

УДК 62-503.57

# АДАПТИВНОЕ ЧАСТОТНО-МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

**А.Г. Александров***Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [alex7@ipu.ru](mailto:alex7@ipu.ru)**Д.В. Шатов***Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: [dvshatov@gmail.com](mailto:dvshatov@gmail.com)**Ключевые слова:** адаптивное управление, идентификация, модальное управление

**Аннотация:** Предлагается метод адаптивного управления одномерным линейным объектом при неизвестных, ограниченных внешних возмущениях. Коэффициенты объекта неизвестны и меняются в некоторые моменты времени. Процесс адаптации состоит из двух процедур: идентификации и синтеза. Процедура идентификации основана на методе конечно-частотной идентификации объекта управления и замкнутой системы. Процедура синтеза использует метод модального управления. Используется алгоритм выбора модального полинома, обеспечивающий заданную точность и запасы устойчивости системы. Приводится пример.

## 1. Введение

Существует два основных направления в адаптивном управлении. Они различаются предположениями о внешнем возмущении.

В первом направлении [7] предполагается, что внешнее возмущение отсутствует [5] или описывается моделью белого шума [6]. Оно использует адаптивное управление с эталонной моделью и метод наименьших квадратов.

Второе направление развивается с начала 1980-ых годов. Здесь внешнее возмущение — неизвестная, ограниченная функция времени. Оно включает в себя различные способы адаптивного управления: метод рекуррентных целевых неравенств [10], алгоритм оценивания с зоной нечувствительности [11], частотное адаптивное управление [2, 3] и другие.

Настоящая работа развивает метод частотного адаптивного управления. Предлагаемый метод синтеза регулятора основан на модальном управлении.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$(1) \quad d_n^{[\nu]}y^{(n)} + d_{n-1}^{[\nu]}y^{(n-1)} + \dots + d_1^{[\nu]}\dot{y} + d_0^{[\nu]}y = k_m^{[\nu]}u^{(m)} + \dots + k_1^{[\nu]}\dot{u} + k_0^{[\nu]}u + f, \quad m < n;$$

$$(2) \quad g_{n_c}^{[\nu]}u^{(n_c)} + \dots + g_1^{[\nu]}\dot{u} + g_0^{[\nu]}u = r_{m_c}^{[\nu]}(y^{(m_c)} + v^{(m_c)}) + \dots + r_1^{[\nu]}(\dot{y} + \dot{v}) + r_0^{[\nu]}(y + v), \quad m_c \leq n_c,$$

где  $y(t)$  – измеряемый выход объекта (1), являющийся регулируемой переменной,  $u(t)$  – управление, формируемое регулятором (2),  $v(t)$  – испытательный сигнал, используемый при адаптации,  $f(t)$  – внешнее возмущение, которое может быть представлено полигармонической функцией

$$(3) \quad f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \sin(\omega_i^f t + \phi_i^f),$$

где частоты  $\omega_i^f$  и фазы  $\phi_i^f$  – неизвестны, а неизвестные амплитуды  $f_i$  удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i| \leq f^*,$$

в котором  $f^*$  – известное число.

Коэффициенты  $d_i^{[\nu]}, k_j^{[\nu]}$  ( $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ ) объекта неизвестные числа, которые изменяются в моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) и в дальнейшем сохраняют свои значения на интервалах времени

$$(4) \quad I_0 = [t_0, t_1), I_1 = [t_1, t_2), \dots, I_{N-1} = [t_{N-1}, t_N],$$

где  $t_0$  – начальный момент времени, момент времени  $t_N$  – момент окончания работы. Моменты времени, когда происходит изменение значений коэффициентов объекта, известны, либо находятся в процессе адаптации. Интервалы  $I_0, I_1, \dots, I_{N-1}$  будем называть *интервалами стационарности объекта*. Верхние индексы  $[\nu]$  в записи коэффициентов объекта (1) принимают соответственно значения номеров интервалов стационарности объекта  $0, 1, \dots, N-1$ .

Коэффициенты  $g_i^{[\nu]}, r_j^{[\nu]}$  ( $i = \overline{0, n_c}, j = \overline{0, m_c}$ ) регулятора находятся в процессе адаптации. Коэффициенты регулятора остаются постоянными на интервалах  $I_{c0} = [t_0, t_1 + t_{1,a}), I_{c1} = [t_1 + t_{1,a}, t_2 + t_{2,a}), \dots, I_{c(N-1)} = [t_{N-1} + t_{(N-1),a}, t_N]$ , где  $t_{i,a}$  ( $i = \overline{1, N-1}$ ) – моменты окончания адаптации на  $i$ -ом интервале стационарности объекта. Интервалы  $I_{c0}, I_{c1}, \dots, I_{c(N-1)}$  будем называть *интервалами стационарности регулятора*.

Интервалы времени  $I_{a1} = [t_1, t_{1,a}), \dots, I_{aN-1} = [t_{(N-1)}, t_{(N-1),a}]$  будем называть *интервалами адаптации*, а интервалы  $I_{n1} = [t_1 + t_{1a} + \eta_1, t_2], I_{n2} = [t_2 + t_{2a} + \eta_2, t_3], \dots, I_{nN} = [t_{N-1} + t_{(N-1)a} + \eta_{N-1}, t_N]$  называются *интервалами нормальной работы* системы,  $\eta_i$  ( $i = \overline{1, N-1}$ ) – длительности затухания переходных процессов, вызванные изменением коэффициентов регулятора.

**Задача 1.** состоит в том, чтобы для каждого интервала нормальной работы объекта, найти коэффициенты  $g_i^{[\nu]}, r_j^{[\nu]}$  ( $i = \overline{0, n_c}, j = \overline{0, m_c}$ ) регулятора (2) такие, что система (1), (2) удовлетворяла требованиям к точности

$$(5) \quad |y(t)| \leq y^*, t \in I_{ni}, i = \overline{0, N-1};$$

где  $y^*$  – заданное число.

Пусть выполняются следующие предположения:

- а) Объект (1) полностью управляем.
- б) На интервале стационарности  $I_0$  коэффициенты объекта известны.
- в) При известных коэффициентах объекта на каждом интервале (4) существуют  $g_i^{[\nu]}, r_j^{[\nu]}$  ( $i = \overline{0, n_c}, j = \overline{0, m_c}$ ), такие, что требования (5) выполняются.

Чтобы пояснить это предположение, рассмотрим полином  $k(s) = \sum_{i=0}^m k_i s^i$ , где  $s$  – символ преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях. Если все корни  $s_{k,i}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) полинома  $k(s)$  имеют отрицательные вещественные части (минимально-фазовый объект), тогда это предположение выполнимо. Иначе максимально достижимая точность ограничена (величина  $y^*$ ).

г) Система обладает смежной устойчивостью. Это означает, что изменение коэффициентов объекта (1) в моменты времени  $t_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) не приводит к потере устойчивости системы (1), (2) на следующем интервале адаптации. Для выполнения этого предположения система (1), (2) должна обладать запасами устойчивости по фазе и модулю.

д) Длительность интервалов адаптации достаточна для ее осуществления, т. е.  $t_{i,a} - t_i > t_{i+1} - t_i$ , ( $i = \overline{1, N-1}$ ).

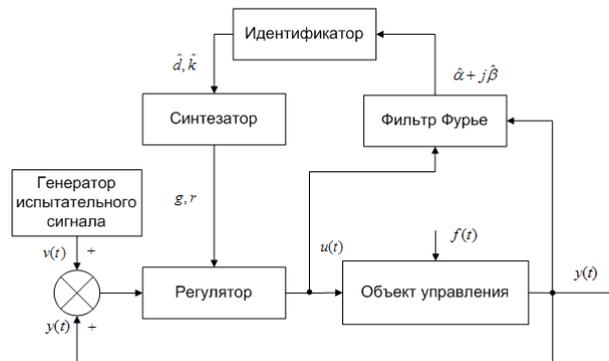


Рис. 1. Частотная адаптивная система управления

Для решения описанной выше задачи применим частотную адаптацию [2]. На рис. 1 приведена схема частотной адаптивной системы управления.

Решение задачи адаптации на каждом интервале стационарности объекта (4) состоит из двух процедур: процедуры идентификации [1] коэффициентов объекта (на интервале адаптации  $I_{ai}$  ( $i = \overline{1, N}$ )), и затем процедуры синтеза регулятора на основе модального управления [9]. Рассмотрим каждую из этих процедур.

### 3. Процедура идентификации

Идентификация выполняется на каждом интервале стационарности (4), поэтому для простоты во всех формулах опустим индексы, обозначающие номера интервалов стационарности и адаптации.

Опишем назначение блоков системы адаптивного управления, изображенной на рис. 1, выполняющих идентификацию объекта (1).

Генератор испытательного сигнала формирует полигармонический сигнал вида:

$$(6) \quad v(t) = \sum_{i=1}^n v_i \sin \omega_i t,$$

где  $v_i, \omega_i, (i = \overline{1, n})$  – амплитуды и частоты гармоник испытательного сигнала.

Испытательные частоты  $\omega_i$  выбираем равными корням полинома [4], составленного из оценок коэффициентов  $\hat{d}_i (i = \overline{0, n})$  объекта на *предыдущем* интервале стационарности:

$$\omega_i = s_{d,i}, (i = \overline{1, n}),$$

где  $s_{d,i}, (i = \overline{1, n})$  – корни полинома  $\hat{d}(s) = \sum_{i=0}^n \hat{d}_i s^i$ .

Амплитуды испытательных гармоник  $v_i (i = \overline{1, n})$  определяются следующим образом.

Представим выход объекта как

$$y(t) = y_0(t) + y_f(t) + y_v(t),$$

где  $y_0(t)$  – компонента, зависящая от начальных условий,  $y_f(t)$  – составляющая выхода, вызванная внешним возмущением,  $y_v(t)$  – компонента, возбужденная испытательным сигналом (6).

Амплитуды испытательного сигнала определяются из условия

$$|y_v(t)| \leq 0,5|y_f(t)|.$$

Достаточным условием выполнения этого неравенства является условие

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n |t_{yv}(j\omega_i)| \rho_i \leq 0,5y^*,$$

где  $t_{yv}(s)$  – передаточная функция системы (1),(2) на *предыдущем* интервале стационарности объекта, связывающая выход объекта с испытательным сигналом.

Числа

$$(8) \quad \alpha_k = \operatorname{Re} W(j\omega_k), \quad \beta_k = \operatorname{Im} W(j\omega_k), \quad (k = \overline{1, n}),$$

где  $W(j\omega) = \frac{k(j\omega)}{d(j\omega)}$ , будем называть *частотными параметрами* объекта (1).

Фильтр Фурье определяет оценки частотных параметров объекта, используя сигналы  $u(t)$  и  $y(t)$ :

$$(9) \quad \hat{\alpha}_i = \frac{\hat{\alpha}_{ui}\hat{\alpha}_{yi} + \hat{\beta}_{ui}\hat{\beta}_{yi}}{\hat{\alpha}_{ui}^2 + \hat{\beta}_{ui}^2}, \quad \hat{\beta}_i = \frac{\hat{\alpha}_{ui}\hat{\beta}_{yi} - \hat{\alpha}_{yi}\hat{\beta}_{ui}}{\hat{\alpha}_{ui}^2 + \hat{\beta}_{ui}^2}, \quad (i = \overline{1, n}),$$

где

$$(10) \quad \begin{aligned} \hat{\alpha}_{ui} &= \frac{2}{v_i T} \int_{t_j}^{t_{j,a}} u(t) \sin(\omega_i t) dt, & \hat{\beta}_{ui} &= \frac{2}{v_i T} \int_{t_j}^{t_{j,a}} u(t) \cos(\omega_i t) dt, \\ \hat{\alpha}_{yi} &= \frac{2}{v_i T} \int_{t_j}^{t_{j,a}} y(t) \sin(\omega_i t) dt, & \hat{\beta}_{yi} &= \frac{2}{v_i T} \int_{t_j}^{t_{j,a}} y(t) \cos(\omega_i t) dt, \\ & & (i &= \overline{1, n}, j = \overline{1, N}), \end{aligned}$$

где  $T$  — длительность текущего интервала адаптации  $I_a$ . Способ ее определения описывается ниже.

Частотные параметры (8) связаны с передаточной функцией объекта следующим образом:

$$(11) \quad W(j\omega_p) = \alpha_p + j\beta_p, \quad (p = \overline{1, n}).$$

Идентификатор решает частотную систему уравнений, полученную из (11). Коэффициентами системы являются оценки частотных параметров объекта (9)

$$(12) \quad \sum_{i=0}^m (j\omega_p)^i \hat{k}_i - (\hat{\alpha}_p + j\hat{\beta}_p) \sum_{i=1}^n (j\omega_p)^i \hat{d}_i = \hat{\alpha}_p + j\hat{\beta}_p, \quad (p = \overline{1, n}).$$

Решение системы (12) дает оценки коэффициентов полиномов  $\hat{d}_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) и  $\hat{k}_j$  ( $j = \overline{0, m}$ ) [1].

## 4. Процедура модального синтеза

Рассмотрим систему (1),(2) на одном интервале стационарности (в дальнейшем для простоты обозначений верхние индексы опущены) в течение, которого коэффициенты объекта постоянны.

$$d(s)y = k(s)u + f,$$

$$(13) \quad g(s)u = r(s)y,$$

$$\text{где } d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i, \quad k(s) = \sum_{i=0}^m k_i s^i, \quad g(s) = \sum_{i=0}^{n_c} g_i s^i, \quad r(s) = \sum_{i=0}^{m_c} r_i s^i.$$

Пусть коэффициенты полиномов  $d(s)$  и  $k(s)$  найдены в процессе идентификации. Коэффициенты полиномов регулятора (13) находятся из тождества Безу

$$(14) \quad d(s)g(s) - k(s)r(s) = \psi(s),$$

где  $\psi(s) = \sum_{i=0}^{2n-1} \psi_i s^i$  — модальный полином, степени  $2n - 1$ . Корни полинома  $\psi(s)$  имеют отрицательные вещественные части.

Полином  $\psi(s)$  имеет структуру

$$\psi(s) = \varepsilon(s)\delta_k(s)\delta(s),$$

где полином  $\delta(s)$  – базовый полином степени  $n$ . Вещественные корни полинома  $\delta(s)$  обозначим как  $(-s_{\delta,i})$  ( $i = \overline{1, n}$ ), тогда сам полином имеет вид:

$$\delta(s) = d_n \prod_{i=1}^n (s + s_{\delta,i}),$$

где  $d_n$  – коэффициент полинома  $d(s)$  объекта при старшей степени  $s$ .

Полином  $\varepsilon(s)$  – полином реализуемости степени  $n - m - 1$ , необходимый для реализуемости регулятора (условие реализуемости  $\deg g(s) \geq \deg r(s)$ ). Полином  $\varepsilon(s)$  формируется следующим образом

$$\varepsilon(s) = \prod_{i=1}^{n-m-1} \left( \frac{\mu_i}{s_{\delta}} + 1 \right),$$

где  $s_{\delta} = \max[s_{\delta,1}, \dots, s_{\delta,n}]$ ,  $\mu_i$  ( $i = \overline{1, n-m}$ ) – достаточно малые, различные положительные числа.

При формировании полинома  $\delta_k(s)$  возможны два случая.

Если у полинома  $k(s)$  все корни имеют отрицательные вещественные части, то  $\delta_k(s) = k(s)$ . В этом случае в требовании (5) к точности системы можно обеспечить любое значение  $y^*$ .

Если полином  $k(s)$  имеет положительные корни (для простоты предположим, что все корни  $k(s)$  имеют положительные вещественные части), то  $\delta_k(s) = k(-s)$ . В этом случае существует предельно-достижимая точность системы  $y_{\text{пр}}$  (для случая  $m = 1$ ,  $y_{\text{пр}} = \frac{1}{|d(s_1)|}$ ). Требования к точности системы должны это учитывать ( $y^* \geq y_{\text{пр}}$ ).

**Утверждение 1.** Если объект (1) – минимально-фазовый и модули корней базового полинома  $\delta(s)$  удовлетворяют следующим соотношениям

$$\prod_{i=1}^n s_{\delta,i} \geq \frac{f^*}{y^*},$$

$$(15) \quad s_{\delta,i} \geq |s_{d,i}|, \quad i = \overline{1, n},$$

то регулятор (2) обеспечивает требуемую точность (5) системы и запасы устойчивости по модулю и фазе.

**Доказательство утверждения 1.** Передаточная функция системы (1), (2) имеет вид

$$(16) \quad t_{yf}(s) = \frac{g(s)}{d(s)g(s) - k(s)r(s)}.$$

Требования к точности системы (5) выполняются, если

$$\|t_{yf}(s)\|_{\infty} \leq \frac{y^*}{f^*},$$

где  $(\|t_{yf}(s)\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)|)$ .

На самом деле, выход системы при действии внешнего возмущения при  $t \rightarrow \infty$  равен

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a(\omega_i^f) \sin(\omega_i^f t + \psi(\omega_i^f)),$$

где  $a(\omega_i^f) = |t_{yf}(\omega_i^f)| f_i$ .  
Тогда

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a(\omega_i^f)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |t_{yf}(j\omega_i^f)| |f_i| \leq \|t_{yf}(s)\|_\infty \sum_{i=0}^{\infty} |f_i| = \|t_{yf}(s)\|_\infty f^*.$$

Полином  $g(s)$  имеет следующую структуру

$$(17) \quad g(s) = g_\varepsilon(s)k(s).$$

Разделив тождество (14) на полином  $k(s)$ , получим следующее тождество

$$(18) \quad d(s)g(s) - r(s) = \varepsilon(s)\delta(s),$$

где индекс  $\varepsilon$  у полинома  $g_\varepsilon(s)$  опущен.

Известно, что если параметры  $\mu_i (i = \overline{1, n-m-1})$  полинома реализуемости существенно малы, то решение тождества (18) имеет следующий вид

$$(19) \quad g(s) = \varepsilon(s) + o(s, \mu_i),$$

где  $o(s, \mu_i)$  — полином, такой что  $\lim_{\mu_i \rightarrow 0} o(s, \mu_i) = 0$ .

Принимая во внимание тождество Безу и выражения (17), (19), передаточную функцию (16) можно переписать как

$$t_{yf}(s) = \frac{1}{\delta(s)}.$$

Корни полинома  $\delta(s)$  вещественные и поэтому

$$\sup_{0 \leq \omega < \infty} |t_{yf}(j\omega)| \leq \frac{1}{d_n \prod_{i=1}^n s_{\delta,i}}.$$

Неравенство (15) обеспечивает систему запасами устойчивости. Очевидно, что *возвратная разность* системы имеет следующий вид:

$$v(s) = 1 - \frac{k(s)r(s)}{d(s)g(s)} = \frac{\delta(s)}{d(s)},$$

где, в частности, для вещественных корней полинома  $d(s)$ , получаем

$$|v(j\omega)|^2 = \frac{\prod_{i=0}^n (\omega^2 + s_{\delta,i}^2)}{\prod_{i=0}^n (\omega^2 + s_{d,i}^2)} \geq 1, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

Если выполняется это неравенство, то система обладает запасами по фазе  $\geq 60^\circ$  и запасами по модулю  $\geq 2$ .

Решение тождества (14) получим, составив систему линейных алгебраических уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  в правой и левой части тождества.

$$(20) \quad \sum_{i=0}^n d_i g_{\alpha-1} - \sum_{l=0}^m k_l r_{\alpha-l} = \psi_\alpha, \quad (\alpha = \overline{0, 2n-1}).$$

Решение системы (20) существует и единственное, если степени полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$  удовлетворяют неравенствам  $n_c \geq n-1$  и  $m_c \geq n-1$ . Описанный метод выбора полинома  $\psi(s)$  обеспечивает выполнение этого требования.

## 5. Алгоритм адаптации

На начальном интервале стационарности  $I_0$  коэффициенты объекта известны и, используя процедуру синтеза 4, для него рассчитывается регулятор. Объект замыкается этим регулятором.

Необходимость в адаптации регулятора возникает на каждом из следующих интервалов стационарности.

**Алгоритм 1.** Алгоритм адаптации состоит из следующих этапов:

1. После смены коэффициентов объекта начинается его идентификация на основе процедуры 3.
2. По найденным оценкам коэффициентов объекта рассчитывается регулятор согласно процедуре 4, и объект замыкается этим регулятором.
3. После смены регулятора и завершения переходного процесса начинается интервал нормальной работы объекта, который продолжается до следующей смены коэффициентов объекта.

## 6. Условия сходимости алгоритма. Длительность адаптации

Для сходимости алгоритма адаптации необходимо, чтобы внешнее возмущение (3) обладало свойством ФФ-фильтруемости [3]. Это означает, что внешнее возмущение не содержит в своем спектре частот  $\omega_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) испытательного сигнала (6):

$$(21) \quad \omega_k^f \neq \omega_i, \quad (k = \overline{0, \infty}, i = \overline{1, n}).$$

Для проверки условия (21) будем производить расчет фильтров Фурье (10), но при этом испытательный сигнал на объект подавать не будем ( $v(t) = 0$ ).

Если при этом выполняются следующие равенства:  $\alpha_{ui} = \alpha_{yi} = \beta_{ui} = \beta_{yi} = 0$ , то выполняется условие ФФ-фильтруемости внешнего возмущения.

При ФФ-фильтруемом внешнем возмущении процедура 3. идентификации будет сходиться и следующие равенства выполняются

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_k(t) = \alpha_k, \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\beta}_k(t) = \beta_k, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  – точные значения частотных параметров объекта (1) на испытательных частотах  $\omega_i (i = \overline{1, n})$ .

ФФ-фильтруемость внешнего возмущения легко проверяется экспериментально [3].

Оценить длительность адаптации можно по относительной разности оценок частотных параметров объекта (9).

Будем рассчитывать частотные параметры в моменты времени кратные базовому периоду

$$T_b = \frac{2\pi}{\min[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]}.$$

Условия окончания процесса идентификации имеют вид:

$$\left| \frac{\hat{\alpha}_i(kT_b) - \hat{\alpha}_i(kT_b - 1)}{\hat{\alpha}_i(kT_b)} \right| \leq \theta, \quad \left| \frac{\hat{\beta}_i(kT_b) - \hat{\beta}_i(kT_b - 1)}{\hat{\beta}_i(kT_b)} \right| \leq \theta, \quad (i = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots)$$

где  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i (i = \overline{1, n})$  – оценки (9), определяемые в моменты времени кратные периоду  $T_b$ ,  $\theta$  – заданное положительное число. На каждом интервале стационарности считаем, что  $\hat{\alpha}_i(0) = 0, \hat{\beta}_i(0) = 0$ .

## 7. Пример

### 7.1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$d_3^{[\nu]} \ddot{y} + d_2^{[\nu]} \dot{y} + d_1^{[\nu]} y + d_0^{[\nu]} y = k_1^{[\nu]} \dot{u} + k_0^{[\nu]} u + f,$$

Объект имеет постоянные коэффициенты на трех интервалах ( $\nu = 0, 1, 2$ ) длительностью  $t_1 - t_0; t_2 - t_1; t_3 - t_2$ .

На начальном интервале стационарности объекта  $I_0$  его коэффициенты равны

$$(22) \quad d^{[0]}(s) = (5s + 1)(0.04s^2 + 0.24s + 1) = 0.2s^3 + 1.24s^2 + 5.24s + 1, \quad k^{[0]}(s) = 0.4s + 1;$$

а в первом и втором интервалах они принимают значения

$$(23) \quad d^{[1]}(s) = (10s + 1)(0.16s^2 + 0.48s + 1) = 1.6s^3 + 4.96s^2 + 10.48s + 1, \quad k^{[1]}(s) = 0.3(0.4s + 1).$$

$$(24) \quad d^{[2]}(s) = (10s + 1)(s^2 + 0.8s + 1) = 10s^3 + 9s^2 + 10.8s + 1, \quad k^{[2]}(s) = 0.3(0.4s + 1).$$

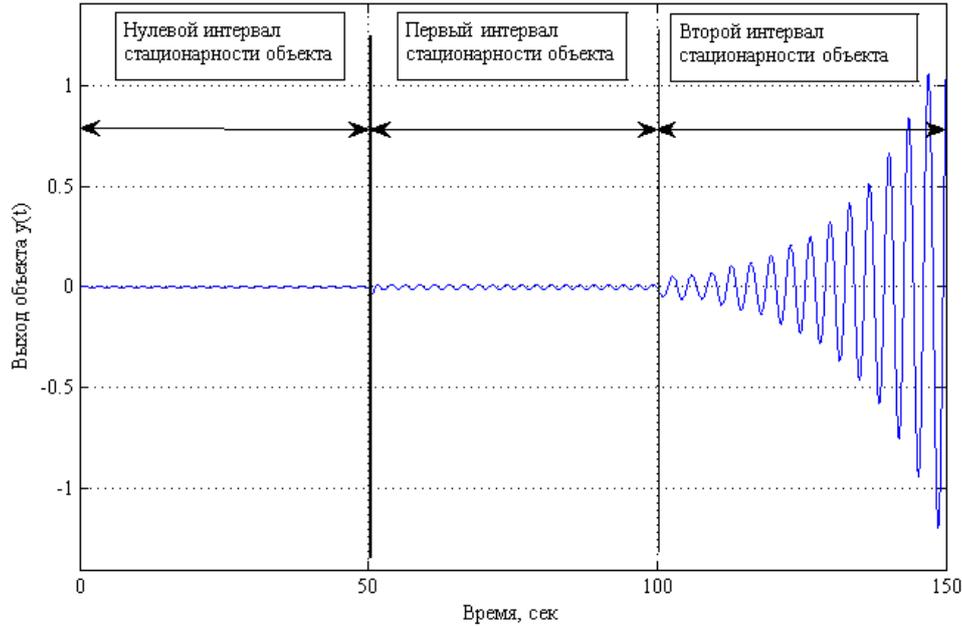


Рис. 2. Выход объекта без адаптации

которые неизвестны регулятору.

Эти коэффициенты таковы, что регулятор, найденный для начального интервала стационарности  $I_0$ , не обеспечивает устойчивость системы с объектом на втором интервале стационарности  $I_2$ . В связи с этим необходима адаптация регулятора. Выход системы (1), (2)  $y(t)$  без адаптации регулятора в течение трех интервалов стационарности объекта показан на рис. 2.

Внешнее возмущение в течение эксперимента имело вид  $f(t) = 0.5 \operatorname{sign}(\sin 2.5t)$ .

Требуется найти регулятор

$$(25) \quad g_2^{[\nu]} \ddot{u} + g_1^{[\nu]} \dot{u} + g_0^{[\nu]} u = r_2^{[\nu]} \ddot{y} + r_1^{[\nu]} \dot{y} + r_0^{[\nu]} y,$$

который, после его адаптации, обеспечивает необходимую точности системы (22), (25).

$$(26) \quad y^* = 0.01.$$

на каждом интервале стационарности объекта.

## 7.2. Нулевой интервал стационарности объекта

На интервале стационарности  $I_0$  регулятор строится, используя известные коэффициенты объекта (22).

В результате выполнения процедуры 4. синтеза получен регулятор

$$(27) \quad 0.0048 \ddot{u} + 0.608 \dot{u} + 1.5u = -8.66 \ddot{y} - 93.7 \dot{y} - 216y.$$

При выполнении расчетов для обеспечения требуемой точности модули корней базового полинома  $\delta(s)$  выбраны как  $s_{\delta,1} = 3$ ,  $s_{\delta,2} = 11$ ,  $s_{\delta,3} = 33$ . Они превышают

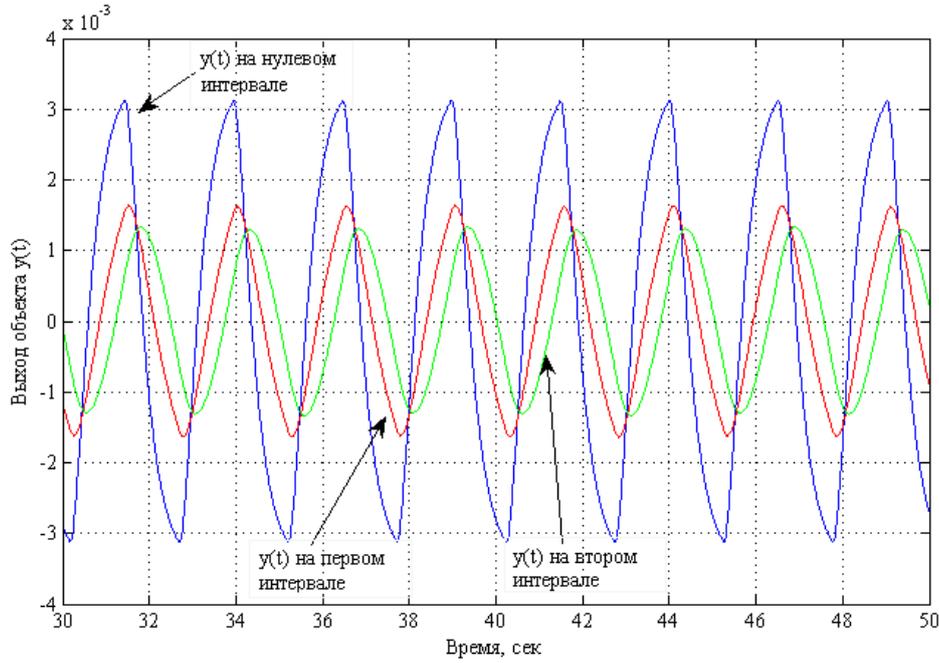


Рис. 3. Выход объекта в течение интервалов нормальной работы

модули корней полинома  $d(s)$  объекта ( $s_{d,1} = -0.2$ ,  $s_{d,2,3} = -3 \pm j4$ ), и поэтому система (22), (27) обладает запасами устойчивости.

В итоге модальный полином принял вид:  $\psi(s) = 0.2(0.012s + 1)(s + 3)(s + 11)(s + 33)(0.4s + 1)$ , в котором полином реализуемости  $\varepsilon(s) = (\frac{0.2}{s_{\delta,3}}s + 1)$ .

В течение нулевого интервала стационарности объект замкнут регулятором (27). Выходной сигнал  $y(t)$  приведен на рис. 3. Величина ошибки не превышает требуемую точность  $y^*$  (26). Система (22) (27) обладает следующими характеристиками на нулевом интервале стационарности:  $\|t_{yf}(s)\|_{\infty} = 0.0068$ , запас по фазе равен  $68.2^\circ$  и запас по модулю стремится к  $\infty$ .

### 7.3. Первый интервал стационарности объекта

В момент времени  $t_1$  коэффициенты объекта изменились и приняли значения (23). После чего была проведена адаптация регулятора согласно алгоритму 1.

В результате идентификации были найдены оценки коэффициентов полиномов объекта.

$$(28) \quad \hat{d}^{[1]}(s) = 1.04s^3 + 4.02s^2 + 8.77s + 1, \quad \hat{k}^{[1]}(s) = 0.07s + 0.283.$$

При этом параметры испытательного сигнала (6) были следующими  $v^{[1]}(t) = \sum_{i=1}^3 \rho_i^{[1]} \sin \omega_i^{[1]} t$ . Испытательные частоты  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) близки к корням полинома  $d(s)$  объекта на нулевом интервале  $I_0$  и равнялись  $\omega_1^{[1]} = 0.2$ ,  $\omega_2^{[1]} = 4$ ,  $\omega_3^{[1]} = 6$ .

С учетом условия (7) амплитуды испытательного сигнала задавались следующими:  $\rho_1^{[1]} = 7.1 \cdot 10^{-3}$ ,  $\rho_2^{[1]} = 9.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\rho_3^{[1]} = 5.8 \cdot 10^{-3}$ .

После определения оценок (28) был синтезирован регулятор

$$(29) \quad 0.0009\ddot{u}^{[1]} + 0.903\dot{u}^{[1]} + 0.34u^{[1]} = -(18.4\ddot{y}^{[1]} + 116\dot{y}^{[1]} + 202y^{[1]}).$$

Объект был замкнут этим регулятором. Выход объекта на соответствующем интервале нормальной работы объекта приведен на рис. 3. Величина ошибки не превышает требуемой  $y^*$  (26). Система (23) (29) обладает следующими характеристиками:  $\|t_{yf}(s)\|_\infty = 0.0056$ , запас по фазе равен  $74.8^\circ$  и запас по модулю стремится к  $\infty$ .

#### 7.4. Второй интервал стационарности объекта

В момент времени  $t_2$  коэффициенты объекта изменились и приняли значения (24).

В результате идентификации получены оценки коэффициентов объекта

$$\hat{d}^{[2]}(s) = 7.95s^3 + 9.27s^2 + 8.77s + 1, \quad \hat{k}^{[2]}(s) = 0.092s + 0.273.$$

Испытательный сигнал сохранен прежним.

Используя эти оценки, синтезирован регулятор

$$(30) \quad 0.0011\dot{u}^{[2]} + 0.106\dot{u}^{[2]} + 0.306u^{[2]} = -(80.2\dot{y}^{[2]} + 262y^{[2]} + 189y^{[2]}).$$

На рис. 3 приведен выход объекта при действии внешнего возмущения, точность системы соответствует требуемой  $y^*$  (26). Система (24), (30) обладает следующими характеристиками:  $\|t_{yf}(s)\|_\infty = 0.0103$ , запас по фазе равен  $78.4^\circ$  и запас по модулю стремится к  $\infty$ .

## Список литературы

1. Alexandrov A.G. Finite-frequency method of identification // 10th IFAC Symposium on System Identification. Preprints. Copenhagen, Denmark. 1994. Vol. 2. P. 523-527.
2. Alexandrov A.G. Accurate adaptive control // Proceedings of the IASTED International Conference Automation Control and Information Technology. Novosibirsk, Russia, 10-13 June 2002. Novosibirsk: ACTA Press. P. 212-217.
3. Alexandrov A.G., Orlov Yu.F. Frequency Adaptive Control of Multivariable Plants // Preprints of the 15th Triennial World Congress of the IFAC. Barcelona, Spain, 21-26 July, 2002.
4. Alexandrov A.G. Finite-frequency identification: selftuning of test signal // Preprints of the 16th IFAC World Congress. Prague, Czech Republic. 3-8 July, 2005.
5. Stability of adaptive system: passivity and aberegging analysis / Ed. by Anderson B.D.O., R.R. Bitmead C.R. Jonson, P.V. Kokotovich R. Kosut I.M.J. Mareles L. Rralu and B.D. Riedle. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1986.
6. Iserman R. Digital control systems. Springer Verlag. 1981.
7. Landau I.D. Competition, interaction, control // European Control Conference. Plenaries and mini-courses. Brussels, Belgium. 1997. P. 1-35.
8. Ljung L. System Identification. Theory for the User. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.
9. Porter B., Grossley T.R. Modal control theory and applications. London, 1972. 233 p.
10. Yakubovich V.A. Adaptive stabilization of continuous linear plants // Automation and Remote Control. 1988. Vol. 49, No. 4. P. 97-107.
11. Zhao X., Lozano R. Adaptive pole placement for continuous-time system in the presence of bounded disturbance // 12th World Congress IFAC. Preprints of papers. Sydney, Australia. 1993. Vol. 1. P. 205-210.