11}(\omega) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p_{11}}(\omega^2 + s_{c,i}^2)}{\prod\limits_{i=1}^{p_{11}}(\omega^2 + s_{\delta,i}^2)}, \quad \beta_{12}(\omega) = \frac{\prod\limits_{i=p_{11}+1}^{p_1}(\omega^2 + s_{c,i}^2)}{\prod\limits_{i=p_{11}+1}^{p_1}(\omega^2 + s_{\delta,i}^2)},$$

$$\beta_{21}(\omega) = \frac{\prod\limits_{i=p_1+1}^{p_{22}}[\omega^4 + 2(2\xi_{c,i}^2 - 1)s_{c,i}^2\omega^2 + s_{c,i}^4]}{\prod\limits_{i=p_1+1}^{p_{22}}[(\omega^2 + s_{\delta,i}^2)(\omega^2 + s_{\delta,i+1}^2)]},$$

$$\beta_{22}(\omega) = \frac{\prod\limits_{i=p_{22}+1}^{p_1+p_2}[\omega^4 + 2(2\xi_{c,i}^2 - 1)s_{c,i}^2\omega^2 + s_{c,i}^4]}{\prod\limits_{i=p_{22}+1}^{p_1+p_2}[(\omega^2 + s_{\delta,i}^2)(\omega^2 + s_{\delta,i+1}^2)]},$$

$$\beta_3(\omega) = \frac{c_p^2}{\prod\limits_{i=p_1+p_2+1}^{n}(\omega^2 + s_{\delta,i+1}^2)}.$$

У т в е р ж д е н и е 4.4. *Если для $n - p$ корней базового полинома выполняется условие*

$$\prod_{i=p_1+p_2+1}^{n} s_{\delta,i}^2 \geqslant \beta_{12}(0)\beta_{22}(0)\frac{f^{*2}}{y^{*2}}c_p^2, \tag{32}$$

то требование к точности выполняется.

5. Заключение

Для минимально-фазовых объектов установлена связь структуры и коэффициентов правой части тождества Безу с показателями системы (точностью, быстродействием, запасами устойчивости), регулятор которой является решением этого тождества.

Используя эту связь, построен метод синтеза регулятора, обеспечивающего (при отсутствии помех измерения) заданные значения показателей системы.

Автор благодарен В.Н. Честнову за обсуждение работы и полезные замечания.

Доказательство утверждения 3.1. Запишем рассматриваемое тождество в развернутой форме, опуская нижний индекс ε в полиноме $g_\varepsilon(s)$:

$$\text{(П.1)}\qquad \left(d_n s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\rho} g_i s^i\right) - \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{r}_i s^i = \left(\delta_n s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i s^i\right)\left(\sum_{i=1}^{\rho} \varepsilon_i s^i + 1\right).$$

Сравнивая коэффициенты при степенях s от $n+\rho$ до n, получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов $g_i,\ (i=\overline{0,\rho})$:

$$\text{(П.2)}\qquad d_n g_\beta = \delta_n \varepsilon_\beta - \sum_{i=1}^{\rho-\beta} d_{n-i}\, g_{\beta+i} + \sum_{i=1}^{\rho-\beta} \delta_{n-i}\, \varepsilon_{\beta+i}, \quad \beta = \overline{0,\rho}.$$

Выражение (21) для коэффициентов полинома реализуемости означает, что при достаточно малых $\nu_i,\ i=\overline{1,\rho}$

$$\text{(П.3)}\qquad \varepsilon_\rho \ll \varepsilon_{\rho-1} \ll \ldots \ll \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1.$$

В правых частях уравнений (П.2) содержатся искомые коэффициенты при старших степенях s, а в левых — коэффициенты при степенях s на единицу меньше. Поэтому с учетом неравенств (П.3) и условия (19) заключаем

$$\text{(П.4)}\qquad g_\beta = \varepsilon_\beta + 0_{1,\beta}(\nu), \quad \beta = \overline{0,\rho}.$$

Теперь сравним коэффициенты в тождестве (П.1) при степенях s от $n-1$ до 0 и получим следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов $r_i,\ i=\overline{0,n-1}$:

$$\tilde{r}_{n-\alpha} = d_{n-\alpha}\, g_0 - \delta_{n-\alpha}\, \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{n-\alpha} d_{n-\alpha-i}\, g_i - \sum_{i=1}^{n-\alpha} \delta_{n-\alpha-i} \varepsilon_i, \quad \alpha = \overline{1,n}.$$

Так как величина g_0 близка к 1 ($\varepsilon_0 = 1$), а остальные коэффициенты при d_i и $\delta_i,\ i=\overline{1,n-\alpha}$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, то с учетом выражений (П.3) и (П.4) получим $\tilde{r}_j = r_j + 0_{2,j}(\nu),\ j=\overline{0,n-1}$.

Доказательство утверждения 4.1. Рассмотрим два вида функций, из которых состоит левая часть неравенства (25),

$$\text{(П.5)}\qquad a_1(\omega) = \frac{\omega^2 + a_1^2}{\omega^2 + b_1^2}, \quad a_2(\omega) = \frac{\omega^4 + 2a_2^2 c_1 \omega^2 + a_2^4}{\omega^4 + 2b_2^2 c_2 \omega^2 + b_2^4}.$$

Эти функции обладают следующими, почти очевидными, свойствами.

Свойство 1. Если $a_1^2 \geqslant b_1^2$, то $a_1(\omega) \geqslant 1,\ 0 \leqslant \omega < \infty$.

Свойство 2. Если $a_2^2 \geqslant b_2^2,\ c_1 \geqslant 1,\ -1 \leqslant c_2 \leqslant 1$, то $a_2(\omega) \geqslant 1,\ 0 \leqslant \omega < \infty$.

Используя эти свойства, рассмотрим передаточную функцию (25). Из свойства 1 и неравенства (26) следует

$$\frac{|\delta(j\omega)|^2}{|d(j\omega)|^2} \geqslant \frac{\prod\limits_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}[\omega^4 + (s_{\delta,i}^2 + s_{\delta,i+1}^2)\omega^2 + s_{\delta,i}^2 s_{\delta,i+1}^2]}{\prod\limits_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}[\omega^4 + 2(2\xi_{d,i}^2 - 1)s_{d,i}^2\omega^2 + s_{d,i}^4]} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}[\omega^4 + 2c_{1,i}s_{\delta,i}^2\omega^2 + s_{\delta,i}^2 s_{\delta,i+1}^2]}{\prod\limits_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}[\omega^4 + 2c_{2,i}s_{d,i}^2\omega^2 + s_{d,i}^4]},$$

где

$$c_{1,i} = \frac{s_{\delta,i}^2 + s_{\delta,i+1}^2}{2s_{\delta,i}^2}, \quad c_{2,i} = 2\xi_{d,i}^2 - 1, \quad i = \overline{n_1+1, n_1+n_2}. \tag{П.6}$$

Нетрудно видеть, что так как $s_{\delta,i+1} \geqslant s_{\delta,i}$, то $c_{1,i} \geqslant 1$. Так как $|\xi_{d,i}^2| \leqslant 1$, то $-1 \leqslant c_{2,i} \leqslant 1$ и, таким образом, при условиях (26), (27) справедливо свойство 2. Поэтому

$$\frac{|\delta(j\omega)|^2}{|d(j\omega)|^2} \geqslant 1.$$

Доказательство утверждения 4.4. Продолжим исследование функций (П.5).

Свойство 3. Если $a_1^2 \leqslant b_1^2$, то $a_1(\omega) \leqslant 1,\ 0 \leqslant \omega < \infty$.

Доказательство. Оно аналогично доказательству свойства 1.

Свойство 4. Если $a_2^2 \leqslant b_2^2$, $-1 \leqslant c_1 \leqslant 1$, $c_2 > 1$, то $a_2(\omega) \leqslant 1,\ 0 \leqslant \omega < \infty$.

Доказательство. Из этого неравенства следует выражение

$$b_2^4 - a_2^4 + 2(b_2^2 c_2 - a_2^2 c_1)\omega^2 \geqslant 0,$$

которое выполняется, если

$$b_2^2 \geqslant a_2^2, \quad b_2^2 c_2 \geqslant a_2^2 c_1.$$

Из этих свойств следует, если ввести обозначения, аналогичные (П.6), что

$$\beta_{11}(\omega) \leqslant 1, \quad \beta_{21}(\omega) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \omega < \infty.$$

Свойства 1 и 2 дают нижние границы функций (П.5). Найдем верхние границы этих функций.

Свойство 5. Если $a_1^2 \geqslant b_1^2$, то

$$a_1(\omega) \leqslant \frac{a_1^2}{b_1^2}, \quad 0 \leqslant \omega < \infty. \tag{П.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем с учетом определения (П.5) неравенство (П.7) как
$$b_1^2\omega^2 + b_1^2a_1^2 \leqslant a_1^2\omega^2 + a_1^2b_1^2.$$
Это дает $a_1^2 \geqslant b_1^2$. Обратно, из последнего следует неравенство (П.7).

Свойство 6. Если $a_2^2 \geqslant b_2^2$, $-1 \leqslant c_1 \leqslant 1, c_2 > 1$, то $a_2(\omega) \leqslant \frac{a_2^4}{b_2^4}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем это неравенство как
$$b_2^4\omega^4 + 2a_2^2b_2^4c_1\omega^2 + a_2^4b_2^4 \leqslant a_2^4b_2^4 + 2a_2^4b_2^2c_2\omega^2 + a_2^4\omega^4,$$
или
$$(a_2^4 - b_2^4)\omega^4 + 2a_2^2b_2^2(a_2^2c_2 - b_2^2c_1)\omega^2 \geqslant 0.$$

Последнее выполняется, так как $a_2^2 \geqslant b_2^2$ и $a_2^2c_2 > b_2^2c_1$.

Из свойств 5 и 6 следует, что
$$\beta_{12}(\omega) \leqslant \frac{\prod\limits_{i=p_{11}+1}^{p_1} s_{c,i}^2}{\prod\limits_{i=p_{11}+1}^{p_1} s_{\delta,i}^2} = \beta_{12}(0), \quad \beta_{22}(\omega) \leqslant \frac{\prod\limits_{i=p_{22}+1}^{p_1+p_2} s_{c,i}^4}{\prod\limits_{i=p_{22}+1}^{p_1+p_2} s_{\delta,i}^2 s_{\delta,i+1}^2} = \beta_{22}(0).$$

Таким образом,
$$|t_{yf}(j\omega)|^2 \leqslant \beta_{12}(0)\beta_{22}(0)\beta_3(\omega) \leqslant \beta_{12}(0)\beta_{22}(0)\beta_3(0)$$
и тогда из неравенства
$$\beta_{12}(0)\beta_{22}(0)\beta_3(0) \leqslant \frac{y^{*2}}{f^{*2}}$$
следует неравенство (32) утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. М.: Машгиз, 1954.
2. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Ч.I. М.; Л.: Энергия, 1965.
3. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I–IV // АиТ. 1960. № 4. С. 436–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665; 1961. № 4. С. 425–435.

   Letov, A.M. Analytical Controller Design. I–IV // Autom. Remote Control. 1960. V. 21. No. 4. P. 303–306; No. 5. P. 389–393. No. 6. P. 458–461; 1961. V. 22. No. 4. P. 363–372.
4. *Kalman R.E.* Contribution to the theory of optimal control // Bullet. Soc. Mat. Mech. 1960. V. 5. No. 1. P. 102–119.
5. *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multipliative siminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No. 2. P. 301–320.

6. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–846.
7. *Александров А.Г., Небалуев Н.А.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. I // АиТ. 1971. № 12. С. 12–20.

   Aleksandrov A.G., Nebaluev N.A. Analytical Synthesis of Controller Transfer Matrices on the Basis of Frequency Domain Performance Criteria. I // Autom. Remote Control. 1971. V. 32. No. 12. Part 1. P. 1871–1878.
8. *Safonov M.G., Athans M.* Gain and phase margin for multi-loop LQG regulators // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. AC-22. No. 2. P. 173–179.
9. *Александров А.Г.* Методы построения систем автоматического регулирования. М.: Физматлит, 2008.
10. *Александров А.Г.* К аналитическому синтезу регуляторов // АиТ. 2010. № 6. С. 3–19.

    Aleksandrov A.G. On Analytical Design of Controllers // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 977–992.
11. *Честнов В.Н., Зацепилова Ж.В.* Синтез многомерных систем по инженерным показателям точности, времени регулирования и запасов устойчивости // Сб. тр. междунар. науч. конф. “Проблемы управления, передачи и обработки информации” (АТМ-ТКИ-50). Саратов: Изд-во СГТУ, 2009. С. 41–45.
12. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. М.: Изд-во URSS, 2014.
13. Адаптивное управление динамическими объектами / Под ред. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. М.: Наука, 1981.
14. *Честнов В.Н.* Модальное управление одномерными объектами с учетом заданного радиуса запасов устойчивости // Тр. междунар. науч. конф. “Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения”. Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. С. 159–164.
15. *Чеботарев Н.Г.* Об одной математической задаче, возникающей в связи с оценкой отклонений регулируемой переменной, если возмущающая сила ограничена по модулю // АиТ. 1948. № 4. Т. 9. С. 331–334.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 1.12.2014