

© 2012 г. А.Г. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

НЕМОДЕЛИРУЕМАЯ ДИНАМИКА И ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматриваются системы с неучитываемыми при синтезе регулятора “малыми” постоянными времени объекта, о которых известна лишь их верхняя граница. Исследуется их влияние на точность регулирования. Получена граница достижимой точности.

1. Введение

Обеспечение требуемой точности (ошибки регулирования меньше заданной) является основной целью многих систем автоматического управления. Поэтому интенсивно развиваются методы синтеза таких систем начиная с метода логарифмических амплитудно-частотных характеристик (метода ЛАЧХ) [1, 2]. В последние десятилетия разработаны такие методы, как методы аналитического синтеза регуляторов (базирующиеся на аналитическом конструировании регуляторов (LQ-оптимизации) [3]), H_∞ -оптимизации [4], линейных матричных неравенствах [5] и метод эллипсоидальных оценок [6].

Требуемая точность не всегда может быть достигнута из-за немоделируемой динамики. Немоделируемая динамика – это неизвестные малые постоянные времени, не учтенные при синтезе регулятора. Эти постоянные времени изменяют структуру дифференциального уравнения объекта, используемого при синтезе регулятора, и поэтому далее будем называть немоделируемую динамику структурным возмущением.

При большом коэффициенте усиления системы, который обеспечивает малую ошибку регулирования, структурные возмущения приводят к неустойчивости системы [7, 8]. В методе ЛАЧХ устойчивость при структурном возмущении обеспечивается выбором частоты среза так, чтобы она была меньше частот изломов ЛАЧХ, соответствующих малым постоянным времени. Аналогичный подход используется при аналитическом синтезе регуляторов на базе LQ-оптимизации [3]. Он обеспечивает согласование требуемой точности с уровнем структурных возмущений, который является известным максимальным значением неизвестных малых постоянных времени.

В зарубежной литературе исследуется влияние немоделируемой динамики различной структуры (мультипликативной, аддитивной и т.п.) на устойчивость систем, оптимальных по различным критериям [9].

Цель этой работы состоит в том, чтобы найти условия несогласованности требований к точности со структурными возмущениями.

2. Немоделируемая динамика (структурные возмущения)

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему управления, описываемую дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$(2.1) \quad d_n y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + d_1 \dot{y} + d_0 y = k_m u^{(m)} + \dots + k_1 \dot{u} + k_0 u + \\ + c_q f^{(q)} + \dots + c_1 \dot{f} + c_0 f, \quad t \geq t_0, \quad m < n, \quad q < n,$$

$$(2.2) \quad g_{n_c} u^{(n_c)} + g_{n_c-1} u^{(n_c-1)} + \dots + g_1 \dot{u} + g_0 u = \\ = r_{m_c} y^{(m_c)} + \dots + r_1 \dot{y} + r_0 y, \quad m_c \leq n_c,$$

где $y(t)$ – измеряемый выход объекта (2.1), $u(t)$ – измеряемый выход регулятора (2.2), $f(t)$ – неизвестное ограниченное внешнее возмущение:

$$(2.3) \quad |f(t)| \leq f^*, \quad t \geq t_0,$$

f^* – известное положительное число.

Уравнения (2.1) будем называть рабочей моделью объекта управления.

В действительности объект описывается уравнением

$$(2.4) \quad d_{n_0} y^{(n_0)} + d_{n_0-1} y^{(n_0-1)} + \dots + d_{n+1} y^{n+1} + \tilde{d}_n y^{(n)} + \tilde{d}_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \\ + \tilde{d}_0 y = k_{m_0} u^{(m_0)} + \dots + k_{m+1} u^{m+1} + \tilde{k}_m u^{(m)} + \dots + \tilde{k}_0 u + \\ + c_q f^{(q)} + \dots + c_1 \dot{f} + c_0 f, \quad m_0 < n_0,$$

где d_i ($i = \overline{n+1, n_0}$), k_j ($j = \overline{m+1, m_0}$), $n_0 > n$, $m_0 > m$ – неизвестные числа, называемые структурными возмущениями рабочей модели (2.1). Будем полагать, что коэффициенты уравнения (2.4), если его записать как

$$(2.5) \quad d^b(s)y = k^b(s)u + c(s)f,$$

где s символ преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях, обладают свойством

$$(2.6) \quad d^b(s) = \sum_{i=n+1}^{n_0} d_i s^i + \sum_{i=0}^n \tilde{d}_i s^i = \bar{d}(s)d(s) = \\ = \left(\sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{d}_i s^i + 1 \right) d(s), \quad \bar{n} = n_0 - n,$$

$$(2.7) \quad k^b(s) = \sum_{i=m+1}^{m_0} k_i s^i + \sum_{i=0}^m \tilde{k}_i s^i = \bar{k}(s)k(s) = \\ = \left(\sum_{i=1}^{\bar{m}} \bar{k}_i s^i + 1 \right) k(s), \quad \bar{m} = m_0 - m.$$

В этом случае передаточная функция объекта (2.4) имеет вид

$$(2.8) \quad w^b(s) = \frac{k^b(s)}{d^b(s)} = \bar{w}(s)w(s),$$

где $w(s)$ – передаточная функция рабочей модели объекта:

$$(2.9) \quad w(s) = \frac{k(s)}{d(s)} = \frac{k}{s^\nu} \frac{\prod_{i=1}^{\check{n}_1} (\check{T}_i s + 1) \prod_{i=\check{n}_1+1}^{\check{n}_1+\check{n}_2} (\check{T}_i^2 s^2 + 2\check{\xi}_i \check{T}_i s + 1)}{\prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (T_i^2 s^2 + 2\xi_i T_i s + 1)} e^{-\tau s},$$

$$|\xi_i| \leq 1, \quad |\check{\xi}_j| \leq 1, \quad i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2, \quad j = \check{n}_1 + 1, \dots, \check{n}_1 + \check{n}_2,$$

$$n_1 + 2n_2 + \nu = n, \quad \check{n}_1 + 2\check{n}_2 = m,$$

τ – запаздывание.

$\bar{w}(s)$ – передаточная функция структурных возмущений (немоделируемой динамики):

$$(2.10) \quad \bar{w}(s) = \frac{\bar{k}(s)}{\bar{d}(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{\check{p}_1} (\check{L}_i s + 1) \prod_{i=\check{p}_1+1}^{\check{p}_1+\check{p}_2} (\check{L}_i^2 s^2 + 2\check{\zeta}_i \check{L}_i s + 1)}{\prod_{i=1}^{p_1} (L_i s + 1) \prod_{i=p_1+1}^{p_1+p_2} (L_i^2 s^2 + 2\zeta_i L_i s + 1)} e^{-\bar{\tau} s},$$

$$|\zeta_i| \leq 1, \quad |\check{\zeta}_j| \leq 1, \quad i = p_1 + 1, \dots, p_1 + p_2, \quad j = \check{p}_1 + 1, \dots, \check{p}_1 + \check{p}_2,$$

$$p_1 + 2p_2 = \bar{n}, \quad \check{p}_1 + 2\check{p}_2 = \bar{m}.$$

Постоянные времени, декременты затухания и запаздывание, входящие в эту передаточную функцию не известны, поэтому структурное возмущение называют немоделируемой динамикой.

О структурном возмущении известно следующее:

а) полином $\bar{d}(s)$ его передаточной функции гурвицев (корни полинома $\bar{d}(s)$ имеют отрицательные вещественные части),

б) модуль этой передаточной функции ограничен:

$$(2.11) \quad |\bar{w}(j\omega)| \leq 1, \quad 0 \leq \omega < \infty,$$

в) известна верхняя граница L неизвестных постоянных времени и запаздывания

$$(2.12) \quad L = \max \{L_1, \dots, L_{p_1+p_2}, \bar{\tau}, |\check{L}_1|, \dots, |\check{L}_{\check{p}_1+\check{p}_2}|\}.$$

Число L будем называть уровнем структурных возмущений.

Если величина L не известна, то для асимптотически устойчивых объектов обычно полагают, что она меньше минимальной постоянной времени T_{\min} рабочей модели:

$$(2.13) \quad L \leq T_{\min} q_1^{-1},$$

где

$$(2.14) \quad T_{\min} = \min \{T_1, \dots, T_{n_1+n_2}, |\check{T}_1|, \dots, |\check{T}_{\check{n}_1+\check{n}_2}|\},$$

$q_1 = 5 \div 10$, и поэтому постоянные времени структурных возмущений называют малыми постоянными времени объекта либо “паразитными” [8] постоянными времени, так как они могут нарушить устойчивость системы.

Определение 2.1. Система (2.1), (2.2) называется структурно грубой, если ее асимптотическая устойчивость сохраняется при структурных возмущениях заданного уровня (L); если асимптотическая устойчивость не сохраняется, то система называется структурно негрубой.

Немоделируемой динамике посвящено большое число работ. В зависимости от ее природы наряду с (2.8) рассматриваются модели

$$(2.15) \quad w^b(s) = \tilde{w}(s) + w(s),$$

$$(2.16) \quad w^b(s) = w(s)(1 + \tilde{w}(s))$$

с различными свойствами передаточной функции немоделируемой динамики $\tilde{w}(s)$.

Так, в [10] эта функция удовлетворяет неравенству

$$(2.17) \quad |\tilde{w}(j\omega)| \leq l(\omega), \quad 0 \leq \omega < \infty,$$

где $l(\omega)$ – известная функция.

В [11] немоделируемая динамика наделяется статистическими свойствами

$$(2.18) \quad M(\tilde{w}(j\omega)) = 0, \quad M(\tilde{w}(-j\omega)\tilde{w}(j\omega)) = \alpha^2(\omega),$$

где M – символ математического ожидания, $\alpha(\omega)$ – известная функция.

В настоящей работе немоделируемая динамика $\tilde{w}(s) = \bar{w}(s)$ описывает структурные возмущения известного уровня.

3. Постановка задачи

Пусть внешнее возмущение принадлежит некоторому множеству Ω_f ограниченных функций (2.3)

$$(3.1) \quad f(t) \in \Omega_f.$$

Точность системы (2.1), (2.2) при внешнем возмущении определяется как наименьшее положительное число \bar{y} , удовлетворяющее начиная с некоторого момента времени $t_p > t_0$ условию

$$(3.2) \quad |y(t)| \leq \bar{y}, \quad t \geq t_p,$$

в котором t_p – время затухания переходных процессов, вызванное, в частности, начальными условиями.

Требование к точности системы имеет вид

$$(3.3) \quad \bar{y}(t) \leq y^*,$$

где y^* – заданное число.

Будем полагать, что существует регулятор (2.2), при котором требование к точности системы (2.1), (2.2) выполняется.

Определение 3.1. Требуемая точность y^ системы (2.1), (2.2) называется не согласованной с уровнем структурных возмущений, если эта система является структурно негрубой.*

В методе ЛАЧХ требуемая точность согласовывается с уровнем структурных возмущений путем выбора частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ желаемой ЛАЧХ, чтобы выполнялось неравенство

$$(3.4) \quad L \leq 1/q_2\omega_{\text{ср}},$$

где q_2 – положительное число, зависящее от числа постоянных времени структурных возмущений. Обычно полагают $q_2 = 5 \div 10$.

Частота среза системы определяется как

$$\omega_{\text{ср}} = \max[\omega_1, \dots, \omega_p], \quad i = 1, \dots, p,$$

где частоты ω_i , $i = 1, \dots, p$, находятся из уравнения

$$(3.5) \quad |w_{\text{раз}}(j\omega_i)| = 1, \quad i = 1, \dots, p,$$

в котором $w_{\text{раз}}(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы:

$$(3.6) \quad w_{\text{раз}}(s) = -\frac{k(s)r(s)}{d(s)g(s)}.$$

Если найдется такая частота ω , что $|w_{\text{раз}}(j\omega)| > 1$, то частота среза существует, так как

$$(3.7) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |w_{\text{раз}}(j\omega)| = 0.$$

Это равенство следует из того, что степень полинома знаменателя передаточной функции разомкнутой системы больше степени ее числителя

$$(3.8) \quad \deg[d(s)g(s)] > \deg[k(s)r(s)].$$

Такой способ согласования требуемой точности с уровнем структурных возмущений использует процедуру формирования желаемой ЛАЧХ, которая лежит в основе синтеза регулятора.

Задача состоит в том, чтобы найти признаки несогласованности требуемой точности с уровнем структурных возмущений до начала синтеза регулятора.

Решение этой задачи опирается на следующее понятие.

Определение 3.2. Частотой эффективности регулятора ω_e называется минимальная из частот, определяемых равенством

$$(3.9) \quad \frac{|c(j\omega_e)|f^*}{|d(j\omega_e)|y^*} = 2.$$

Чтобы выяснить содержание этого понятия для асимптотически устойчивых объектов управления, рассмотрим гармоническое внешнее возмущение

$$(3.10) \quad f(t) = f^* \sin \omega_e t,$$

принадлежащее множеству Ω_f ,

$$(3.11) \quad f^* \sin \omega_e t \in \Omega_f.$$

В установившемся режиме, при $t \rightarrow \infty$, выход системы (2.1), (2.2) равен

$$(3.12) \quad y(t) = a_f(\omega_e) \sin [\omega_e t + \varphi(\omega_e)],$$

где амплитуда $a_f(\omega_e) = |t_{yf}(j\omega_e)|f^*$ и фаза $\varphi(\omega_e) = \arg t_{yf}(j\omega_e)$ определяются передаточной функцией $t_{yf}(s)$, связывающей выход объекта с внешним возмущением:

$$(3.13) \quad t_{yf}(s) = \frac{g(s)c(s)}{d(s)g(s) - k(s)r(s)}.$$

Выход объекта в тех же условиях, но при отсутствии регулятора (в уравнении (2.1) $u = 0$) имеет вид

$$(3.14) \quad \tilde{y}(t) = \tilde{a}_f(\omega_e) \sin [\omega_e t + \tilde{\varphi}(\omega_e)],$$

где амплитуда $\tilde{a}_f(\omega_e) = |w_{yf}(j\omega_e)|f^*$ и фаза $\tilde{\varphi}(\omega_e) = \arg w_{yf}(j\omega_e)$ определяются передаточной функцией $w_{yf}(s) = c(s)/d(s)$.

Таким образом,

$$(3.15) \quad \tilde{a}_f(\omega_e) = \frac{|c(j\omega_e)|f^*}{|d(j\omega_e)|}.$$

Обозначим как $v(\omega)$ отношение амплитуд выхода объекта без регулятора и с ним:

$$(3.16) \quad v(\omega) = \tilde{a}_f(\omega)/a_f(\omega).$$

Гармоническое внешнее возмущение принадлежит множеству Ω_f , для которого регулятор обеспечивает требование к точности, и поэтому

$$(3.17) \quad a_f(\omega_e) \leq y^*.$$

Используя определение частоты эффективности, оценим на основе выражений (3.17), (3.15) нижнюю границу отношения амплитуд на этой частоте

$$(3.18) \quad v(\omega_e) = \tilde{a}_f(\omega_e)/a_f(\omega_e) \geq \tilde{a}_f(\omega_e)/y^* = 2.$$

Эти соотношения означают, что если объект асимптотически устойчив, то при гармоническом внешнем возмущении с частотой ω_e регулятор обеспечивает выход, который может быть лишь в 2 раза меньше, чем при его отсутствии.

4. Признак несогласованности требуемой точности и уровня структурных возмущений

Утверждение 4.1. Если уровень структурных возмущений таков, что

$$(4.1) \quad L \geq 1/\omega_{\text{ср}},$$

то существуют постоянные времени передаточной функции структурных возмущений такие, что система (2.4), (2.2) находится на границе устойчивости.

Доказательство этого утверждения, приведенное в Приложении, носит конструктивный характер и число постоянных времени структурных возмущений составляет от четырех до восьми в зависимости от свойств параметрически невозмущенной системы.

Примечание 4.1. Число постоянных времени структурных возмущений может оказаться небольшим (одна-две постоянных). При таких слабых структурных возмущениях, удовлетворяющих условию (4.1), система (2.4), (2.2) может сохранять асимптотическую устойчивость.

Таким образом, условие (4.1) является признаком потери асимптотической устойчивости при структурных возмущениях.

Утверждение 4.2. Частота эффективности регулятора меньше частоты среза

$$(4.2) \quad \omega_e < \omega_{\text{ср}}.$$

Доказательство этого утверждения несложно.

Действительно, найдем связь отношения амплитуд с передаточной функцией разомкнутой системы. Для этого запишем передаточную функцию системы как

$$(4.3) \quad t_{yf}(s) = \frac{c(s)}{d(s)(1 + w_{\text{раз}}(s))}.$$

Тогда отношение амплитуд

$$(4.4) \quad v(\omega) = \tilde{a}_f(\omega)/a_f(\omega) = |w_{yf}(j\omega)|/|t_{yf}(j\omega)| = |1 + w_{\text{раз}}(j\omega)|$$

или

$$(4.5) \quad |v(\omega)|^2 = 1 + 2a(\omega) \cos \varphi(\omega) + a^2(\omega),$$

где $a(\omega) = |w_{\text{раз}}(j\omega)|$, $\varphi(\omega) = \text{Arg } w_{\text{раз}}(j\omega)$.

Из выражений (4.5) и (3.18) следует

$$(4.6) \quad 1 + 2a(\omega_e) \cos \varphi(\omega_e) + a^2(\omega_e) \geq 4.$$

Учитывая, что

$$-1 < \cos \varphi(\omega_e) \leq 1,$$

получим

$$a(\omega_e) \geq 1.$$

По определению $\omega_{\text{ср}}$ – наибольшая из частот, удовлетворяющих равенству $a(\omega_{\text{ср}}) = 1$, и так как $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |a(j\omega)| = 0$, то из неравенства $a(\omega_e) \geq a(\omega_{\text{ср}})$ следует неравенство $\omega_e \leq \omega_{\text{ср}}$ утверждения.

Приведем два простых следствия утверждений 1 и 2.

Следствие 4.1. Неравенство

$$(4.7) \quad L \geq 1/\omega_e$$

является признаком несогласованности требуемой точности системы с уровнем структурных возмущений.

Действительно, из неравенства $L \geq 1/\omega_e$ следует по утверждению 4.2, что $L \geq 1/\omega_{\text{ср}}$, и тогда по утверждению 4.1 заключаем о несогласованности.

Признак (4.7) содержит известные до начала синтеза регулятора величины, и поэтому, если при известных уравнениях (2.1) объекта и уровне структурных возмущений требуется построить регулятор (2.2), обеспечивающий заданную точность, то вначале необходимо проверить, достижима ли эта точность. Для этого находим по формуле (3.9) частоту эффективности и проверяем неравенство (4.7). Если оно выполняется, то ищем наименьшее значение требуемой точности, обозначаемое как y^{**} , при котором неравенство (4.7) нарушается, и синтезируем регулятор для величины

$$(4.8) \quad y^* \geq y^{**}.$$

Возможен другой вариант признака (4.7). В связи с этим введем число

$$(4.9) \quad y_r = \frac{|c(j/L)|f^*}{|d(j/L)|^2}.$$

Следствие 4.2. Если для требуемой точности выполняется неравенство

$$(4.10) \quad y^* \leq y_r,$$

то это является признаком несогласованности точности системы с уровнем структурных возмущений.

Действительно, сравнивая выражения (4.9) и (3.9) заключаем, что частота $\omega_e = 1/L$ является частотой эффективности регулятора при $y^* = y_r$. Тогда из утверждения 4.2 следует, что $1/L < \omega_{\text{ср}}$ и на основе утверждения 4.1 заключаем о несогласованности.

5. Пример

Рассмотрим объект управления, рабочая модель которого описывается уравнением

$$(5.1) \quad d_3 \ddot{y} + d_2 \dot{y} + d_1 y + y = k_1 \dot{u} + u + f,$$

в котором

$$(5.2) \quad d_3 = 0,2, \quad d_2 = 1,24, \quad d_1 = 5,24, \quad k_1 = 0,4.$$

Числам (5.2) соответствуют следующие постоянные времени и декремент затухания:

$$(5.3) \quad T_1 = 5, \quad T_2 = 0,2, \quad \xi_2 = 0,6, \quad \check{T}_1 = 0,4 \quad k = 1.$$

Передаточная функция объекта равна

$$(5.4) \quad w(s) = \frac{0,4s + 1}{(5s + 1)(0,04s^2 + 0,24s + 1)}.$$

Внешнее возмущение –

$$(5.5) \quad f(t) = \sin \omega t, \quad 0 \leq \omega \leq \infty.$$

Граница структурных возмущений –

$$(5.6) \quad L = 0,04.$$

Проверим согласованность требуемой точности $y^* = 10^{-4}$ с заданной границей немоделируемой динамики L .

Для этого найдем число $y_r = \frac{1}{2 * |d(j/L)|} = 1,61610^{-4}$. Это число превышает требуемую точность системы, и поэтому она может терять устойчивость при структурных возмущениях.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим регулятор с передаточной функцией

$$(5.7) \quad w_p(s) = -\frac{0,2s^4 + 1,45s^3 + 6,58s^2 + 6,7s + 1,414}{1,3 \cdot 10^{-9}s^4 + 4 \cdot 10^{-5}s^3 + 1,8 \cdot 10^{-4}s^2 + 2,5 \cdot 10^{-4}s + 1,11 \cdot 10^{-4}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика системы (5.4), (5.7) удовлетворяет неравенству $|tyf(j\omega)| < 10^{-4}$ для всех частот и, следовательно, этот регулятор обеспечивает требуемую точность, если не учитывать структурные возмущения.

Пусть передаточная функция структурных возмущений равна

$$(5.8) \quad \bar{w}(s) = \frac{1}{(L_1s + 1)(L_2s + 1)},$$

где

$$(5.9) \quad L_1 = 0,04, \quad L_2 = 0,00008.$$

При таких структурных возмущениях система неустойчива.

Заметим, что она теряет устойчивость и при меньших значениях коэффициентов передаточной функции (5.8):

$$L_1 = 0,0008, \quad L_2 = 0,00008.$$

Рассмотрим два случая слабых структурных возмущений, передаточные функции которых содержат одну постоянную времени либо запаздывание:

$$(5.10) \quad \bar{w}(s) = \frac{1}{(L_1 s + 1)},$$

$$(5.11) \quad \bar{w}(s) = e^{-\bar{\tau}s},$$

где $L_1 = 0,04$, $\bar{\tau} = 10^{-4}$.

При каждом из этих структурных возмущений система (5.4), (5.7) асимптотически устойчива.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 4.1. Передаточная функция структурно возмущенной системы (2.4), (2.2) имеет вид (2.8)

$$(П.1) \quad w_{\text{раз}}^b(s) = w_{\text{раз}}(s)\bar{w}(s)$$

Ее амплитудно- и фазо-частотные характеристики

$$(П.2) \quad a^b(\omega) = a(\omega)\bar{a}(\omega), \quad \varphi^b(\omega) = \varphi(\omega) + \bar{\varphi}(\omega),$$

где $a(\omega) = |w_{\text{раз}}(j\omega)|$, $\varphi(\omega) = \text{Arg } w_{\text{раз}}(j\omega)$, $\bar{a}(\omega) = |\bar{w}(j\omega)|$, $\bar{\varphi}(\omega) = \text{Arg } \bar{w}(j\omega)$.

На частоте среза

$$(П.3) \quad a(\omega_{\text{ср}}) = 1, \quad \varphi(\omega_{\text{ср}}) = \varphi_c + 2\pi\nu, \quad \bar{\varphi}(\omega_{\text{ср}}) = \bar{\varphi}_c + 2\pi\mu,$$

где ν и μ – целые числа, определяемые как целое отношение $\frac{\varphi(\omega_{\text{ср}})}{2\pi}$ и $\frac{\bar{\varphi}(\omega_{\text{ср}})}{2\pi}$ так, что

$$(П.4) \quad -2\pi \leq \varphi_c \leq 0, \quad -2\pi \leq \bar{\varphi}_c \leq 0.$$

Найдем коэффициенты передаточной функции структурных возмущений, при которых выполняются равенства

$$(П.5) \quad a^b(\omega_{\text{ср}}) = 1, \quad \varphi^b(\omega_{\text{ср}}) = \varphi_c + \bar{\varphi}_c + 2\pi(\nu + \mu) = -\pi + 2\pi\rho,$$

где ρ – целое число либо ноль.

Эти равенства означают, что годограф Найквиста системы (2.2), (2.4) проходит через критическую точку $(-1, j0)$ и поэтому система находится на границе устойчивости.

Первое из этих равенств выполняется при условии

$$(П.6) \quad \bar{a}(\omega_{\text{ср}}) = 1.$$

Второе из них выполняется, когда

$$(П.7) \quad \bar{\varphi}_c = -\pi - \varphi_c + 2\pi(\rho - \mu - \nu).$$

Разобьем первый из двух интервалов (П.4) на два интервала

$$(П.8) \quad -\pi \leq \varphi_c \leq 0,$$

$$(П.9) \quad -2\pi \leq \varphi_c \leq -\pi.$$

Для интервала (П.8) получим на основе (П.7) при $\rho = \mu + \nu$

$$(П.10) \quad \bar{\varphi}_c = -\pi - \varphi_c \quad (-\pi \leq \bar{\varphi}_c \leq 0),$$

а для интервала (П.9) при $\rho = \mu + \nu - 1$ найдем

$$(П.11) \quad \bar{\varphi}_c = -3\pi - \varphi_c \quad (-2\pi \leq \bar{\varphi}_c \leq -\pi).$$

Передаточную функцию, для которой удовлетворяются условия (П.6), (П.10), будем искать в виде

$$(П.12) \quad \bar{w}(s) = \frac{(-T_b s + 1)^2}{(T_b s + 1)^2}, \quad T_b > 0.$$

Найдем такое $T_b \leq 1/\omega_{\text{ср}}$, что при структурном возмущении (П.12) система будет на границе устойчивости.

Фазо-частотная характеристика этого возмущения равна

$$(П.13) \quad \bar{\varphi}(\omega) = -4 \operatorname{arctg} T_b \omega.$$

Подставим это выражение в (П.10) и получим

$$\operatorname{arctg} T_b \omega_{\text{ср}} = \frac{\pi + \varphi_c}{4},$$

или

$$(П.14) \quad T_b = \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \operatorname{tg} \frac{\pi + \varphi_c}{4}.$$

При $-\pi \leq \varphi_c \leq 0$ получим $0 \leq \operatorname{tg} \frac{\pi + \varphi_c}{4} \leq 1$ или $0 \leq T_b \leq \frac{1}{\omega_{\text{ср}}}$. При значениях T_b из этого интервала система находится (в зависимости от φ_c) на границе устойчивости.

Если φ_c находится в интервале (П.9), то примем

$$\bar{w}(s) = \frac{(-T_b s + 1)^4}{(T_b s + 1)^4}.$$

В этом случае $\bar{\varphi}(\omega) = -8 \operatorname{arctg} T_b \omega$ и тогда

$$(П.15) \quad T_b = \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \operatorname{tg} \frac{3\pi + \varphi_c}{8}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы автоматического управления. (Под редакцией В.В. Солодовникова) М.: Машгиз, 1954.
2. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Ч. I. Линейные системы регулирования одной величиной. М.; Л.: Энергия, 1965.
3. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
4. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. I, II // *АиТ.* 1998. № 7. С. 83–95; № 8. С. 124–138.
Aleksandrov A.G., Chestnov V.N. Synthesis of Multivariable Systems of Prescribed Accuracy. I, II // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 7. Part 2. P. 973–983; No. 8. Part 2. P. 1153–1164.
5. *Агафонов П.И., Честнов В.Н.* Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе H_∞ -подхода // *АиТ.* 2004. № 10. С. 101–108.
Agafonov P.A., Chestnov V.N. Controllers of a Given Radius of Stability Margin: Their Design by the H_∞ -approach with Regard for External Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 10. P. 1611–1617.
6. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // *АиТ.* 2008. № 5. С. 72–90.
Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
7. *Мееров М.В.* Об учете малых параметров при исследовании устойчивости систем авторегулирования // *Электричество.* 1947. № 6. С. 123–134.
8. *Мееров М.В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Физ-мат. лит., 1959.
9. *Поляк Б.Т., Щербakov П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
10. *Doyle J.C., Stein G.* Multivariable feedback design: concepts for classical/modern synthesis // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1981. V. AC-26. No. 1. P. 1211–1234.
11. *Goodwin G.C., Graebe S.F., Salgado M.E.* Control system design. Valparaiso, Chile, 2000.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 11.10.2011