

# ЧАСТОТНОЕ АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ

А.Г. Александров, Д.В. Шатов

Предложен метод адаптивного управления одномерным линейным объектом, обеспечивающий заданную точность. Объект работает в условиях неизвестных ограниченных возмущений, его коэффициенты неизвестны и меняются в некоторые моменты времени. Процесс адаптации состоит из идентификации и синтеза. Идентификация основана на методе конечно-частотной идентификации объекта управления. Синтез выполняется решением системы линейных уравнений, порожденных тождеством Безу. Предложен алгоритм выбора полинома в правой части тождества, обеспечивающий заданную точность. Приведен численный пример.

**Ключевые слова:** адаптация, частотная идентификация, тождество Безу.

## ВВЕДЕНИЕ

Адаптивное управление развивается в нескольких направлениях.

Одно из них — адаптивное управление с эталонной моделью. В первых работах [1, 2] предлагались алгоритмы адаптивного управления без учета внешних возмущений, однако было показано [10], что при их наличии система адаптивного управления может терять устойчивость.

Дальнейшее развитие адаптивное управление с эталонной моделью получило в работах, учитывающих внешнее возмущение (из класса неизвестных ограниченных функций) при формировании законов управления. Так, в работе [4] задача адаптации сводится к задаче  $LQ$ -оптимизации для объекта с неизвестными коэффициентами. При решении задачи используются квазиоценки коэффициентов объекта, полученные по методу градиента. Показано, что найденные оценки могут существенно отличаться от истинных значений коэффициентов, и в результате процесс адаптации сходится к некоторой, заранее неизвестной, ошибке слежения. В работе [5] ставится схожая задача, но оценки коэффициентов ищутся с помощью метода скоростного градиента.

С работами [6, 7] связано другое направление, предполагающее применение метода рекуррентных целевых неравенств. Цель управления при таком подходе заключается в обеспечении заданных отклонений установившегося выхода объекта, а

внешнее возмущение — неизвестная ограниченная функция. В случае неизвестных коэффициентов объекта [8] находятся их оценки по методу градиентного типа, позволяющему получить в установившемся режиме наименьшее отклонение выходной величины.

Еще одно направление — частотное адаптивное управление [9]. Цель адаптации состоит в обеспечении заданных ограничений на отклонение выхода объекта. Внешнее возмущение представляет собой неизвестную, ограниченную функцию. Идентификация осуществляется по методу конечно-частотной идентификации. Замкнутая система возбуждается полигармоническим испытательным сигналом, по имеющимся входному и выходному сигналам объекта находятся оценки его коэффициентов. Затем находится регулятор, обеспечивающий выполнение требований на отклонение выходного сигнала объекта.

В работах по частотной адаптации законы управления находились из решения задачи  $LQ$ -оптимизации. Для этого необходимо решать нелинейное уравнение Риккати. Так, в работе [10] ставится задача адаптивного точного управления, но для синтеза используется решение уравнения Риккати. Настоящая работа продолжает развитие частотного адаптивного управления. Для поиска закона управления предлагается вместо решения уравнения Риккати воспользоваться системой линейных уравнений, полученной из тождества Безу [11], решение которой и дает искомый закон управления.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему, описываемую уравнениями

$$d_n^{[r]} y^{(n)} + d_{n-1}^{[r]} y^{(n-1)} + \dots + d_1^{[r]} \dot{y} + d_0^{[r]} y = k_m^{[r]} u^{(m)} + \dots + k_1^{[r]} \dot{u} + k_0^{[r]} u + f, \quad m < n, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & g_{n_c}^{[r]} u^{(n_c)} + \dots + g_1^{[r]} \dot{u} + g_0^{[r]} u = \\ & = r_{m_c}^{[r]} \left( y^{(m_c)} + v^{(m_c)} \right) + \dots + \\ & + r_1^{[r]} (\dot{y} + \dot{v} + r_0^{[r]} (y + v)), \quad m_c \leq n_c, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $y(t)$  — измеряемый выход объекта (1), являющийся регулируемой переменной,  $u(t)$  — управление, формируемое регулятором (2),  $v(t)$  — испытательный сигнал, используемый при адаптации,  $f(t)$  — внешнее возмущение, которое может быть представлено полигармонической функцией

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \sin(\omega_i^f t + \varphi_i^f),$$

где частоты  $\omega_i^f$  и фазы  $\varphi_i^f$  — неизвестны, а неизвестные амплитуды  $f_i$  удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i| \leq f^*,$$

в котором  $f^*$  — известное число.

Коэффициенты  $d_i^{[r]}$ ,  $k_j^{[r]}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$ , объекта — неизвестные числа, которые изменяются в моменты времени  $t_p$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , и в дальнейшем сохраняют свои значения на интервалах времени

$$I_0 = [t_0, t_1), I_1 = [t_1, t_2), \dots, I_{N-1} = [t_{N-1}, t_N], \quad (3)$$

где  $t_0$  — начальный момент времени, момент времени  $t_N$  — момент окончания работы. Моменты времени, когда происходит изменение значений коэффициентов объекта, находятся в процессе адаптации. Интервалы  $I_0 = [t_0, t_1)$ ,  $I_0, I_1, \dots, I_{N-1}$  будем называть *интервалами стационарности объекта*. В каждом интервале объект сохраняет полную управляемость. Верхние индексы  $[r]$  в записи коэффициентов объекта (1) принимают соответственно значения номеров интервалов стационарности объекта  $0, 1, \dots, N-1$ .

Коэффициенты  $g_i^{[r]}$ ,  $r_j^{[r]}$ ,  $i = \overline{0, n_c}$ ,  $j = \overline{0, m_c}$ , регулятора находятся в процессе адаптации. Коэффициенты регулятора остаются постоянными на интервалах  $I_{c0} = [t_0 + t_0, a, t_1 + t_1, a)$ ,  $I_{c1} = [t_1 + t_1, a, t_2 + t_2, a)$ ,  $\dots$ ,  $I_{c(N-1)} = [t_{N-1} + t_{(N-1), a}, t_N)$ , где  $t_i, a$

$i = \overline{0, N-1}$ , — моменты окончания адаптации на  $i$ -м интервале стационарности объекта. Интервалы  $I_{c0}, I_1, \dots, I_{c(N-1)}$  будем называть *интервалами стационарности регулятора*. Предполагается, что длительность интервалов стационарности объекта достаточна для проведения процедуры идентификации, т. е.  $t_{i, a} - t_i > t_{i+1} - t_i$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ .

Испытательный сигнал представляет собой сумму гармоник:

$$v^{[r]}(t) = \sum_{i=1}^n v_i^{[r]} \sin(\omega_i^{[r]} t), \quad t_0 \leq t \leq t_N, \quad r = \overline{0, N-1}, \quad (4)$$

амплитуды и частоты которых для каждого интервала стационарности объекта находятся в процессе адаптации. Его частоты определяются так, чтобы они не совпадали с частотами внешнего возмущения:

$$\omega_i^{[r]} \neq \omega_j^f, \quad i = \overline{1, n}, \quad r = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (5)$$

а амплитуды испытательного сигнала должны удовлетворять требованиям

$$\|y_v(t) - |y(t)|\| \leq \rho |y(t)|, \quad t_0 \leq t \leq t_N, \quad (6)$$

где  $\rho$  — заданное положительное число,  $\rho < 1$ ,  $y(t)$  — выход объекта при  $v = 0$ ,  $y_v(t)$  — выход объекта при  $v \neq 0$ .

Испытательный сигнал служит для идентификации объекта на основе метода конечно-частотной идентификации. В соответствии с этим методом входы и выходы объекта подаются на входы фильтров Фурье

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{ui}^{[r]} &= \frac{2}{v_i^{[r]} T} \int_{t_r}^{t_{r,a}} u(t) \sin(\omega_i^{[r]} t) dt, \\ \hat{\beta}_{ui}^{[r]} &= \frac{2}{v_i^{[r]} T} \int_{t_r}^{t_{r,a}} u(t) \cos(\omega_i^{[r]} t) dt, \\ \hat{\alpha}_{yi}^{[r]} &= \frac{2}{v_i^{[r]} T} \int_{t_r}^{t_{r,a}} y(t) \sin(\omega_i^{[r]} t) dt, \\ \hat{\beta}_{yi}^{[r]} &= \frac{2}{v_i^{[r]} T} \int_{t_r}^{t_{r,a}} y(t) \cos(\omega_i^{[r]} t) dt, \\ i &= \overline{1, n}, \quad r = \overline{1, N-1}, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $T = t_{r,a} - t_r$  — длительность фильтрации, которая определяется в процессе адаптации. Выходы фильтров Фурье используются для определения частотных характеристик объекта, по которым находятся оценки коэффициентов полиномов  $\hat{d}_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , и  $\hat{k}_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ . Моменты  $t_r$  начала интер-



вала стационарности объекта находятся (проверяются) с помощью неравенств

$$|\hat{d}_i^{[r]} - \hat{d}_i^{[r-1]}| \leq \varepsilon_r |\hat{d}_i^{[r-1]}|, |\hat{k}_j^{[r]} - \hat{k}_j^{[r-1]}| \leq \varepsilon_r |\hat{k}_j^{[r-1]}|, \\ i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}, r = \overline{1, N-1},$$

где  $\varepsilon_r$  — заданные числа.

Для проверки выполнения условия (5) различия частот внешнего возмущения и испытательного сигнала осуществляется следующая процедура.

После окончания адаптации на  $r$ -м интервале стационарности на определенный интервал времени  $I_f$ , лежащий между моментами времени  $t_r + t_{r,a}$  и  $t_{r+1}$ , испытательный сигнал отключается ( $v^{[r]}(t) = 0$ ), и на выходах фильтра Фурье получают числа  $\bar{\alpha}_{ui}^{[r]}, \bar{\alpha}_{yi}^{[r]}, \bar{\beta}_{ui}^{[r]}, \bar{\beta}_{yi}^{[r]}$ . Если эти числа достаточно малы, то это означает выполнение неравенства (5). В противном случае изменяют частоты испытательного сигнала.

Изменения коэффициентов объекта на смежных интервалах предполагаются достаточно малыми (малы числа  $\varepsilon_r$ ), так что регулятор, найденный для интервала стационарности объекта  $I_{r-1}$ , обеспечивает устойчивость системы с объектом на интервале  $I_r$ . Однако этот регулятор может не обеспечивать устойчивость системы для объекта на  $(r + 1)$ -м интервале стационарности.

Интервалы  $[t_i + t_{i,a}, t_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , будем называть *интервалами нормальной работы системы*, когда не происходит изменений параметров объекта, а процесс адаптации закончен. Точность системы — это наименьшее число  $y_a$ , при котором выполняется неравенство  $|y(t)| < y_a$ ,  $t \geq t_{\text{пер}}^{[i]}$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , где  $t_{\text{пер}, i} = t_i + t_{i,a} + \eta_i$ ,  $\eta_i$  — момент окончания переходных процессов после смены регулятора.

Задача состоит в том, чтобы для каждого интервала стационарности объекта найти коэффициенты  $g_i^{[r]}$  и  $r_j^{[r]}$ ,  $i = \overline{0, n_c}, j = \overline{0, m_c}$ , регулятора (2) такие, чтобы для системы (1), (2) выполнялись требованиям к точности

$$y_a \leq y^*, t \geq t_{\text{пер}}^{[i]}, i = \overline{0, N-1}, \quad (8)$$

где  $y^*$  — заданное число.

На рис. 1 приведена структурная схема системы адаптивного управления. Объект управления и регулятор описываются уравнениями (1), (2) соответственно. Фильтры Фурье вычисляют интегралы (7). Идентификатор вычисляет частотные характеристики объекта и находит оценки коэффициентов полиномов объекта управления. Син-

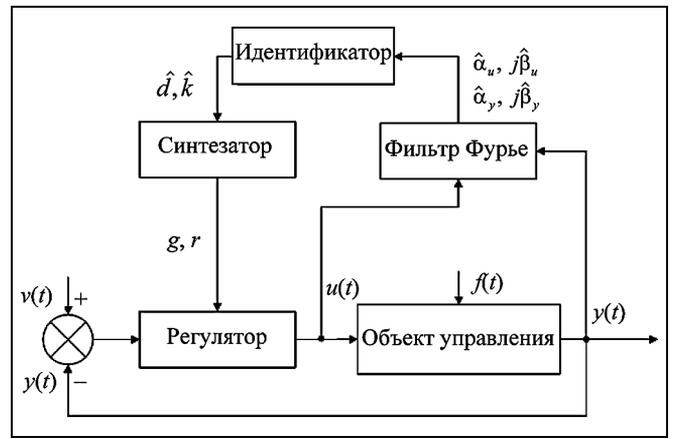


Рис. 1. Частотная адаптивная система управления

тезатор, используя найденные оценки, рассчитывает коэффициенты полиномов регулятора.

Адаптация на каждом интервале стационарности объекта (3) состоит из двух процедур: процедуры идентификации коэффициентов объекта (на отрезке времени  $[t_i, t_{i,a}]$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ ) и затем процедуры синтеза регулятора на основе тождества Безу. Рассмотрим каждую из них.

## 2. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА

Рассмотрим систему (1), (2) на интервале стационарности объекта (в дальнейшем для простоты обозначений верхние индексы опущены), в течение которого коэффициенты объекта постоянны:

$$d(s)y = k(s)u + f, \\ g(s)u = r(s)y, \quad (9)$$

где  $d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i$ ,  $k(s) = \sum_{i=0}^m k_i s^i$ ,  $g(s) = \sum_{i=0}^{n_c} g_i s^i$ ,

$$r(s) = \sum_{i=0}^{m_c} r_i s^i.$$

Пусть коэффициенты полиномов  $d(s)$  и  $k(s)$  найдены в процессе идентификации.

Коэффициенты полинома регулятора (9) находятся из тождества Безу

$$d(s)g(s) - k(s)r(s) = \psi(s), \quad (10)$$

где  $\psi(s) = \sum_{i=0}^{2n-1} \psi_i s^i$  — модальный полином степени

$2n - 1$ , корни которого имеют отрицательные вещественные части.

Полином  $\psi(s)$  имеет структуру

$$\psi(s) = \varepsilon(s)\delta_k(s)\delta(s),$$

где  $\delta(s)$  — базовый полином степени  $n$ . Вещественные корни полинома  $\delta(s)$  обозначим как  $(-s_{\delta, i})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , тогда этот полином примет вид:

$$\delta(s) = d_n \prod_{i=1}^n (s + s_{\delta, i}),$$

где  $d_n$  — коэффициент полинома  $d(s)$  объекта при старшей степени  $s$ ,  $d_n > 0$ .

Полином  $\varepsilon(s)$  — полином реализуемости степени  $n - m - 1$ , необходимый для реализуемости регулятора (условие реализуемости  $\text{degg}(s) \geq \text{degr}(s)$ ). Полином  $\varepsilon(s)$  формируется как

$$\varepsilon(s) = \prod_{i=1}^{n-m-1} \left( \frac{\mu_i}{s_{\delta, i}} + 1 \right),$$

где  $s_{\delta, i} = \max[s_{\delta, 1}, s_{\delta, 2}, \dots, s_{\delta, n}]$ ,  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n-m-1}$ , — достаточно малые, различные положительные числа.

При формировании полинома  $\delta_k(s)$  возможны два случая.

Если у полинома  $k(s)$  все корни имеют отрицательные вещественные части, то  $\delta_k(s) = k(s)$ . В этом случае в требовании (10) к точности системы можно обеспечить любое значение  $y^*$ .

Если полином  $k(s)$  имеет положительные корни (для простоты предположим, что все корни  $k(s)$  имеют положительные вещественные части), то  $\delta_k(s) = k(-s)$ . В этом случае существует предельно достижимая точность системы  $y_{\text{пр}}$  (для случая  $m = 1$ ,  $y_{\text{пр}} = 1/|d(s_1)|$ ). Требование к точности системы должны это учитывать ( $y^* \geq y_{\text{пр}}$ ).

**Утверждение.** Если объект (1) минимально-фазовый и модули корней базового полинома  $\delta(s)$  удовлетворяют соотношениям

$$\prod_{i=1}^n s_{\delta, i} \geq \frac{f^*}{y^*}, \quad s_{\delta, i} \geq |s_{d, i}|, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

то регулятор (2) обеспечивает требуемую точность (8) системы и запасы устойчивости по модулю и фазе.

Доказательство. Передаточная функция системы (1), (2) имеет вид

$$t_{yf}(s) = \frac{g(s)}{d(s)g(s) - k(s)r(s)}. \quad (12)$$

Требования к точности системы (8) выполняются, если

$$\sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)| \leq y^*/f^*.$$

Действительно, выход системы при действии внешнего возмущения при  $t \rightarrow \infty$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a(\omega_i^f) \sin(\omega_i^f t + \psi(\omega_i^f)),$$

где  $a(\omega_i^f) = |t_{yf}(\omega_i^f)|f_i^f$ , тогда

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |a(\omega_i^f)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |t_{yf}(j\omega_i^f)|f_i^f \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |f_i^f| \sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)| = \sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)|f^*. \end{aligned}$$

Полином

$$g(s) = g_c(s)k(s). \quad (13)$$

Разделив тождество (10) на полином  $k(s)$ , получим тождество

$$d(s)g(s) - r(s) = \varepsilon(s)\delta(s), \quad (14)$$

где индекс  $\varepsilon$  у полинома  $g_c(s)$  опущен.

Известно, что если параметры  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n-m-1}$ , полинома реализуемости существенно малы, то решение тождества (14) имеет вид

$$g(s) = \varepsilon(s) + o(s, \mu_i), \quad (15)$$

где  $o(s, \mu_i)$  — полином, такой что  $\lim_{\mu_i \rightarrow 0} o(s, \mu_i) = 0$ .

Принимая во внимание тождество Безу и выражения (13) и (15), передаточную функцию (12) можно переписать как  $t_{yf}(s) = 1/\delta(s)$ .

Корни полинома  $\delta(s)$  вещественные, и поэтому

$$\sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)| \leq \frac{1}{d_n \prod_{i=1}^n s_{\delta, i}}.$$

Неравенство (11) обеспечивает систему запасами устойчивости. Очевидно, что *возвратная разность* системы имеет вид:

$$v(s) = 1 - \frac{k(s)r(s)}{d(s)g(s)} = \frac{\delta(s)}{d(s)},$$

где, в частности, для вещественных корней полинома  $k(s)$  получаем

$$|v(j\omega)|^2 = \frac{\prod_{i=0}^n (\omega^2 + s_{\delta, i}^2)}{\prod_{i=0}^n (\omega^2 + s_{d, i}^2)} \geq 1, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

При условии (11) неравенство выполняется, и поэтому система обладает запасами по фазе  $\geq 60^\circ$  и запасом по модулю не менее 2. ♦

Решение тождества (10) получим, составив систему линейных алгебраических уравнений и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  в правой и левой частях тождества.

$$\sum_{i=0}^n d_i g_{\alpha-1} - \sum_{l=0}^m k_l r_{\alpha-l} = \psi_{\alpha}, \quad (\alpha = \overline{0, 2n-1}). \quad (16)$$

Решение системы (16) существует и единственное, если степени полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$  удовлетворяют неравенствам  $n_c \geq n - 1$  и  $m_c \geq n - 1$ . Описанный метод построения полинома  $\psi(s)$  обеспечивает выполнение этого требования.



### 3. ПРОЦЕДУРА ИДЕНТИФИКАЦИИ

Идентификация выполняется на каждом интервале стационарности (3), поэтому для простоты во всех формулах опустим индексы, обозначающие номера интервалов стационарности и адаптации.

Оценки коэффициентов полиномов  $\hat{d}_i, i = \overline{0, n}$ , и  $\hat{k}_i, i = \overline{0, m}$ , вычисляет идентификатор. Вначале по выходам фильтров Фурье определяются оценки частотной характеристики объекта на испытательных частотах  $\omega_p, p = \overline{1, n}$ :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\hat{\alpha}_{ui}\hat{\alpha}_{yi} + \hat{\beta}_{ui}\hat{\beta}_{yi}}{\hat{\alpha}_{ui}^2 + \hat{\beta}_{yi}^2}, \quad \hat{\beta}_i = \frac{\hat{\alpha}_{ui}\hat{\beta}_{yi} - \hat{\alpha}_{yi}\hat{\beta}_{ui}}{\hat{\alpha}_{ui}^2 + \hat{\beta}_{yi}^2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Очевидно, что

$$w(j\omega_i) = \alpha_i + j\beta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Далее решается «частотная» система уравнений, полученная из уравнений (18). Коэффициентами системы являются оценки частотных параметров объекта (17)

$$\sum_{i=0}^m (j\omega_p)^i \hat{k}_i - (\hat{\alpha}_p + j\hat{\beta}_p) \sum_{i=0}^n (j\omega_p)^i \hat{d}_i = \hat{\alpha}_p + j\hat{\beta}_p, \quad p = \overline{1, n}.$$

Решение этой системы дает искомые оценки коэффициентов полиномов объекта.

Рассмотрим выбор параметров  $v_p, \omega_p, i = \overline{1, n}$ , испытательного сигнала (4). Амплитуды испытательного сигнала должны обеспечивать выполнение требования (6), а частоты не должны совпадать с частотами внешнего возмущения, согласно требованию (5), но при этом желательно, чтобы они были близки к корням полинома  $d(s)$  [1]. Здесь нужно выделить два случая.

В первом рассматривается объект (1) на начальном интервале стационарности  $I_0$ , в этом случае коэффициенты  $d_p, k_p, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ , неизвестны. Следует применить к объекту идентификацию с самонастройкой испытательного сигнала. В соответствии с работой [12] идентификация осуществляется в два этапа. На первом настраиваются амплитуды испытательного сигнала (4) так, чтобы выполнялось требование (6). На втором настраиваются частоты так, чтобы выполнялось требование (5) различия частот испытательного сигнала и внешнего возмущения.

Второй случай охватывает остальные интервалы стационарности объекта  $I_p, i = \overline{1, N-1}$ . В этом случае испытательные частоты  $\omega_i$  выбираются близкими к корням полинома, составленного из оценок коэффициентов  $\hat{d}_i, i = \overline{0, n}$  объекта на предыдущем интервале стационарности:  $\omega_i \approx s_{d,i}, i = \overline{1, n}$ , где  $s_{d,i}, i = \overline{1, n}$ , — корни полинома  $\hat{d}(s) = \sum_{i=0}^n \hat{d}_i s^i$ .

Амплитуды испытательных гармоник  $v_p, p = \overline{1, n}$ , определяются, исходя из неравенства

$$\sum_{i=1}^n |t_{yv}(j\omega_i)| v_i \leq \rho y^*, \quad (19)$$

где  $t_{yv}(s)$  — передаточная функция системы (1), (2) на предыдущем интервале стационарности объекта, связывающая выход объекта с испытательным сигналом,  $\rho$  — заданное положительное число ( $\rho < 1$ ). Условие (19) является достаточным для выполнения неравенства (6).

Оценить длительность адаптации можно по относительной разности оценок частотных параметров объекта (17).

Будем рассчитывать частотные параметры в моменты времени, кратные базовому периоду

$$T_b = \frac{2\pi}{\min[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]}.$$

Условия окончания процесса идентификации имеют вид:

$$\left| \frac{\hat{\alpha}_i(kT_b) - \hat{\alpha}_i(kT_b - 1)}{\hat{\alpha}_i(kT_b)} \right| \leq \theta, \quad \left| \frac{\hat{\beta}_i(kT_b) - \hat{\beta}_i(kT_b - 1)}{\hat{\beta}_i(kT_b)} \right| \leq \theta, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

где  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, i = \overline{1, n}$ , — оценки (17), определяемые в моменты времени, кратные периоду  $T_b$ ,  $\theta$  — заданное положительное число. На каждом интервале стационарности считаем, что  $\hat{\alpha}(0) = 0, \hat{\beta}(0) = 0, i = \overline{1, n}$ .

### 4. АЛГОРИТМ АДАПТАЦИИ

На начальном интервале стационарности  $I_0$  производится идентификация коэффициентов объекта путем идентификации с самонастройкой испытательного сигнала, далее, используя процедуру синтеза, для него рассчитывается регулятор. Объект замыкается этим регулятором.

На каждом из следующих интервалов стационарности алгоритм адаптации состоит из следующих этапов.

1. После смены коэффициентов объекта начинается его идентификация на основе процедуры из § 3.
2. По найденным оценкам коэффициентов объекта рассчитывается регулятор согласно процедуре из § 2, и объект замыкается этим регулятором.
3. После смены регулятора и завершения переходного процесса начинается нормальная работа объекта, которая продолжается до следующей смены его коэффициентов.

## 5. ПРИМЕР

### 5.1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления (1), описываемый уравнением

$$d_3^{[r]} \ddot{y} + d_2^{[r]} \dot{y} + d_1^{[r]} y = k_1^{[r]} \dot{u} + k_0^{[r]} u + f.$$

Объект имеет постоянные коэффициенты на трех интервалах ( $r = 0, 1, 2$ ) длительностью  $t_1 - t_0$ ,  $t_2 - t_1$  и  $t_3 - t_2$ .

На начальном интервале стационарности объекта  $I_0$  его коэффициенты равны

$$d^{[0]}(s) = (5s + 1)(0,04s^2 + 0,24s + 1) = 0,2s^3 + 1,24s^2 + 5,24s + 1, \quad k^{[0]}(s) = 0,4s + 1; \quad (20)$$

а на первом и втором интервалах они принимают значения

$$d^{[1]}(s) = (10s + 1)(0,16s^2 + 0,48s + 1) = 1,6s^3 + 4,96s^2 + 10,48s + 1, \quad k^{[1]}(s) = 0,3(0,4s + 1), \quad (21)$$

$$d^{[2]}(s) = (10s + 1)(s^2 + 0,8s + 1) = 10s^3 + 9s^2 + 10,8s + 1, \quad k^{[2]}(s) = 0,3(0,4s + 1), \quad (22)$$

которые неизвестны регулятору.

Эти коэффициенты таковы, что регулятор, найденный для начального интервала стационарности  $I_0$ , не обеспечивает устойчивость системы с объектом на вто-

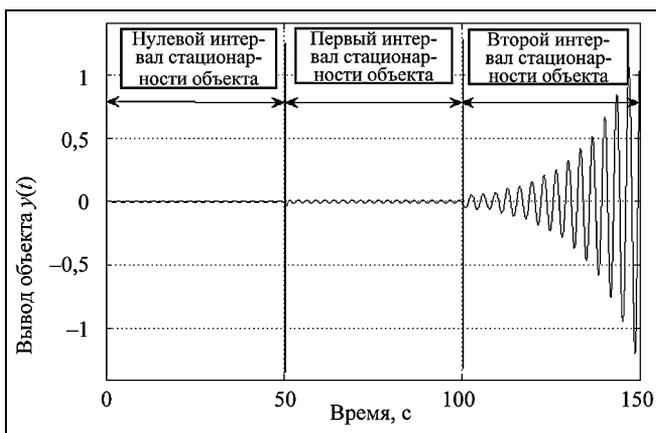


Рис. 2. Выход объекта без адаптации

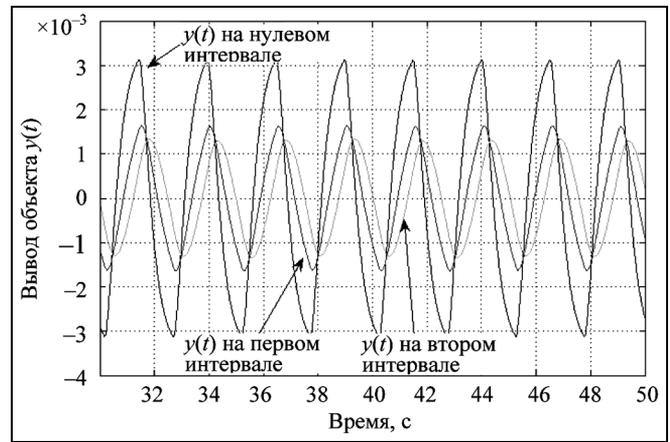


Рис. 3. Выход объекта на трех интервалах стационарности после завершения адаптации

ром интервале стационарности  $I_2$ . В связи с этим необходима адаптация регулятора. Выход системы (1), (2)  $y(t)$  без адаптации регулятора в течение трех интервалов стационарности объекта показан на рис. 2.

Внешнее возмущение в течение эксперимента имело вид  $f(t) = 0,5 \text{sign}(\sin 2,5t)$ .

Требуется найти регулятор

$$g_2^{[r]} \ddot{u} + g_1^{[r]} \dot{u} + g_0^{[r]} u = r_2^{[r]} \ddot{y} + r_1^{[r]} \dot{y} + r_0^{[r]} y; \quad (23)$$

который, после его адаптации, обеспечивает необходимую границу точности системы (20), (23)  $y^* = 0,01$  на каждом интервале стационарности объекта.

### 5.2. Нулевой интервал стационарности объекта

Опуская для краткости процедуру идентификации объекта с самонастройкой испытательного сигнала, на интервале стационарности  $I_0$  регулятор строится при известных коэффициентах объекта (20).

В результате выполнения процедуры синтеза получен регулятор

$$0,0048 \ddot{u} + 0,608 \dot{u} + 1,5u = -8,66 \ddot{y} - 93,7 \dot{y} - 216y. \quad (24)$$

При выполнении расчетов для обеспечения требуемой точности модули корней базового полинома  $\delta(s)$  выбраны как  $s_{\delta,1} = 3$ ,  $s_{\delta,2} = 11$ ,  $s_{\delta,3} = 33$ . Они превышают модули корней полинома  $d(s)$  объекта ( $s_{d,1} = -0,2$ ,  $s_{d,2,3} = -3 \pm j4$ ), и поэтому система (20), (24) обладает запасами устойчивости.

В итоге модальный полином принял вид:  $\psi(s) = 0,2(0,012s + 1)(s + 3)(s + 3)(s + 11)(s + 33)(0,4s + 1)$ , в котором полином реализуемости  $\varepsilon(s) = \left(\frac{0,2}{s_{\delta,3}}s + 1\right)$ .

В течение нулевого интервала стационарности объект замкнут регулятором (24). Выходной сигнал  $s(t)$  приведен на рис. 3. Система (20), (24) обладает следующими характеристиками на нулевом интервале стационарности:  $\sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yv}(j\omega)| = 0,0068$ , запас по фазе равен  $68,2^\circ$  и запас по модулю стремится к бесконечности.



### 5.3. Первый интервал стационарности объекта

В момент времени  $t_1$  коэффициенты объекта изменились и приняли неизвестные значения (21). После чего была проведена адаптация регулятора согласно алгоритму из § 4.

В результате идентификации были найдены оценки коэффициентов полиномов объекта

$$\begin{aligned}\hat{d}^{[1]}(s) &= 1,04s^3 + 4,02s^2 + 8,77s + 1, \\ \hat{k}^{[1]}(s) &= 0,07s + 0,283.\end{aligned}\quad (25)$$

При этом параметры испытательного сигнала (4)

$$v^{[1]}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i^{[1]} \sin \omega_i^{[1]} t.$$

Испытательные частоты  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , близки к корням полинома  $d(s)$  объекта на левом интервале  $I_0$ , и  $\omega_1^{[1]} = 0,2$ ,  $\omega_2^{[1]} = 4$ ,  $\omega_3^{[1]} = 6$ .

С учетом условия (6) амплитуды испытательного сигнала задавались следующими:  $v_1^{[1]} = 7,1 \cdot 10^{-3}$ ,  $v_2^{[1]} = 9,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $v_3^{[1]} = 5,8 \cdot 10^{-3}$ .

После определения оценок (28) был синтезирован регулятор

$$\begin{aligned}0,0009 \ddot{u}^{[1]} + 0,903 \dot{u}^{[1]} + 0,34u^{[1]} &= \\ = -18,4 \ddot{y}^{[1]} - 116 \dot{y}^{[1]} - 202y^{[1]}.\end{aligned}\quad (26)$$

Объект был замкнут этим регулятором. Выход объекта на соответствующем интервале стационарности объекта приведен на рис. 3. Система (21), (26) обладает характеристиками:  $\sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yy}(j\omega)| = 0,0056$ , запас по фазе равен  $74,8^\circ$  и запас по модулю стремится к бесконечности.

### 5.4. Второй интервал стационарности объекта

В момент времени  $t_2$  коэффициенты объекта изменились и приняли значения (22).

В результате идентификации получены оценки коэффициентов объекта

$$\begin{aligned}\hat{d}^{[2]}(s) &= 7,95s^3 + 9,27s^2 + 8,77s + 1, \\ \hat{k}^{[2]}(s) &= 0,092s + 0,273.\end{aligned}$$

Испытательный сигнал сохранен прежним.

Используя найденные оценки, синтезирован регулятор

$$\begin{aligned}0,0011 \ddot{u}^{[2]} + 0,106 \dot{u}^{[2]} + 0,306u^{[2]} &= \\ = -80,2 \ddot{y}^{[2]} - 262 \dot{y}^{[2]} - 189y^{[2]}.\end{aligned}\quad (27)$$

На рис. 3 приведен выход объекта при действии внешнего возмущения, точность системы соответствует требуемой  $y^*$ . Система (22), (27) обладает характеристиками:  $\sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yy}(j\omega)| = 0,0103$ , запас по фазе равен  $78,4^\circ$  и запас по модулю стремится к бесконечности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для одномерных линейных объектов управления, подверженных действию внешнего возмущения, предложен метод адаптивного управления,

обеспечивающий на выходе заданную точность. Коэффициенты уравнения объекта медленно меняются во времени, что позволяет описать их с помощью понятия интервалов стационарности объекта. Для каждого интервала стационарности проводится идентификация коэффициентов на основе метода конечно-частотной идентификации и затем синтезируется закон управления. Предложена процедура синтеза, которая выполняется путем решения системы линейных уравнений, полученной из тождества Безу. Для минимально-фазовых объектов она обеспечивает системе любую заданную точность и достаточные запасы устойчивости. Для неминимально-фазовых объектов указаны ограничения на достижимую точность.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспилотных самонастраивающихся систем с моделью // Автоматика и телемеханика — 1967. — Т. 28, № 6. — С. 88—94.
2. Parks P.C. Lyapunov redesign of model reference adaptive control system // IEEE Trans. Automat. Control. — 1966. — Vol. AC-11, N 3. — P. 362—367.
3. Narendra K.C., Annaswamy F.M. Robust adaptive control in the presence of bounded disturbance // IEEE Trans. Automat. Control. — 1986. — Vol. AC-31, N 4.
4. Sun J., Ioannou P. Robust adaptive LQ control schemes // IEEE Trans. Automat. Control. — 1992. — Vol. AC-37, N 1. — P. 100—106.
5. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспилотные методы. — М.: Наука. 1990.
6. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981.
7. Якубович В.А. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 166, № 6. — С. 1308—1311.
8. Соколов В.Ф. Адаптивное робастное управление с гарантированным результатом в условиях ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 1994. — Т. 55, № 2. — С. 121—131.
9. Александров А.Г., Орлов Ю.Ф. Частотное адаптивное управление многомерными объектами // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 7. — С. 104—119.
10. Резков И.Г. Адаптивный регулятор для многорежимного объекта // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 35—58.
11. Александров А.Г. Аналитический синтез регуляторов на основе модального управления // Сб. тр. III междунар. науч. конф. «Проблемы управления, обработки и передачи информации» (АТМ-2013), Саратов, 2013 / Под ред. А.А. Львова и М.С. Светлова. — Т. 1. — С. 5—8.
12. Александров А.Г. Конечно-частотная идентификация: самонастройка испытательного сигнала // Сб. науч. тр. «Робастное управление и частотная идентификация» / ЭПИ МИСиС. — М., 2004. — С. 67—97.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Александров Альберт Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-76-41, ✉ alex7@ipu.ru,

Шатов Дмитрий Владимирович — мл. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-76-41, ✉ dvshatov@gmail.com,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.