УДК 62-551.4

К РЕШЕНИЮ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Г. Александров

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: alex7@ipu.ru

Ключевые слова: линейные системы, показатели качества, тождество Безу, синтез регуляторов

Аннотация: Рассматриваются линейные системы управления, для которых формулируется задача синтеза регулятора с заданными требованиями к показателям точности, качества (время регулирования и перерегулирование) и запасам устойчивости по фазе и модулю. Решение этой классической задачи основано на тождестве Безу. Получена зависимость между указанными показателями качества процесса управления и структурой и коэффициентами полиномов тождества. Эта зависимость позволяет построить метод синтеза регуляторов.

1. Введение

К середине прошлого столетия в теории автоматического управления сложились основные понятия показателей систем автомтаического управления: точность управления, время регулирования, перерегулирование, запасы устойчивости по фазе и модулю. К этому времени был разработан метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик [6, 9], предназначенный для синтеза регуляторов по заданным значениям этих показателей. На протяжении нескольких десятилетий этот метод служил основным инструментом советских инженеров-разработчиков систем автоматического управления одномерными объектами (объектами с одним управляющим воздействием и одной измеряемой переменной). Трудности развития этого метода для многомерных объектов и разработка теории оптимального управления, привели к методам LQ-оптимального и H_∞-субоптимального управления [8, 12–14, 18]. Цель управления в этих методах описывается квадратичными функционалами. Поэтому начались исследования связи показателей систем автоматического управления со структурой и параметрами функционала оптимизации. Связь точности управления с параметрами функционала LQ-оптимизации вначале была получена для внешнего возмущения, которое являлось белым шумом [15], либо постояннной функцией [3], действующей на объект устойчивый по управлению (минимально-фазовый объект). Эта связь сохраняется для возмущений более общего вида [5]. Аналогичная связь с точностью получена для H_∞-субоптимального управления [4]. Связь запасов устойчивости со структурой функционала LQ-оптимизации получена для одномерных [1, 11] и многомерных [2, 17] систем.

Нахождение связи времени регулирования и перерегулированияс параметрами функционала оптимизации затрудняется сложной зависимостью корней характеристического полинома система, которые часто явно определяют эти показатели, от параметров функционала. В модальном управлении [7, 16]. Эти корни задаются, что во многих случаях позволяет обеспечить требования к времени регулирования и перерегулированию.

В настоящей работе получена зависимость четырех видов показателей от структуры и корней модального полинома. Это дает возможность найти условия и получить решение классической задачи синтеза регуляторов по заданным значениям этих показателей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему управления, описываемую уравнениями

(1) $$\dot{x} = Ax + B_1 f + B_2 u, \quad y = z = C_1 x_1, \quad t \geqslant t_0;$$

(2) $$\dot{x}_c = A_c x_c + B_{1c} y_{\text{v}} + B_{2c} y, \quad u = C_c x_c + D_c y,$$

где $x(t) \in R^n$ — состояние объекта (1), $u(t) \in R^m$ — управления, формируемые регулятором (2), $f(t) \in R^1$ — неизвестное внешнее возмущение, $y(t) \in R^m$ — измеряемые переменные, $z(t) \in R^m$ — регулируемые переменные, $x_c \in R^{n_c}$ — состояние регулятора, $y_{\text{v}}(t) \in R^m$ — задающее воздействие, измеряемое либо заранее известная функция. Матрицы объекта известны. Пара (A, B_2) — управляема, а пара (A, C_1) — наблюдаема. Внешнее возмущение — ограниченная полигармоническая функция.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \sin(\omega_i^f t + \varphi_i^f),$$

в которой частоты ω_i^f и фазы φ_i^f $(i = 0, \infty)$ — неизвестны, а неизвестные амплитуды f_i удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i(t)| \leqslant f^*,$$

где f^* — известное число.

Характеристиками системы (1), (2) являются показатели точности, качества и запасы устойчивости по фазе и модулю. Эти характеристики находятся независимо для внешнего возмущения и задающего воздействия. Опишем их, при $y_v = 0$.

Показатели точности $y_{s,i}$ $(i = \overline{1, m})$ — это числа из неравенств

(3) $$|y_i(t)| \leqslant y_{s,i}, \quad t \geqslant t_{1,i}, \quad i = \overline{1, m},$$

где $t_{1,i}$ — время затухания переходных процессов i-той регулируемой переменной, вызванных начальными условиями и приложением внешнего возмущения.

Показатели качества — это время регулирования ($t_{\text{рег},i}$) и перерегулирование ($\sigma_{\text{рег},i}$) по каждой регулируемой переменной.

Эти показатели определяются при нулевых начальных условиях для ступенчатого либо гармонического типовых внешних возмущений

$$f(t) = 0, \quad \text{при} \quad t < t_0, \quad f(t)| = f^*, \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

либо

$$f(t) = f^* \sin \omega t, \tag{5}$$

где ω — заданное число.

В частности, для внешнего возмущения (4) предполагается существование чисел

$$y_i(\infty) = \lim_{t\to\infty} y_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

и тогда *время регулирования* — это наименьшее время, когда выполняется условие

$$0,95|y_i(\infty)| \leqslant |y_i(t)| \leqslant 1,05\,|y_i(\infty)|, \quad t \geqslant t_{s,i}, \quad i = \overline{1,m},$$

а *перерегулирование*

$$\sigma_i = \max_{t\geqslant t_0} \frac{|y_i(t)| - |y_i(\infty)|}{|y_i(\infty)|}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Запасы по фазе и *модулю* находятся так: приложим к объекту (1) вместо ν-той компоненты вектора u ($\nu \in \overline{1,m}$), воздействие $r_\nu = -\sin \omega t$ и получим на ν-том выходе регулятора $u_\nu = a^u_\nu(\omega)\sin(\omega t + \varphi^u_\nu)$. Повторяя для остальных компонент вектора u, а затем для вектора y, находим запасы по фазе $\varphi^u_{\text{з},i}$, $\varphi^y_{\text{з},i}$, и модулю L^u_i, L^y_i, которые должны находиться в известных границах.

При таком определении запасов устойчивости система может терять устойчивость при её размыкании, и поэтому для определения запасов устойчивости используют радиусы запасов устойчивости

$$r^u_{a,i} = \inf_{0\leqslant\omega<\infty} |\mathrm{v}^u_i(j\omega)|, \quad r^y_{a,i} = \inf_{0\leqslant\omega<\infty} |\mathrm{v}^y_i(j\omega)|, \quad i = \overline{1,m},$$

где $\mathrm{v}^u_i(s)$, $\mathrm{v}^y_i(s)$, ($i = \overline{1,m}$) — функции возвратной разности, которые находятся без размыкания системы. (В частности, $\mathrm{v}^u_\nu(j\omega) = 1 + a^u_\nu(\omega)e^{\varphi^u_\nu(\omega)}$; если $r^u_{a,\nu} \geqslant 0.75$, то запас по фазе $\geqslant 42^\circ$ и запас по модулю $\geqslant 2$).

Определение показателей, когда $y_{\mathrm{V}}(t) \neq 0$, а $f(t) = 0$, аналогично; следует заменить $y_i(t)$ на разности $\ell_i = y_i(t) - y_{\mathrm{V}i}(t)$ в выражениях (3), (6) – (7).

Задача 1. *Задача состоит в нахождении, для заданного объекта (1), регулятора (2), обеспечивающего выполнение требований:*

- *к точности*

$$y_{s,i} \leqslant y^*_i, \quad i = \overline{1,m}; \tag{8}$$

- *качеству*

$$t_{\textit{рег},i} \leqslant t^*_{\textit{рег},i}, \quad \sigma_i \leqslant \sigma^*_i, \quad i = \overline{1,m}; \tag{9}$$

- *запасам устойчивости*

$$(10) \qquad r^u_{a,i} \geqslant r^*_a, \quad r^y_{a,i} \geqslant r^*_a, \quad i = \overline{1,m},$$

где y^*_i, $t^*_{рег,i}$, σ^*_i $(i = \overline{1,m})$, r^*_a *— заданные положительные числа.*

Эта задача была описана более полувека тому назад для одномерных систем ($m = 1$) и задающего воздействия ($y_V \neq 0$, $f = 0$) []. Тогда же было получено её решение на основе метода логарифмических амплитудно-частотных характеристик [?,?]. Однако уже тогда была ясна содержательность её многомерной интерпретации и необходимость учёта внешних возмущений, и поэтому она является классической задачей автоматического регулирования.

Решение этой задачи существует далеко не всегда. Это зависит от свойств объекта (1) и набора чисел в правых частях неравенств (8) – (10). Выделим два вида объектов, для которых эти наборы существенно отличаются.

Для этого запишем передаточные матрицы объекта и регулятора

$$(11) \qquad \mathrm{W}_o(s) = C\,(Is - A)^{-1}\,B_2 = D^{-1}(s)K(s) = N_o(s)P_o^{(-1)}(s);$$

$$(12) \qquad \mathrm{W}_c(s) = C_c\,(Is - A_c)^{-1}\,B_{2c} = G^{-1}(s)R(s) = N(s)P^{(-1)}(s),$$

где $D(s)$, $K(s)$, $G(s)$, $R(s)$, $P(s)$, $N(s)$, $P_o(s)$, $N_o(s)$ — полиномиальные матрицы размеров $m \times m$, s — символ преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях.

Объект (1) называется *устойчивым по управлению* [10], если полином $\det\, K(s)$ имеет корни с отрицательной вещественной частью (левые корни) и он называется *неустойчивым по управлению* в противном случае.

3. Одномерные системы

При $m = 1$ уравнения системы (1), (2) можно записать в виде

$$(13) \qquad d(s)y = k(s)u + c(s)f;$$

$$(14) \qquad g(s)u = r(s)y,$$

где y и u — скаляры, $d(s) = d_n \prod_{i=1}^{n}(s + s_{d,i})$, $k(s) = k_p \prod_{i=1}^{p}(s + s_i)$ и $c(s) = c_\rho \prod_{i=1}^{\rho}(s + s_{c,i})$ — заданные полиномы, причем $n > p$, $n > \rho$.

Полиномы регулятора (14) будем искать из тождества Безу

$$(15) \qquad d(s)g(s) - k(s)r(s) = \varepsilon(s)\delta_k(s)\delta(s).$$

где

$$\delta(s) = d_n \prod_{i=1}^{n}(s + s_{\delta,i})$$

— *базовый полином.* Он имеет вещественные корни $-s_{\delta,i}$ $(i=\overline{1,n})$.

$$\varepsilon(s)=\sum_{i=1}^{n-p}\varepsilon_i s^i+1$$

— *полином реализуемости.* Он имеет только левые корни, а его коэффициенты $\varepsilon_i=\nu\varepsilon_{i-1}, \quad (i=\overline{2,(n-p)})$, где ν – достаточно малое положительное число, полином $\delta_k(s)=k(s)$, если объект устойчив по управлению и $\delta_k(s)=k(-s)$ — в противном случае (в этом случае здесь и далее полагаем, для простоты, что все корни $s_{k,i}$ $(i=\overline{1,p})$ полинома $k(s)$ правые).

Существует множество пар полиномов $g(s)$ и $r(s)$, удовлетворяющих тождеству Безу. Однако, далее имеется в виду пара полиномов $g(s)$ и $r(s)$, которая находится единственным образом из тождества Безу сравнением коэффициентов в его левой и правой частях тождества.

Пусть полином $c(s)=c_0$.

Утверждение 1. *Если объект (13) устойчив по управлению* $(Re(-s_i)<0, i=\overline{1,p})$ *и модули корней базового полинома удовлетворяют следующим условиям*

$$d_n\prod_{i=1}^{n}s_{\delta,i}\geqslant\frac{c_0 f^*}{y^*},\quad s_{\delta,i}\geqslant 3\left(t^*_{s,1}\right)^{-1},\quad i=\overline{1,n} \tag{16}$$

$$s_{\delta,i}\geqslant\left|s_{d,i}\right|,\quad i=\overline{1,n}, \tag{17}$$

то регулятор (14), найденный из решения тождества Безу, решает поставленную задачу 1 для $m=1$.

Доказательство утверждения 1. Передаточная функция системы (13), (14), связывающая выход с внешним возмущением, имеет вид

$$t_{yf}(s)=\frac{g(s)c(s)}{d(s)g(s)-k(s)r(s)}. \tag{18}$$

Требование (8) к точности выполняется, если

$$\|t_{yf}(s)\|_\infty\leqslant\frac{y^*}{f^*},$$

где $(\|t_{yf}(s)\|_\infty=\sup\limits_{0\leqslant\omega<\infty}|t_{yf}(j\omega)|)$.

Действительно, выход системы при внешнем возмущении имеет при $t\to\infty$ вид

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a\left(\omega_i^f\right)\sin\left(\omega_i^f t+\psi\left(\omega_i^f\right)\right),$$

где $a\left(\omega_i^f\right)=\left|t_{yf}\left(\omega_i^f\right)\right|f_i$.

Тогда

$$|y(t)|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\left|a\left(\omega_i^f\right)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\left|t_{yf}\left(j\omega_i^f\right)\right||f_i|\leqslant\|t_{yf}(s)\|_\infty\sum_{i=0}^{\infty}|f_i|=\|t_{yf}(s)\|_\infty f^*.$$

Полином $g(s)$ имеет следующую структуру

$$g(s) = g_{\varepsilon}(s)k(s). \tag{19}$$

Разделив тождество (15) на полином $k(s)$, получим следующее тождество

$$d(s)g(s) - r(s) = \varepsilon(s)\delta(s), \tag{20}$$

где индекс ε полинома $g_{\varepsilon}(s)$ опущен.

Если параметр ν полинома реализуемости достаточно мал, то решение тождества (20) имеет вид

$$g(s) = \varepsilon(s) + o(s, \nu), \tag{21}$$

где $o(s, \nu)$ — полином, с исчезающими коэффициентами: $\lim\limits_{\nu \to 0} o(s, \nu) = 0$.

Действительно, перепишем тождество (20) в более подробной форме как

$$\left(d_n s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\rho} g_i s^i\right) - \sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i = \left(\delta_n s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i s^i\right)\left(\sum_{i=1}^{\rho} \varepsilon_i s^i + 1\right).$$

Сравнивая коэффициенты при s в i-ой степени $(i = \overline{n+\rho, n})$ получим следующую систему для определения коэффициентов g_i, $(i = \overline{0, \rho})$

$$d_n g_{\beta} = \delta_n \varepsilon_{\beta} - \sum_{i=1}^{\rho-\beta} d_{n-i}\, g_{\beta+i} + \sum_{i=1}^{\rho-\beta} \delta_{n-i}\, \varepsilon_{\beta+i}, \beta = \overline{0, \rho}. \tag{22}$$

Если параметр ν достаточно мал, то

$$\varepsilon_{\rho} < \varepsilon_{\rho-1} < \ldots < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < 1.$$

При этих условиях и $\delta_n = d_n$ система (22) имеет решение (21).

Учитывая тождество Безу и выражения (19), (21), передаточная функция (18) перепишется как

$$t_{yf}(s) = \frac{c(s)}{\delta(s)}.$$

Корни полинома $\delta(s)$ вещественные и поэтому

$$\sup_{0 \leqslant \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)|) \leqslant \frac{c_0}{d_n \prod\limits_{i=1}^{n} s_{\delta,i}},$$

где $c(s) = c_0$.

Второе неравенство в условиях утверждения обеспечивает заданное время регулирования. Перерегулирование $\sigma = 0$, так как корни полинома $\delta(s)$ вещественные.

Неравенство (17) служит для обеспечения запасов устойчивости. Очевидно, что

$$\mathrm{v}(s) = 1 - \frac{k(s)r(s)}{d(s)g(s)} = \frac{\delta(s)}{d(s)},$$

что, в частности, для вещественных корней полинома $d(s)$ дает

$$|\mathrm{v}(j\omega)|^2 = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}\left(\omega^2 + s_{\delta,i}^2\right)}{\prod\limits_{i=0}^{n}\left(\omega^2 + s_{d,i}^2\right)} \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \omega < \infty.$$

Утверждение 1 выполняется также для общего случая полинома $c(s)$ для всех показателей из задачи 1, исключая перерегулирование.

Если сигнал уставки $y_{\mathrm{V}}(s) \neq 0$, то регулятор (14) имеет вид

$$g(s)u = r(s)y - \delta(s)y_{\mathrm{V}}.$$

Утверждение 2. *Если*

- *объект (13) неустойчив по управлению (неминимально-фазовый);*
- *корни полинома $d(s)$ объекта удовлетворяют неравенству*

$$s_i > |s_{d,j}|\,\theta_d, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,n}; \tag{23}$$

- *базовый полином выбирается из условий (16) утверждения 1 и следующих неравенств*

$$s_i > s_{\delta,j}\theta_d, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{24}$$

  где θ_d, θ_δ достаточно большие числа,

то регулятор (14), найденный из решения тождества Безу, решает поставленную задачу 1.

Доказательство утверждения 2. Это утверждение доказывается вместе с доказательством утверждения 3.

Утверждение 3. *Если*

- *объект (13) неустойчив по управлению (неминимально-фазовый);*
- *объект обладает свойством*

$$s_i < \frac{|s_{d,j}|}{\underline{\theta}_{d,}} \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{25}$$

- *базовый полином выбирается, исходя из следующих условий*

$$s_i < \frac{s_{\delta,j}}{\underline{\theta}_\delta}, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{26}$$

  где $\underline{\theta}_d$, $\underline{\theta}_\delta$ достаточно большие числа

- *регулятор (14) находится из решения тождества Безу* *то*

$$y(\infty) = c_0 \left(\frac{2}{d(0)} - \frac{1}{\delta(0)} \right) f^*,$$

если внешнее возмущение ступенчатый сигнал, при этом

$$r_a \leqslant \frac{\delta(0)}{|2\delta(0) - d(0)|}.$$

Доказательство утверждения 3. Полином $g(s)$ имеет следующую структуру

$$g(s) = g_\varepsilon(s) g_k(s).$$

Тождество Безу (15) дает при $s = s_i$, $(i = \overline{1, m})$ следующие выражения для коэффициентов полинома $g_k(s)$

$$\sum_{j=0}^{m} g_{k,j} \, (s_i)^j = \frac{\varepsilon(s_i)\delta_k(s_i)\delta(s_i)}{d(s_i) g_\varepsilon(s_i)}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Анализ этих выражений при условиях (23), (24) и (25), (26) дает утверждения 2 и 3.

4. Многомерные объекты

Принимая во внимание передаточные матрицы (11), (12), выражения (1), (2) можно записать как

$$D(s)y = K(s)u + c(s)f, \tag{27}$$

$$P(s)\alpha = y, \quad u = N(s)\alpha, \tag{28}$$

где $\alpha(t) \in R^m$ — частичный вектор состояния.

Регулятор (28) находится как решение тождества Безу следующего вида:

$$D(s)P(s) - K(s)N(s) = \Delta(s) \det\, K(s), \tag{29}$$

где

$$\Delta(s) = \mathrm{diag}\left[\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s)\right].$$

Утверждение 4. *Если*

- *объект (27) устойчив по управлению,*
- *регулятор (28) находится решением тождества (29), в котором полиномы $\delta_i(s)$ $(i = \overline{1, m})$ выбираются из условий (16),(17) утверждения 1,*

тогда система удовлетворяет требованиям (8), (9) задачи 1; система обладает запасами устойчивости (10), если

$$\left[D^{-1}(-j\omega)\Delta(-j\omega)\right]^T \times \left[D^{-1}(j\omega)\Delta(j\omega)\right] \geqslant I_m r_a^*; \tag{30}$$

$$\left[K^{-1}(-j\omega)\Delta(-j\omega)D^{-1}(-j\omega)K(-j\omega)\right]^T \times \left[K^{-1}(j\omega)\Delta(j\omega)D^{-1}(j\omega)K(j\omega)\right] \geqslant I_m r_a^*.$$

Доказательство утверждения 4.

Легко проверить, что решение тождества имеет вид

$$P(s) = I_m \det\ K(s), \quad N(s) = \tilde{K}(s)\left[D(s) - \Delta(s)\right],$$

где $\tilde{K}(s)$ — сопряженная матрица $\left(\tilde{K}(s)K(s) = I_m \det\ K(s)\right)$.

Если регулятор (28) с этими матрицами не приводится к форме (2), то тогда тождество (29) умножается на матрицу реализуемости.

Передаточный вектор системы (27),(28) имеет вид

$$T_{yf}(s) = P(s)\left[D(s)P(s) - K(s)N(s)\right]^{-1} c(s),$$

с учетом тождества (29) получим выражение

$$T_{yf}(s) = \Delta^{-1}(s)c(s)f,$$

которое означает выполнение первой части утверждения. Вторая часть утверждения следует из достаточных условий запасов устойчивости:

$$\left[I_m + \mathrm{W}_y(-j\omega)\right]^T\ \left[I_m + \mathrm{W}_y(j\omega)\right]^T \geqslant I_m r_a^{y*},$$

$$\left[I_m + \mathrm{W}_u(-j\omega)\right]^T\ \left[I_m + \mathrm{W}_u(j\omega)\right]^T \geqslant I_m r_a^{u*},$$

где $0 \leqslant \omega < \infty$, $\mathrm{W}_u(s) = -\mathrm{W}_c(s)\mathrm{W}_o(s)$, $\mathrm{W}_y(s) = -\mathrm{W}_o(s)\mathrm{W}_c(s)$.

В частном случае, когда матрица $D(s)$ объекта диагональная: $D(s) = \mathrm{diag}\left[d_{11}(s), \ldots, d_{mm}(s)\right]$, то неравенство (30) выполняется.

5. Слабосвязанные системы

Пусть матрица $K(s)$ объекта (27) — диагональная: $K(s) = \mathrm{diag}\left[k_{11}(s), \ldots, k_{mm}(s)\right]$. Его можно переписать в развернутой форме как

$$\sum_{j=1}^{m} d_{ij}(s)y_j = k_i(s)u_i + c_i f, \quad i = \overline{1, m}. \tag{31}$$

Рассмотрим возможность решения задачи 1 с помощью развязанных регуляторов

$$g_i(s)u_i = r_i(s)y_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{32}$$

В связи с этим введем развязанный объект

$$d_{ii}(s)y_i = k_i(s)u_i + c_i f, \quad i = \overline{1, m}. \tag{33}$$

Найдем полиномы регулятора (32) для развязанной системы (32), (33) из тождеств Безу

$$d_{ii}(s)g_i(s) - k_i(s)r_i(s) = \varepsilon_i(s)\delta_{ki}(s)\delta_i(s), \quad i = \overline{1, m}. \tag{34}$$

Утверждение 5. *Если*

- *объект (31) устойчив по управлению,*
- *регулятор (32) находится как решение тождества (34), в котором полиномы $\delta_i(s)$, $i=\overline{1,m}$ выбираются исходя из условий (16), (17) утверждения 1 и модули корней этих полиномов достаточно большие,*

тогда система (31), (32) удовлетворяет требованиям (8), (9) задачи 1. Такая система обладает запасами устойчивости (10), если коэффициенты полиномов объекта $d_{ii}(s), i=\overline{1,m}$ — положительные.

Доказательство утверждения 5. Компоненты передаточного вектора системы (31), (32) имеют вид

$$T_{yf\nu}(s)=\frac{\det\ M_\nu(s)}{\det\ M(s)},\quad \nu=\overline{1,m},$$

где матрица $M(s)$ состоит из элементов: $m_{ii}(s)=\delta_i(s)$, $m_{ij}(s)=d_{ij}(s), i,j=\overline{1,m}, i\neq j$. $M_\nu(s)$ — матрица $M(s)$, у которой ν-ый столбец — это вектор $c(s)$.

Эти компоненты системы (32), (33)

$$t_{yf,\nu}(s)=\frac{c_\nu}{\delta_\nu(s)},\quad \nu=\overline{1,m}.$$

Первая часть утверждения выполняется, если $T_{yf,\nu}(s)$ стремится к $t_{yf,\nu}(s)$, $\nu=\overline{1,m}$ при условиях утверждения.

В связи с этим рассмотрим два полинома $a(s)=\sum\limits_{i=0}^{n_a}a_is^i$ и $b(s)=\sum\limits_{i=0}^{n_b}b_is^i$, $n_a\geqslant n_b$.

Полином $a(s)$ с положительными коэффициентами доминирует над полиномом $b(s)$ со степенью θ (обозначение: $b(s)<a(s)\theta$), если

$$|b_i|<a_i\theta,\quad i=\overline{1,n_b},\quad 0\leqslant\theta<1.$$

Пусть

$$\det\ M(s)=\alpha(s)+\beta(s),\quad \det\ M_\nu(s)=\alpha_\nu(s)+\beta_\nu(s),\quad \nu=\overline{1,m},$$

где

$$\alpha(s)=\prod_{i=1}^{m}\delta_i(s),\alpha_\nu(s)=c_\nu\prod_{i=1}^{\nu-1}\delta_i(s)\prod_{i=\nu+1}^{m}\delta_i(s),$$

$$\beta(s)=\det\ M(s)-\alpha(s),\quad \beta_\nu(s)=\det\ M_\nu(s)-\alpha_\nu(s),\quad \nu=\overline{1,m}.$$

Если

$$\beta(s)<\alpha(s)\theta_\sigma,\quad \beta_\nu(s)<\alpha_\nu(s)\theta_\sigma,\nu=\overline{1,m},\tag{35}$$

где θ_σ — достаточно малое число, то $T_{yf,\nu}(s)$ стремится к $t_{yf,\nu}(s)$, $\nu=\overline{1,m}$.

Для того чтобы получить эти неравенства уравнение объекта (1) преобразуется к форме (27) так, что степени n_{ij} полиномов $d_{ij}(s)$ были меньше, чем степени n_{ii} полиномов $d_{ii}(s)$:

$$n_{ii}>n_{ji}\quad (i,j=\overline{1,m},\quad i\neq j),$$

и модули корней полиномов $\delta_i(s)$ степеней n_{ii} $i = \overline{1,m}$ были достаточно большими, так что

$$d_{ij}(s) < \delta_i(s)\theta \quad (i, j = \overline{1,m}, \quad i \neq j),$$

где θ — достаточно маленькое число. Это обеспечивает малое значение θ_σ.

Вторая часть утверждения доказывается аналогично. Доказательство основано на неравенстве (35).

Рассмотрим частный случай объекта (31), неустойчивого по управлению, когда только один из его полиномов, например $k_\gamma(s)$, $\gamma \in \overline{1,m}$ имеет корни с неотрицательной вещественной частью. Для этого случая запишем уравнение (27) как

$$\sum_{j=1}^{m} d_{ij}(s)y_j = k_i(s)\left[u_i + u_{i\gamma}\right] + c_i f, \qquad i = \overline{1,m},\ i \neq \gamma, \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_{\gamma j}(s)y_j = k_\gamma(s)u_\gamma, \tag{37}$$

Управления u_i, $i = \overline{1,m}, i \neq \gamma$ удовлетворяют второму условию утверждения 5. Управления $u_{i\gamma}$, $i = \overline{1,m}, i \neq \gamma$ описываются следующими выражениями

$$g_{i\gamma}(s)u_{i\gamma} = r_{i\gamma}(s)y_\gamma, \quad i = \overline{1,m}, i \neq \gamma, \tag{38}$$

полиномы $g_{i\gamma}(s)$ и $r_{i\gamma}(s)$ которых находятся из тождества (34), где индекс $_i$ заменен на индекс $_{i\gamma}$ и модули корней полиномов $\delta_{i\gamma}(s), i = \overline{1,m}, i \neq \gamma$ — достаточно малы. Управления u_γ находятся из тождества (34), где индекс $_i$ заменен индексом $_\gamma$, а корни полиномов $\delta_\gamma(s)$ определяются, принимая во внимание утверждения 2 и 3.

При этих условиях система (36), (37), (38) удовлетворяет требованиям (8) задачи 1; такая система обладает запасами устойчивости (10) по всем входам и выходам, за исключением γ-го входа и выхода, если коэффициенты полиномов объекта $d_{ii}(s)$, $i = \overline{1,m}$ — положительные.

6. Заключение

В настоящей работе рассматривается задача синтеза регулятора с заданными требованиями к показателям точности, качества (время регулирования и перерегулирование) и запасам устойчивости по фазе и модулю. Решение задачи основано на тождествах Безу вида (15) и (29).

В работе получена связь между значениями показателей точности, качества и запасов устойчивости, и структурой и коэффициентами полиномов тождеств.

Если объект одномерный и устойчивый по управлению, то задача 1 имеет решение для любых заданных показателей точности, качества и устойчивости.

Этот результат развивается для многомерных объектов за исключением запасов устойчивости по фазе и модулю. Если матрица объекта $K(s)$ диагональная и сам объект устойчив по управлению, то для существуют простые условия для обеспечения запасов устойчивости. Предлагается подход к решению этой же задачи при условии, что объект неустойчив по управлению.

Список литературы

1. Александров А.Г. Частотные свойства оптимальных линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1969. № 9. С. 176-181.
2. Александров А.Г., Небалуев Н. А. Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. I // Автоматика и телемеханика. 1971. № 12. С. 12-20.
3. Александров А.Г. Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. 2 // Автоматика и телемеханика. 1972. № 2. С. 17-29.
4. Александров А.Г. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности. II // Автоматика и телемеханика. 1998. № 8. С. 124-138.
5. Александров А.Г. К аналитическому синтезу регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 3-19.
6. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Ч. I. Линейные системы регулирования одной величины. М.-Л.: Энергия, 1965. 396 с.
7. Кузовков Т.Н. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
8. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. I-IV // Автоматика и телемеханика. 1960. № 4. С. 436-441; № 5 С. 561-568; № 6. С. 661-665; 1961. № 4. С. 425-435.
9. Основы автоматического регулирования / Под ред. Солодовникова В.В. М.:Машгиз. 1954.
10. Адаптивное управление динамическими объектами / Под ред. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. М.: Наука, 1981. 448 с.
11. Anderson B.D.O., Moor J.B. Linear system optimization with prescribed degree of stability // Proc. Inst. Elect. Eng. 1969. Vol. 116, No. 2. P. 2083-2087.
12. Feedback control theory / Ed. by Doyle J.C., Francis K., Tannenbaum A.R. Englewood Cliffs, New Jersey: MacMilan Publishing. 1990. 214 p.
13. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standart H_2 and H_∞ control problem // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. 34, No. 8. P. 831-846.
14. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Societed Mathematica Mexicana. 1960. Vol. 5, No. 1. P. 102-119.
15. Kwakernaak H., Sivan R. The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters // IEEE Transactions on Automatic Control. 1972. Vol. 17, No 1. P. 79-86.
16. Rosenbrock M. H. Distinctive problems of process control. Chemical Engineering Progress. 1962. Vol. 58, No. 9. P. 43-50.
17. Safonov M. G., Athans M. Gain and phase margin for multi-loop LQG regulators // IEEE Transactions on Automatic Control. 1977. Vol. 22, No. 2. P. 173-179.
18. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multipliative siminorms, and approximate inverses // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. Vol. 26, No. 2. P.301-320.