

# СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ

## II. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЦЕДУР $H_\infty$ -ОПТИМИЗАЦИИ\*

А. Г. Александров<sup>†</sup>, В. Н. Честнов<sup>‡</sup>

УДК 62-50  
©1998 г., 8, стр. 124-138

Автоматика и телемеханика  
Адаптивные и робастные системы

**Аннотация.** Результаты [1] развиваются для общего случая многомерных объектов, при этом дополнительно учитываются требования ограниченности управляющих воздействий в установившемся режиме и наличие полигармонических помех измерения. Вводится понятие радиуса установившегося состояния замкнутой системы и формулируется задача синтеза регулятора, обеспечивающего заданный радиус. Получены необходимые и достаточные условия её разрешимости на основе процедур  $H_\infty$ -субоптимального управления путём выбора весовых коэффициентов квадратичного функционала оптимизации соответствующей минимаксной задачи.

## 1 Введение

В первой части работы рассмотрено решение задачи синтеза регуляторов при действии полигармонических возмущений для двух видов объектов, для которых достижима сколь угодно высокая точность управления. Настоящая статья посвящена более широкому классу объектов, для которых в общем случае сколь угодно высокая точность недостижима. При этом, наряду с заданными требованиями на величины установившихся ошибок по регулируемым переменным учитываются ограничения на установившиеся величины управляющих воздействий, а также помехи измерения, принадлежащие классу ограниченных полигармонических функций с неизвестными амплитудами и частотами. Вводится понятие радиуса установившегося состояния замкнутой системы и поставленная задача формулируется как задача синтеза регулятора, обеспечивающего заданный радиус. Получены необходимые и достаточные условия её разрешимости на основе процедур  $H_\infty$ -субоптимального подхода путём выбора весовых коэффициентов квадратичного функционала оптимизации соответствующей минимаксной задачи.

---

\*Имеется начало: Часть I. Применение процедур  $LQ$ -оптимизации.

<sup>†</sup>Доктор физико-математических наук (Московский государственный институт стали и сплавов).

<sup>‡</sup>Кандидат технических наук (Институт проблем управления РАН, Москва).

Прежде чем переходить к точной формулировке рассматриваемой проблемы заметим, что основные современные математические методы синтеза асимптотически устойчивых многомерных линейных систем ( $LQ$ ,  $H_\infty$ ,  $L_1$ -оптимальное управление, модальное управление) в определённом смысле равноправны с точки зрения возможности решения проблемы обеспечения заданной точности, в связи с аксиоматическим характером используемых критериев. Это, в частности, следует из работ, посвящённых решению соответствующих обратных задач оптимального управления [2]-[4]: любой стабилизирующий регулятор является  $LQ$ ,  $H_\infty$ ,  $L_1$ -оптимальным при соответствующем выборе весовых матриц (функций) критерия оптимизации. Поэтому важно установить связь аксиоматических критериев этих теорий с трудно формализуемым характером инженерных требований к точности работы системы управления в установившемся режиме. Последнее и является главной целью настоящей работы применительно к  $H_\infty$ -теории управления [5], [6], которая оперирует с внешними возмущениями конечной энергии (исчезающими функциями времени), что не позволяет непосредственно использовать её результаты для решения проблемы точности в многомерном случае. Эта теория допускает игровую интерпретацию с квадратичным минимаксным функционалом оптимизации [7], [8] и как установлено далее выбор весовых матриц этого критерия, также как и в  $LQ$ -подходе [1], играет принципиальную роль в решении рассматриваемой задачи обеспечения заданной точности.

Заметим, что по  $H_\infty$ -теории управления имеется много работ (в основном в зарубежной литературе) и чтобы не отсылать читателя зачастую к недоступным в настоящее время источникам, работа методически построена так, чтобы минимизировать количество таких ссылок.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1\mathbf{w} + B_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = C_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = C_2\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}; \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r = A_r\mathbf{x}_r + B_r\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = C_r\mathbf{x}_r + D_r\mathbf{y}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  – вектор состояния объекта (2.1),  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  – вектор управления,  $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$  – вектор регулируемых переменных,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$  – вектор измеряемых переменных,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^\mu$  – вектор внешних неизмеряемых возмущений,  $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$  – вектор помех измерения,  $\mathbf{x}_r(t) \in \mathbf{R}^{n_r}$  – вектор состояния регулятора (2.2). Постоянные числовые матрицы  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  известны;  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$ ,  $D_r$  – неизвестные матрицы регулятора (2.2). Пары матриц  $(A, B_1)$  и  $(A, B_2)$  предполагаются стабилизируемыми, а пары  $(C_1, A)$  и  $(C_2, A)$  – детектируемыми.

Компоненты вектора внешних возмущений и помех измерения – ограниченные полигармонические функции

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^p w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}) \quad i = \overline{1, \mu}, \quad (2.3)$$

$$\eta_j(t) = \sum_{q=1}^l \eta_{jq} \sin(\tilde{\omega}_q t + \phi_{jq}) \quad j = \overline{1, m_2}. \quad (2.4)$$

Здесь амплитуды и фазы  $w_{ik}$ ,  $\psi_{ik}$  ( $i = \overline{1, \mu}$ ,  $k = \overline{1, p}$ );  $\eta_{jq}$ ,  $\phi_{jq}$  ( $j = \overline{1, m_2}$ ,  $q = \overline{1, l}$ ), а также частоты  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, p}$ ),  $\tilde{\omega}_q$  ( $q = \overline{1, l}$ ) неизвестны, однако известно, что ампли-

туды гармоник подчинены условиям

$$\sum_{k=1}^p w_{ik}^2 \leq w_i^{*2} \quad i = \overline{1, \mu}, \quad (2.5)$$

$$\sum_{q=1}^l \eta_{jq}^2 \leq \eta_j^{*2} \quad j = \overline{1, m_2}, \quad (2.6)$$

где  $p$  и  $l$  – известные числа гармоник,  $w_i^*$  ( $i = \overline{1, \mu}$ ),  $\eta_j^*$  ( $j = \overline{1, m_2}$ ) – заданные числа.

Напомним, что установившиеся ошибки и установившиеся значения управлений [1]

$$z_{i,st} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |z_i(t)| \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (2.7)$$

$$u_{i,st} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |u_i(t)| \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.8)$$

*Проблема синтеза регулятора по заданной точности* состоит в том, чтобы найти стабилизирующий регулятор (2.2) такой, что система (2.1), (2.2) при действии внешних возмущений и помех измерения из класса (2.3)-(2.6) удовлетворяет требованиям

$$z_{i,st} \leq z_i^* \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (2.9)$$

$$u_{i,st} \leq u_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.10)$$

где  $z_i^*$  ( $i = \overline{1, m_1}$ ) и  $u_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные положительные числа.

Следует отметить, что в любой системе управления установившиеся значения регулируемых переменных и управляющих воздействий, как правило, взаимосвязаны. Поэтому, для решения поставленной проблемы вполне естественно учесть требования (2.9), (2.10) в одном показателе, характеризующем точность.

**Определение 1** Величину  $r_{st}$ , определяемую выражением

$$r_{st}^2 = \sum_{i=1}^{m_1} \left( \frac{z_{i,st}}{z_i^*} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left( \frac{u_{i,st}}{u_i^*} \right)^2, \quad (2.11)$$

будем называть радиусом установившегося состояния замкнутой системы (2.1), (2.2).

**Задача 1** Для заданного числа  $\nu > 0$  найти стабилизирующий регулятор (2.2) такой, чтобы радиус установившегося состояния системы (2.1), (2.2) при действии внешних возмущений и помех измерения из класса (2.3)-(2.6) удовлетворял неравенству

$$r_{st}^2 \leq \nu^2. \quad (2.12)$$

Если такого регулятора не существует, тогда необходимо найти регулятор, обеспечивающий минимально возможное значение числа  $\nu = \nu^*$ , для которого выполнено требование (2.12). (Условие (2.12) означает, что множество значений  $z_{i,st}$  ( $i = \overline{1, m_1}$ ) и  $u_{i,st}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) образует замкнутую область гиперэллипсоида.)

Решение задачи 1 опирается на использование процедур  $H_\infty$ -подхода путём выбора весовых коэффициентов соответствующего минимаксного квадратичного функционала оптимизации и обобщает результаты [9], [10]. При этом, как и в [1], центральную роль играют частотные матричные неравенства, которым удовлетворяют передаточные матрицы замкнутой оптимальной системы, связывающие регулируемые переменные и управляющие воздействия с внешними возмущениями и помехами измерения.

### 3 Частотные свойства и точность $H_\infty$ -субоптимальных систем с регуляторами состояния

Пусть вектор состояния объекта (2.1) полностью измеряется, а помехи отсутствуют

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \quad (C_2 = I, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}). \quad (3.1)$$

В этом случае объект (2.1) может отличаться от объектов первого вида из работы [1] существенным неравенством  $B_1 \neq B_2$ .

Будем искать закон управления в виде

$$\mathbf{u} = K\mathbf{x}, \quad K = -R^{-1}B_2^T P, \quad (3.2)$$

где матрица  $P = P^T \geq 0$  удовлетворяет матричному уравнению Лурье-Риккати

$$A^T P + P A - P B_2 R^{-1} B_2^T P + \gamma^{-2} P B_1 B_1^T P = -C_1^T Q C_1. \quad (3.3)$$

Здесь  $Q > 0$ ,  $R > 0$ ,  $\gamma > 0$  – задаваемые проектировщиком весовые матрицы и число.

Известно, что закон управления (3.2) является оптимальным в смысле следующего минимаксного квадратичного функционала [7], [8]

$$J = \min_u \max_w \int_0^\infty (\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w}) dt, \quad (3.4)$$

где минимум берётся по всем  $\mathbf{u} \in L_2[0, \infty)$ , а максимум по всем  $\mathbf{w} \in L_2[0, \infty)$ , при этом наихудшее возмущение (в  $L_2[0, \infty)$  смысле) имеет вид

$$\mathbf{w}_b = \gamma^{-2} B_1^T P \mathbf{x}. \quad (3.5)$$

Отметим, что уравнение (3.3) отличается от соответствующего уравнения Лурье-Риккати  $H_\infty$ -субоптимального подхода [5] неединичными положительно определёнными весовыми матрицами  $Q \neq I$  и  $R \neq I$ , что существенно для решения поставленной задачи 1.

В работе [1] были изучены частотные свойства замкнутых  $LQ$ -оптимальных систем. Аналогичные результаты имеют место и для оптимизации по минимаксному критерию (3.4). Обозначим  $A_c = A + B_2 K$  и определим следующие передаточные матрицы замкнутой системы (2.1), (3.2)-(3.4)

$$T_{zw}(s) = C_1(sI - A_c)^{-1} B_1, \quad T_{uw}(s) = K(sI - A_c)^{-1} B_1, \quad T_w(s) = \gamma^{-2} B_1^T P(sI - A_c)^{-1} B_1, \quad (3.6)$$

которые связывают внешнее возмущение  $\mathbf{w}$  с исходным вектором регулируемых переменных объекта  $\mathbf{z}$ , вектором управления  $\mathbf{u}$  и вектором наихудших возмущений (3.5), соответственно.

**Теорема 1** *Передаточные матрицы (3.6) оптимальной системы (2.1), (3.2)-(3.4) удовлетворяют следующим свойствам [9]:*

а) частотному тождеству (условию  $\gamma$ -оптимальности в частотной форме)

$$\begin{aligned} & [I - T_w(-j\omega)]^T \gamma^2 [I - T_w(j\omega)] = \\ & = \gamma^2 I - T_{zw}^T(-j\omega) Q T_{zw}(j\omega) - T_{uw}^T(-j\omega) R T_{uw}(j\omega), \quad \omega \in [0, \infty); \end{aligned} \quad (3.7)$$

б) частотным матричным неравенствам

$$T_{zw}^T(-j\omega)QT_{zw}(j\omega) + T_{uw}^T(-j\omega)RT_{uw}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty); \quad (3.8)$$

$$[I - T_w(-j\omega)]^T[I - T_w(j\omega)] \leq I, \quad T_w^T(-j\omega)T_w(j\omega) \leq 4I, \quad \omega \in [0, \infty); \quad (3.9)$$

в) при  $\mu = 1$  годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики  $T_w(j\omega)$  не покидает круга радиуса 1 с центром в точке  $(1, j0)$  для всех частот  $\omega \in [0, \infty)$  и, следовательно, для всех частот  $|T_w(j\omega)| \leq 2$ .

Доказательство теоремы 1 и всех последующих утверждений работы приведено в Приложении. Отметим, что тождество (3.7) в другой форме приведено в [11].

Сформулируем теперь важное утверждение, которое выражает необходимые и достаточные условия выполнения частотных свойств теоремы 1 и, в частности, неравенства (3.8), которое в сущности другая форма записи целевого условия  $H_\infty$ -подхода [9].

**Теорема 2** Для выполнения частотного матричного неравенства (3.8) необходимо и достаточно чтобы закон управления формировался на основе соотношений (3.2), (3.3).

Перейдём теперь к анализу точности систем, регуляторы состояния которых построены на основе  $H_\infty$ -подхода. Далее ограничимся случаем диагональных весовых матриц критерия (3.4)

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{m_1}], \quad q_i > 0 \quad i = \overline{1, m_1}, \\ R &= \text{diag}[r_1, r_2, \dots, r_m], \quad r_i > 0 \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из частотного матричного неравенства (3.8) и леммы об установившихся значениях работы [1] приходим к следующему главному результату этого раздела.

**Теорема 3** Установившиеся ошибки и установившиеся значения управляющих воздействий оптимальной системы (2.1), (3.2)-(3.4) при действии полигармонических возмущений из класса (2.3), (2.5) принадлежат множеству, описываемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{m_1} q_i z_{i,st}^2 + \sum_{i=1}^m r_i u_{i,st}^2 \leq \gamma^2 p \|\mathbf{w}^*\|^2, \quad (3.11)$$

где  $\|\mathbf{w}^*\|$  – евклидова норма вектора  $\mathbf{w}^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_\mu^*]^T$ , компоненты которого фигурируют в правых частях неравенств (2.5), при этом последняя оценка достижима.

Оценка (3.11) позволяет осуществить выбор весовых коэффициентов матриц  $Q$  и  $R$  так, что регулятор (3.2), (3.3) разрешает задачу 1 для объекта (2.1), (3.1).

**Следствие 1** Пусть весовые матрицы (3.10) критерия (3.4) удовлетворяют условиям

$$q_i \geq \frac{p \|\mathbf{w}^*\|^2}{(z_i^*)^2} \quad i = \overline{1, m_1}, \quad r_i \geq \frac{p \|\mathbf{w}^*\|^2}{(u_i^*)^2} \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.12)$$

где  $q_i$  и  $r_i$  ограничены сверху. Тогда радиус установившегося состояния оптимальной системы (2.1), (3.2)-(3.4) удовлетворяет неравенству

$$r_{st}^2 = \sum_{i=1}^{m_1} \left( \frac{z_{i,st}}{z_i^*} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left( \frac{u_{i,st}}{u_i^*} \right)^2 \leq \gamma^2, \quad (3.13)$$

следовательно, число  $\nu$  в задаче 1 равно числу  $\gamma$  в задаче оптимизации по минимаксному критерию (3.4) и таким образом,  $\nu^* = \gamma^*$  – минимальному значению  $\gamma$ , при котором существует неотрицательно определенное решение  $P \geq 0$  уравнения (3.3).

Доказательство следствия очевидно, поскольку в силу (3.12) из (3.11) с учётом определения 1 следует (3.13).

**Замечание 1** Если  $B_1 = B_2$  и  $R = I$ , то при всех  $\gamma^2 > 1$  уравнение (3.3) является обычным уравнением Риккати  $LQ$ -оптимизации, решение которого существует. В этом случае полагая  $\gamma \rightarrow 1$  и выбирая матрицу  $Q$  из условия (3.12), заключаем, что будут выполнены требования (2.9) – результат аналогичный следствию 1 работы [1]. Кроме того, из (3.11) в этом случае дополнительно следует, что установившиеся значения управляющих воздействий будут удовлетворять неравенству  $\sum_{i=1}^m u_{i,st}^2 \leq p \|\mathbf{w}^*\|^2$ . ■

## 4 Точность $H_\infty$ -субоптимальных систем с регуляторами по выходу

Пусть измеряемый выход объекта (2.1) описывается уравнением

$$\mathbf{y} = C_2 \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \quad (4.1)$$

где  $\boldsymbol{\eta}$  – вектор помех измерения из класса (2.4), (2.6).

Будем искать закон управления в виде

$$\mathbf{u} = K \mathbf{x}_r, \quad K = -R^{-1} B_2^T P, \quad (4.2)$$

где  $P = P^T \geq 0$  – решение уравнения (3.3),  $\mathbf{x}_r \in \mathbf{R}^n$  – вектор состояния наблюдателя

$$\dot{\mathbf{x}}_r = A \mathbf{x}_r + B_2 \mathbf{u} + B_1 \mathbf{w}_r + K_f (\mathbf{y} - C_2 \mathbf{x}_r), \quad (4.3)$$

в котором  $\mathbf{w}_r$  – оценка возмущения  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{w}_r = K_w \mathbf{x}_r, \quad K_w = \gamma^{-2} B_1^T P, \quad (4.4)$$

$K_f$  – матрица коэффициентов передачи наблюдателя

$$K_f = (I - \gamma^{-2} Y P)^{-1} Y C_2^T, \quad (4.5)$$

где  $Y > 0$  – положительно определённое решение уравнения Лурье-Риккати

$$AY + YA^T + \gamma^{-2} Y C_1^T Q C_1 Y - Y C_2^T C_2 Y = -B_1 B_1^T, \quad (4.6)$$

и пусть выполнено следующее условие

$$\lambda_{\max}(PY) < \gamma^2, \quad (4.7)$$

где  $\lambda_{\max}(M)$  – максимальное собственное значение матрицы  $M$ .

Заметим, что соотношения (4.2)-(4.7) при единичных весовых матрицах  $Q$  и  $R$  соответствуют проблеме  $H_\infty$ -субоптимального управления по измеряемому выходу [5].

Введём расширенный вектор  $\bar{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T$  и обозначим  $T_{z\bar{\mathbf{w}}}(s)$  и  $T_{u\bar{\mathbf{w}}}(s)$  – передаточные матрицы замкнутой системы (2.1), (4.2)-(4.7) от  $\bar{\mathbf{w}}$  к  $\mathbf{z}$  и от  $\bar{\mathbf{w}}$  к  $\mathbf{u}$ , соответственно. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4** Для выполнения частотного матричного неравенства

$$T_{z\bar{w}}^T(-j\omega)QT_{z\bar{w}}(j\omega) + T_{u\bar{w}}^T(-j\omega)RT_{u\bar{w}}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty) \quad (4.8)$$

необходимо и достаточно, чтобы закон управления формировался на основе соотношений (4.2)-(4.6) и было выполнено условие (4.7).

Переходя к анализу точности системы (2.1), (4.2)-(4.7), отметим, что частотное матричное неравенство (4.8) имеет форму аналогичную (3.8). Из этого неравенства при диагональной структуре (3.10) весовых матриц  $Q$  и  $R$  и леммы об установившихся значениях первой части работы [1] вытекает следующий результат.

**Теорема 5** Установившиеся ошибки и установившиеся значения управляющих воздействий системы (2.1), (4.2)-(4.7) при действии полигармонических возмущений и помех из класса (2.3)-(2.6) принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{m_1} q_i z_{i,st}^2 + \sum_{i=1}^m r_i u_{i,st}^2 \leq \gamma^2 (p+l) \|\bar{\mathbf{w}}^*\|^2, \quad (4.9)$$

где  $\|\bar{\mathbf{w}}^*\|$  – евклидова норма вектора  $\bar{\mathbf{w}}^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_\mu^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_{m_2}^*]^T = [\mathbf{w}^{*T}, \boldsymbol{\eta}^{*T}]^T$ , компоненты которого фигурируют в правых частях неравенств (2.5), (2.6).

Наряду с (3.11) последнее неравенство позволяет выбрать весовые коэффициенты матриц  $Q$  и  $R$ , при которых разрешается задача 1. Действительно, пусть элементы этих матриц (ограниченные сверху) удовлетворяют условиям

$$q_i \geq \frac{(p+l)\|\bar{\mathbf{w}}^*\|^2}{(z_i^*)^2} \quad i = \overline{1, m_1}; \quad r_i \geq \frac{(p+l)\|\bar{\mathbf{w}}^*\|^2}{(u_i^*)^2} \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.10)$$

тогда из неравенства (4.9) с учётом (4.10) получим аналогичный следствию 1 результат.

**Следствие 2** Пусть весовые матрицы (3.10) удовлетворяют условию (4.10). Тогда радиус установившегося состояния системы (2.1), (4.2)-(4.7) удовлетворяет неравенству (3.13), т. е. в задаче 1  $\nu = \gamma$ , а  $\nu^* = \gamma^*$  – минимальная величина  $\gamma$ , для которой существуют решения  $P \geq 0$  и  $Y > 0$  уравнений (3.3), (4.6) и выполнено условие (4.7).

## 5 Модификация регуляторов по выходу

Как показало решение практических задач, регулятор по выходу (4.2)-(4.6) на базе наблюдателя, несмотря на необходимый и достаточный характер утверждений предыдущего раздела, может приводить к затянутым переходным процессам в замкнутой системе (2.1), (4.2)-(4.6), хотя регулятор состояния (3.2), (3.3) обеспечивает приемлемое время регулирования. Математически это выражается в асимметрии уравнений Лурье-Риккати (3.3) и (4.6) для регулятора и наблюдателя, соответственно (в уравнении (3.3) в правой части имеется весовая матрица  $Q$ , влияющая на динамические свойства системы с регулятором состояния (3.2), тогда как в правой части уравнения (4.6) такой матрицы нет, что не позволяет оказывать влияние на динамические свойства наблюдателя). С целью устранения этого недостатка представим дифференциальное уравнение состояния объекта (2.1) в следующем эквивалентном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \tilde{B}_1 \tilde{\mathbf{w}} + B_2 \mathbf{u}, \quad \tilde{B}_1 = B_1 L^{1/2}, \quad \tilde{\mathbf{w}} = L^{-1/2} \mathbf{w}, \quad (5.1)$$

где  $L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_\mu)$  – диагональная положительно определённая весовая матрица. В этом случае, как нетрудно видеть, процедура синтеза регулятора по выходу с учётом нового возмущения  $\tilde{\mathbf{w}}$  не изменится с точностью до замены во всех соотношениях предыдущего раздела матрицы  $B_1$  матрицей  $\tilde{B}_1 = B_1 L^{1/2}$ . Тогда матрицу  $K$  закона управления (4.2) будем строить исходя из решения уравнения Лурье-Риккати

$$A^T P + PA - PB_2 R^{-1} B_2^T P + \gamma^{-2} P B_1 L B_1^T P = -C_1^T Q C_1, \quad (5.2)$$

а матрицу  $K_f$  наблюдателя (4.3) – исходя из решения уравнения

$$AY + YA^T + \gamma^{-2} Y C_1^T Q C_1 Y - Y C_2^T C_2 Y = -B_1 L B_1^T, \quad (5.3)$$

при этом будем также полагать выполненным условие (4.7) для решений  $P \geq 0$  и  $Y > 0$  уравнений (5.2), (5.3). В рассматриваемом случае искомые матрицы регулятора (2.2) будут иметь вид

$$A_r = A - B_2 R^{-1} B_2^T P + \gamma^{-2} B_1 L B_1^T P - K_f C_2, \quad B_r = K_f, \quad C_r = -R^{-1} B_2^T P, \quad D_r = 0, \quad (5.4)$$

где матрица  $K_f$  определяется из соотношения (4.5) с учётом решений уравнений (5.2), (5.3). Легко видеть, что передаточные матрицы замкнутой системы (5.1), (4.1), (2.2), (5.4)  $T_{z\bar{w}}(s)$  и  $T_{u\bar{w}}(s)$  (от  $\bar{\mathbf{w}}$  к  $\mathbf{z}$  и от  $\bar{\mathbf{w}}$  к  $\mathbf{u}$ , соответственно, где  $\bar{\mathbf{w}} = [\tilde{\mathbf{w}}^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T$ ) будут удовлетворять частотному неравенству (4.8). Кроме того, суммы квадратов амплитуд гармоник по каждой компоненте вектора  $\tilde{\mathbf{w}}$  [ $\tilde{w}_i(t) = \sum_{k=1}^p \tilde{w}_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik})$  ( $i = \overline{1, \mu}$ )] будут удовлетворять условиям [в силу (2.5)]

$$\sum_{k=1}^p \tilde{w}_{ik}^2 = \sum_{k=1}^p (l_i^{-1/2} w_{ik})^2 = l_i^{-1} \sum_{k=1}^p w_{ik}^2 \leq l_i^{-1} w_i^{*2} \quad i = \overline{1, \mu}. \quad (5.5)$$

Тогда частотное неравенство (4.8) и лемма об установившихся значениях работы [1] приводят к следующему аналогу неравенства (4.9) теоремы 5

$$\sum_{i=1}^{m_1} q_i z_{i,st}^2 + \sum_{i=1}^m r_i u_{i,st}^2 \leq \gamma^2 (p + l) \left( \sum_{i=1}^{\mu} l_i^{-1} w_i^{*2} + \|\boldsymbol{\eta}^*\|^2 \right). \quad (5.6)$$

Заметим, что если при синтезе регулятора (2.2), (5.4) весовые матрицы  $Q$  и  $R$  выбирать из условий (4.10), то радиус установившегося состояния замкнутой системы (2.1), (2.2), (5.4) будет удовлетворять условию

$$r_{st}^2 \leq \nu^2 = \gamma^{*2} \frac{\sum_{i=1}^{\mu} l_i^{-1} w_i^{*2} + \|\boldsymbol{\eta}^*\|^2}{\|\mathbf{w}^*\|^2 + \|\boldsymbol{\eta}^*\|^2}, \quad (5.7)$$

где  $\gamma^*$  – минимальное значение  $\gamma$ , при котором существуют решения  $P$  и  $Y$  уравнений (5.2), (5.3) и выполнено условие (4.7). Следует отметить, что при  $L \neq I$  значение  $\gamma^*$  в неравенстве (5.7), вообще говоря, отличается от значения  $\gamma^*$ , которое фигурирует в утверждении следствия 2. Выбор весовой матрицы  $L$  в данной работе не обсуждается, однако, как показало решение конкретных технических задач, увеличение её элементов, как правило, приводит к повышению быстродействия замкнутой системы.



## 6 Пример

Рассмотрим гиросплатформу, уравнения движения которой, измеряемые и регулируемые переменные, а также постановка задачи синтеза регулятора по выходу приведены в [1]. При этом как и в [1] помехи измерения учитывать не будем. Для решения поставленной задачи синтеза воспользуемся результатами, представленными в разделе 5. Весовые коэффициенты матрицы  $Q$  выберем в соответствии с равенствами (4.10), которые в данном случае ( $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ ,  $l = 0$ ) примут вид (3.12) (или (4.3) из [1]). Это даст те же значения весовых коэффициентов, что и в [1]  $q_1 = q_2 = 8 \cdot 10^{12}$ . Матрицу  $R$  выберем также из равенств (4.10), которые при отсутствии помех имеют вид (3.12), положив  $(u_1^*)^2 = (u_2^*)^2 = p \|\mathbf{w}^*\|^2 = 2 \cdot 10^6$ , что приведёт к  $r_1 = r_2 = 1$ .

При построении матриц (5.4) регулятора, уравнения (5.2) и (5.3) решались с матрицей  $L^{1/2} = 3,3 \cdot 10^8 \cdot I$ , а параметр  $\gamma^*$ , гарантирующий разрешимость данных уравнений и выполнение условия (4.7), получился равным  $3,8993 \cdot 10^8$ . В результате решения задачи синтеза получены следующие матрицы регулятора (2.2), обеспечивающие в (5.7)  $\nu^2 = (1,1816)^2$ .

$$A_r = \begin{pmatrix} 0,000000 & -3,376 \cdot 10^8 & 0,000000 & 3,562 \cdot 10^7 & 9,400000 & -1,710000 \\ 1,000000 & -1,200 \cdot 10^5 & 0,000000 & 1,113 \cdot 10^4 & -3,420 \cdot 10^{-3} & -4,700 \cdot 10^{-3} \\ 0,000000 & -3,343 \cdot 10^8 & 0,000000 & 3,231 \cdot 10^7 & 5,000000 & -4,330000 \\ 0,000000 & 1,114 \cdot 10^4 & 1,000000 & -4,166 \cdot 10^3 & -8,660 \cdot 10^{-3} & -2,500 \cdot 10^{-3} \\ -1,027 \cdot 10^4 & -4,466 \cdot 10^{10} & -3,263 \cdot 10^2 & 4,693 \cdot 10^9 & -7,304 \cdot 10^2 & 1,185 \cdot 10^2 \\ -1,911 \cdot 10^3 & 2,998 \cdot 10^{10} & 1,045 \cdot 10^4 & -2,428 \cdot 10^9 & 1,328 \cdot 10^2 & -4,925 \cdot 10^2 \end{pmatrix},$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 3,376 \cdot 10^8 & -3,562 \cdot 10^7 \\ 1,196 \cdot 10^5 & -1,113 \cdot 10^4 \\ 3,343 \cdot 10^8 & -3,232 \cdot 10^7 \\ -1,113 \cdot 10^4 & 3,765 \cdot 10^3 \\ 4,466 \cdot 10^{10} & -4,693 \cdot 10^9 \\ -2,998 \cdot 10^{10} & 2,428 \cdot 10^9 \end{pmatrix}, \quad D_r = 0,$$

$$C_r = \begin{pmatrix} -1,027 \cdot 10^4 & -4,554 \cdot 10^4 & -3,263 \cdot 10^2 & 6,607 \cdot 10^4 & -7,229 \cdot 10^2 & 1,241 \cdot 10^2 \\ -1,911 \cdot 10^3 & -1,601 \cdot 10^2 & 1,045 \cdot 10^4 & 9,350 \cdot 10^4 & 1,241 \cdot 10^2 & -4,962 \cdot 10^2 \end{pmatrix}.$$

Графики переходных процессов по регулируемым переменным и управляющим воздействиям в замкнутой системе при действии полигармонических внешних возмущений  $w_1(t) = 410 \sin 5t + 565 \cos 7t$ ,  $w_2(t) = 565 \sin 5t + 410 \sin 7t$  приведены на рис. 1 (а, б). Из графиков видно, что заданные требования к точности (2.9) ( $z_1^* = z_2^* = 5 \cdot 10^{-4}$ ) выполнены. На рис. 2 (а, б) также показана реакция замкнутой системы на ступенчатые внешние возмущения  $w_1 = w_2 = 1000$ . Заметим, что применение регулятора по выходу (4.2)-(4.7) приводит в данном случае к затянутым переходным процессам в замкнутой системе.

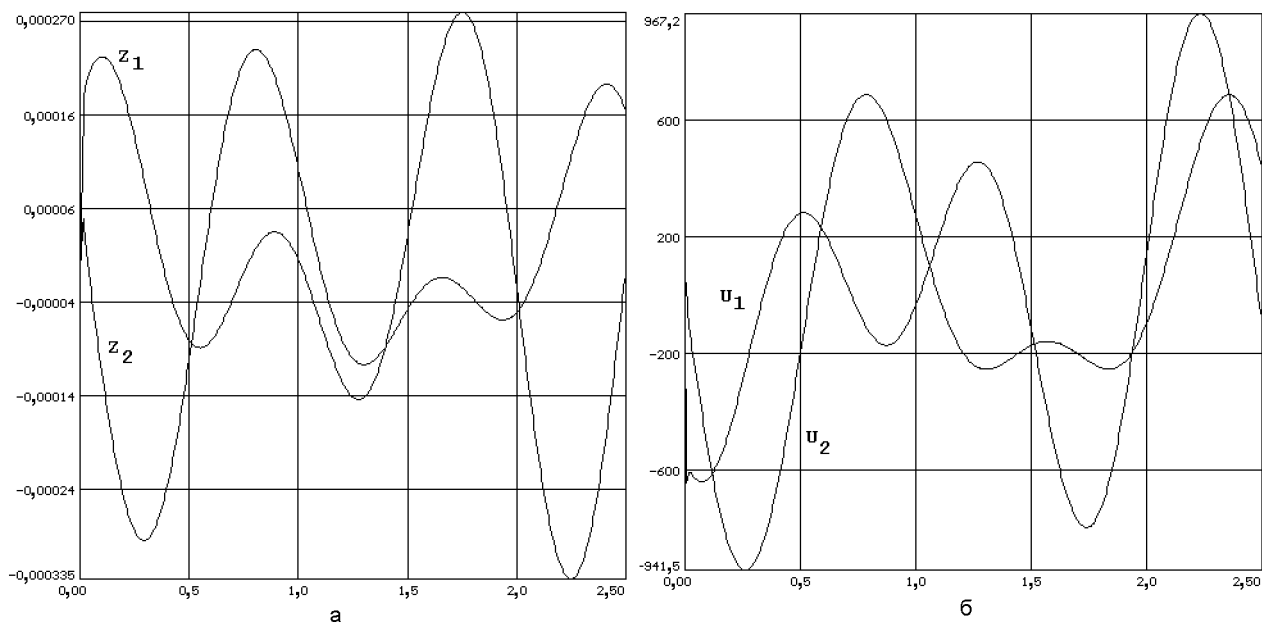


Рис 1. а, б

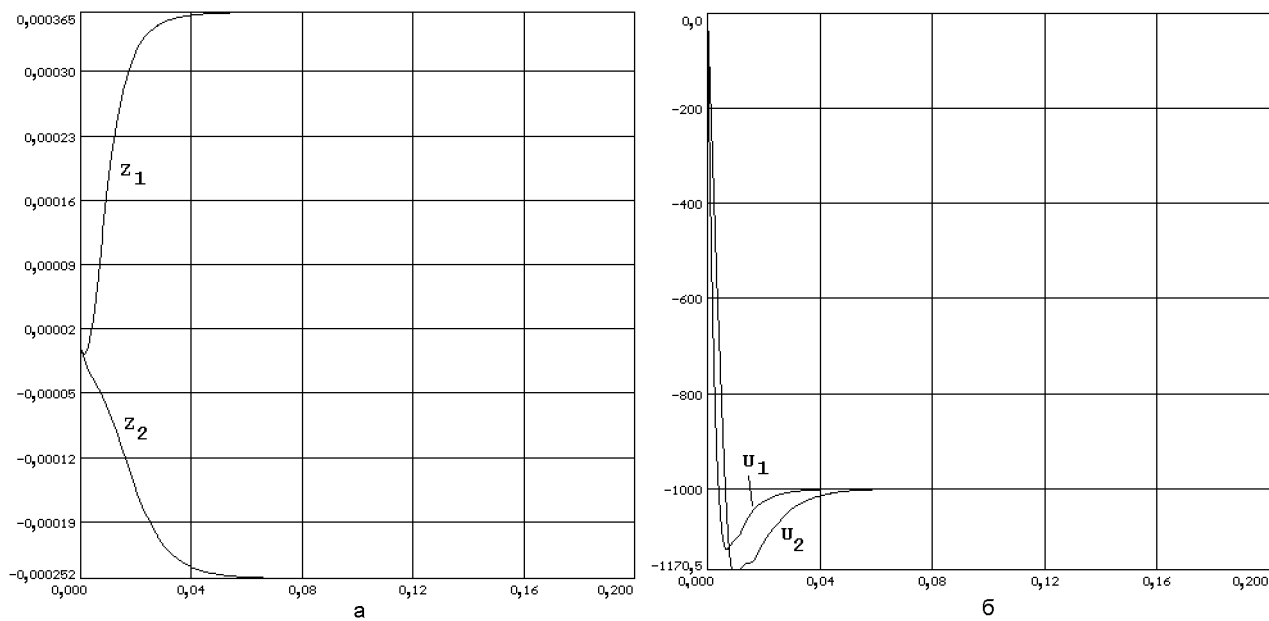


Рис 2. а, б

## П.1 Доказательство теоремы 1

Вычитая из левой и правой части (3.3)  $PB_2R^{-1}B_2^TP$  с учётом (3.2) и обозначая  $A_c = A + B_2K$ , придём к уравнению  $A_c^TP + PA_c + \gamma^{-2}PB_1B_1^TP = -C_1^TQC_1 - PB_2R^{-1}B_2^TP$ . Умножая последнее выражение на  $-1$ , прибавляя и вычитая из левой части  $sP$ , а также умножая полученное выражение слева на  $B_1^T(-sI - A_c^T)^{-1}$ , а справа на  $(sI - A_c)^{-1}B_1$  с учётом (3.2), (3.6), получим тождество (3.7) (после добавления к обеим частям  $\gamma^2I$  при  $s = j\omega$ ). Из тождества (3.7) в силу неотрицательной определённости его левой части следует неравенство (3.8), а в силу отрицательной полуопределённости второго и третьего слагаемых правой части вытекает первое неравенство (3.9). Докажем теперь второе неравенство (3.9). Из первого неравенства (3.9) следует, что  $H_\infty$ -норма [6], [11] передаточной матрицы  $\|I + T_w\|_\infty \leq 1$ , откуда используя неравенство треугольника, получим  $\|T_w\|_\infty = \|-T_w\|_\infty = \|I - T_w - I\|_\infty \leq \|I - T_w\|_\infty + \|I\|_\infty \leq 2$ , что эквивалентно доказываемому неравенству. Доказательство утверждений свойства в) элементарно и следует при  $\mu = 1$  из первого и второго неравенств (3.9), соответственно.

## П.2 Вспомогательная конструкция

Для доказательства теоремы 2, а также ряда последующих утверждений работы нам потребуются следующие вспомогательные результаты. Пусть  $T_{\bar{z}\bar{w}}(s) - (r \times \rho)$ -произвольная устойчивая передаточная матрица, связывающая некоторый вектор выходных переменных  $\bar{z}$  с вектором входных воздействий  $\bar{w}$

$$\bar{z}(s) = T_{\bar{z}\bar{w}}(s)\bar{w}(s), \quad (\text{П.1})$$

а матрицы  $\tilde{A}$ ,  $B$ ,  $C$  соответствуют её реализации в пространстве состояний ( $\tilde{A}$  – устойчива)

$$T_{\bar{z}\bar{w}}(s) = C(sI - \tilde{A})^{-1}B. \quad (\text{П.2})$$

Следующий результат – простая модификация известной леммы об ограниченной вещественности, которая является прямым следствием частотной теоремы В.А. Якубовича [12], [13].

**Лемма 1** Пусть  $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T$  – некоторая симметричная положительно определённая матрица,  $\gamma > 0$  – некоторое число. Тогда для выполнения частотного матричного неравенства

$$T_{\bar{z}\bar{w}}^T(-j\omega)\tilde{Q}T_{\bar{z}\bar{w}}(j\omega) \leq \gamma^2I, \quad \omega \in [0, \infty) \quad (\text{П.3})$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало неотрицательно определённое решение  $P \geq 0$  матричного уравнения Лурье-Риккати

$$\tilde{A}^TP + P\tilde{A} + \gamma^{-2}PBVB^TP = -C^T\tilde{Q}C. \quad (\text{П.4})$$

(Легко видеть, что при  $\tilde{Q} = I$  неравенство (П.3) принимает форму целевого условия субоптимального  $H_\infty$ -подхода [5], [6], [11].)

**Доказательство леммы.** Покажем достаточность. Пусть существует решение  $P \geq 0$  уравнения (П.4). Добавляя и вычитая из левой его части  $sP$  и умножая слева  $B^T(-sI - \tilde{A}^T)^{-1}$ , а справа на  $(sI - \tilde{A})^{-1}B$ , получим (после добавления к обеим частям  $\gamma^2I$ ) тождество

$$[I - T_{\bar{w}}(-s)]^T\gamma^2[I - T_{\bar{w}}(s)] = \gamma^2I - T_{\bar{z}\bar{w}}^T(-s)\tilde{Q}T_{\bar{z}\bar{w}}(s), \quad (\text{П.5})$$

где  $T_{\bar{w}}(s) = \gamma^{-2} B^T P (sI - \tilde{A})^{-1} B$ . Из данного тождества при  $s = j\omega$  в силу неотрицательной определённости его левой части следует (П.3). Необходимость следует из частотной теоремы В.А. Якубовича (см. также лемму 5 из [13]). Действительно, уравнение (П.4) эквивалентно следующей системе уравнений Лурье [12]

$$\tilde{A}^T P + P \tilde{A} = -C^T \tilde{Q} C - H H^T, \quad P B = H \gamma, \quad (\text{П.6})$$

а связанная с этой системой эрмитова форма имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\mathbf{x}^* C^T \tilde{Q} C \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \gamma^2 \mathbf{u} \quad (\text{П.7})$$

( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  – произвольные комплексные векторы соответствующей размерности,  $*$  – означает эрмитово сопряжение). В соответствии с частотной теоремой [12] необходимое и достаточное условие существования симметрической матрицы  $P$ , удовлетворяющей (П.6) (а следовательно и (П.4)) состоит в выполнении для всех частот  $\omega$  неравенства  $G[(j\omega I - \tilde{A})^{-1} B \mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq 0$  при всех  $\mathbf{u}$ , которое с учётом (П.7) принимает вид (П.3). Неотрицательная определённость  $P$  следует из того факта, что первое уравнение (П.6) является уравнением Ляпунова (при известной матрице  $H$ , процедура определения которой приведена в [12]) относительно этой матрицы с устойчивой  $\tilde{A}$ . (Заметим, что если  $\tilde{Q} > 0$  и пара  $(C, \tilde{A})$  наблюдаема, то  $P > 0$  [14].)

Предположим теперь, что входной сигнал системы (П.1) принадлежит классу (2.3), (2.5) (с заменой размерности  $\mu$  на  $\rho$ ), а весовая матрица в неравенстве (П.3) диагональна  $\tilde{Q} = \text{diag}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_r)$ ,  $\tilde{q}_i > 0$  ( $i = \overline{1, r}$ ). Введём вектор  $\bar{\mathbf{w}}^* = [\bar{w}_1^*, \bar{w}_2^*, \dots, \bar{w}_\rho^*]^T$ , компоненты которого фигурируют в правых частях аналогов неравенств (2.5) для входного сигнала  $\bar{\mathbf{w}}$ , и определим евклидову норму этого вектора  $\|\bar{\mathbf{w}}^*\| = \sqrt{\bar{\mathbf{w}}^{*T} \bar{\mathbf{w}}^*}$ . Тогда из частотного неравенства (П.3) и леммы об установившихся значениях первой части работы [1] следует, что установившиеся значения выходных переменных устойчивой системы (П.1) принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^r \tilde{q}_i \bar{z}_{i, st}^2 \leq \gamma^2 p \|\bar{\mathbf{w}}^*\|^2, \quad (\text{П.8})$$

при этом последняя оценка является достижимой.

### П.3 Доказательство теоремы 2

Переходя непосредственно к доказательству теоремы 2, перепишем матричное неравенство (3.8) в эквивалентной форме

$$\begin{pmatrix} T_{zw}(-j\omega) \\ T_{uw}(-j\omega) \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_{zw}(j\omega) \\ T_{uw}(j\omega) \end{pmatrix} \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (\text{П.9})$$

и определим новый вектор выходных регулируемых переменных замкнутой системы (2.1), (3.2) соотношением

$$\bar{\mathbf{z}} = [\mathbf{z}^T, \mathbf{u}^T]^T = C \mathbf{x}, \quad C = [C_1^T, K^T]^T, \quad (\text{П.10})$$

где  $K$  – неизвестная пока матрица регулятора состояния (3.2). Тогда уравнения замкнутой системы (2.1), (3.2) можно представить в виде (П.1), где передаточная матрица (П.2) замкнутой системы (от  $\mathbf{w}$  к  $\bar{\mathbf{z}}$ , здесь  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$ )

$$T_{\bar{z}\bar{w}}(s) = C(sI - \tilde{A})^{-1} B, \quad \tilde{A} = A_c = A + B_2 K, \quad B = B_1, \quad (\text{П.11})$$

а матрица  $C$  имеет вид (П.10).

Легко видеть, что частотное матричное неравенство (П.9) формально совпадает с (П.3), если принять во внимание очевидные соотношения

$$T_{\bar{z}\bar{w}}(s) = \begin{pmatrix} T_{z\bar{w}}(s) \\ T_{u\bar{w}}(s) \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = w. \quad (\text{П.12})$$

Дальнейший ход доказательства использует в основном подход, предложенный в работе [15]. Предположив, что  $u = Kx$  – стабилизирующий закон управления, в соответствии с леммой заключаем, что необходимым и достаточным условием выполнения частотного матричного неравенства (П.9) (а следовательно, и (3.8)) является существование неотрицательно определённого решения  $P \geq 0$  уравнения Лурье-Риккати (П.4), которое с учётом (П.10)-(П.12) примет вид

$$(A + B_2K)^T P + P(A + B_2K) + \gamma^{-2} P B_1 B_1^T P = -C_1^T Q C_1 - K^T R K. \quad (\text{П.13})$$

Добавляя и вычитая из левой части этого выражения  $P B_2 R^{-1} B_2^T P$ , после несложных преобразований получим

$$A^T P + P A + \gamma^{-2} P B_1 B_1^T P - P B_2 R^{-1} B_2^T P + [R K + B_2^T P]^T R^{-1} [R K + B_2^T P] = -C_1^T Q C_1. \quad (\text{П.14})$$

Легко видеть, что если в (П.14) выбрать матрицу  $K$  в соответствии со вторым соотношением (3.2), то получим уравнение (3.3). Покажем теперь, что матрица замкнутой системы  $A_c = A + B_2 K$  устойчива. Для этого представим уравнение (П.13) (полагая, что существует его неотрицательно определённое решение  $P$ ) в виде неоднородного матричного уравнения Ляпунова  $A_c^T P + P A_c = -Q_1$ , где  $Q_1 = \gamma^{-2} P B_1 B_1^T P + C_1^T Q C_1 + K^T R K$  – известная неотрицательно определённая матрица. В силу детектируемости пары  $(C_1, A)$  и положительной определённости  $Q > 0$  будет детектируемой пара  $(Q^{1/2} C_1, A)$ , а также пара  $(Q_1^{1/2}, A + B_2 K)$  при  $Q > 0$ ,  $R > 0$  (см., например, [14], теорема 3.6). Отсюда по теореме Ляпунова (см. [14], лемма 12.2) заключаем, что матрица  $A_c$  устойчива. Таким образом, выполнены все условия леммы, что завершает доказательство.

## П.4 Доказательство теоремы 3

Теорема следует из частотного неравенства (3.8), которое формально совпадает с (П.3) в силу (П.9)-(П.12), а также оценки (П.8). Достижимость оценки (3.11) вытекает из достижимости оценки (П.8), а также необходимого и достаточного характера частотного неравенства (3.8). Последнее означает, что найдётся такое значение частоты  $\omega$  и такое значение  $\gamma^*$ , что левая часть тождества (3.7) будет вырожденной эрмитовой матрицей и, следовательно, в неравенстве (3.8) достигается знак точного равенства.

## П.5 Доказательство теоремы 4

Доказательство следует, в основном, работе [15]. Полагая, что матрицы  $K$ ,  $K_w$ ,  $K_f$  из соотношений (4.2)-(4.4) неизвестны, введём расширенный вектор состояния замкнутой системы (2.1), (4.2)-(4.4)  $\tilde{x} = [x^T, e^T]^T$ ,  $e = x_r - x$ , расширенный вектор внешних воздействий  $\bar{w} = [w^T, \eta^T]^T$ , а также вектор выходных переменных  $\bar{z}$ , определяемых соотношением (П.10). Тогда уравнения состояния замкнутой системы (2.1), (4.2)-(4.4) можно представить в виде

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + B \bar{w}, \quad \bar{z} = \tilde{C} \tilde{x}, \quad (\text{П.15})$$

где соответствующие матрицы определяются соотношениями

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A+B_2K & B_2K \\ B_1K_w & A+B_1K_w-K_fC_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ -B_1 & K_f \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ K & K \end{pmatrix}. \quad (\text{П.16})$$

Предположим, что система (П.15) асимптотически устойчива. В соответствии с леммой для выполнения частотного матричного неравенства (4.8) (оно совпадает с неравенством (П.3) с учётом первых двух соотношений (П.12)) необходимо и достаточно, чтобы существовало неотрицательно определённое решение  $\tilde{P}$  матричного уравнения Лурье-Риккати

$$\tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} + \gamma^{-2} \tilde{P} B B^T \tilde{P} = -\tilde{C}^T \tilde{Q} \tilde{C}, \quad (\text{П.17})$$

которое будем искать в блочно-диагональном виде

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.18})$$

С учётом блочной структуры матриц, входящих в (П.17), после приравнивания левых верхних блоков его левой и правой частей, придём к соотношениям (П.13), (П.14) для отыскания матрицы  $P$ , откуда по аналогии с доказательством теоремы 2 получим, что матрица  $K$  определяется вторым соотношением (4.2), где матрица  $P$  удовлетворяет уравнению (3.3), при этом матрица  $A + B_2K$  устойчива. Аналогично, приравнивая правые верхние блоки уравнения (П.17) и учитывая выражение (4.2) для матрицы  $K$ , получим, что искомая матрица  $K_w$  должна удовлетворять соотношению (4.4). Приравнивая теперь правые нижние блоки уравнения (П.17), получим уравнение для матрицы  $P_1$

$$(A + B_1K_w - K_fC_2)^T P_1 + P_1(A + B_1K_w - K_fC_2) + \gamma^{-2} P_1 B_1 B_1^T P_1 + \gamma^{-2} P_1 K_f K_f^T P_1 = -K^T R K. \quad (\text{П.19})$$

Раскрывая в последнем выражении скобки с учётом выражений (4.2), (4.4) для матриц  $K$  и  $K_f$  и складывая его с уравнением (3.3) для матрицы  $P$ , после приведения подобных членов придём к соотношению

$$A^T(P + P_1) + (P + P_1)A + \gamma^{-2}(P + P_1)B_1B_1^T(P + P_1) + \gamma^{-2}P_1K_fK_f^TP_1 - C_2^TK_f^TP_1 - P_1K_fC_2 = -C_1^TQC_1, \quad (\text{П.20})$$

которое легко представить в виде

$$A^T(P + P_1) + (P + P_1)A + \gamma^{-2}(P + P_1)B_1B_1^T(P + P_1) - \gamma^2C_2^TC_2 + (\gamma C_2^T - \gamma^{-1}P_1K_f)(\gamma C_2 - \gamma^{-1}K_f^TP_1) = -C_1^TQC_1. \quad (\text{П.21})$$

Если теперь выбрать матрицу  $K_f$  из соотношения

$$P_1K_f = \gamma^2C_2^T \quad (\text{П.22})$$

(что приведёт к обнулению последнего слагаемого в левой части (П.21)) и положить  $Y = \gamma^2(P + P_1)^{-1}$ , то после умножения (П.21) слева и справа на матрицу  $(P + P_1)^{-1}$  придём к уравнению (4.6) относительно матрицы  $Y$ . Проверим теперь справедливость последних операций. Заметим, что из соотношения (П.22) может быть найдена матрица  $K_f$ , если  $P_1$  положительно определена, и следовательно, имеет обратную. Кроме того, положительная определённость  $P_1$  гарантирует обратимость матрицы  $(P + P_1)$ , фигурирующей в выражении для  $Y$  (это также предполагает положительную определённость  $Y$ ). Предположим, что найдено положительно определённое решение  $Y > 0$

уравнения (4.6). Установим условие, при котором матрица  $P_1$  будет также положительно определённой. Из соотношения для  $Y$  можно получить  $Y(P + P_1) = \gamma^2 I$ , откуда для матрицы  $P_1$  имеем

$$P_1 = \gamma^2 Y^{-1} - P. \quad (\text{П.23})$$

Из этого выражения требование положительной определённости  $P_1$  приводит к матричным неравенствам  $\gamma^2 Y^{-1} > P$ ,  $PY < \gamma^2 I$ , последнее из которых ведёт к необходимости выполнения условия (4.7). В этом случае из (П.22) с учётом (П.23) для матрицы  $K_f$  получим выражение (4.5). Устойчивость замкнутой системы (2.1), (4.2)-(4.7) (или, эквивалентно, устойчивость матрицы  $\tilde{A}$  из (П.15)) следует из неотрицательной определённости решения  $\tilde{P}$  уравнения (П.17) (которое можно представить в виде матричного уравнения Ляпунова) и свойства детектируемости пары  $(\tilde{C}, \tilde{A})$  [14], которое следует из детектируемости пары  $(C_1, A)$  [15]. Таким образом, выполнены все условия леммы 1, что завершает доказательство.

## П.6 Доказательство теоремы 5

Утверждение теоремы следует из частотного неравенства (4.8), которое формально совпадает с (П.3) в силу (П.10) и первых двух соотношений (П.12), а также оценки (П.8) при диагональных весовых матрицах  $Q$  и  $R$ . Заметим, что оценка (П.8) в данном случае используется имея в виду, что спектр возмущения  $\bar{w}$  содержит  $p + l$  частот.

## Литература

- [1] Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур  $LQ$ -оптимизации //АиТ. 1998. №7. С. 83-95.
- [2] Kalman R.E. When is a linear control system optimal? //Trans. ASME. Ser. D. J. Basic. Eng. 1964. V. 86. P. 51-60.
- [3] Lenz K.E., Khargonekar P.P., Doyle J.C. When is a Controller  $H_\infty$ -Optimal? //Mathematics of Control, Signals, and Systems. 1988. V. 1. P. 107-122.
- [4] Deodhare G., Vidyasagar M. Every Stabilizing Controller is  $l_1$ - and  $H_\infty$ -Optimal //IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 9. P. 1070-1073.
- [5] Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problem //IEEE Trans. Autom. Contr. 1989. V. 34. No. 8. P. 831-846.
- [6] Барабанов А.Е., Первозванский А.А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям ( $H$ -теория) //АиТ. 1992. №9. С. 3-32.
- [7] Basar T., Bernhard P.  $H_\infty$ -optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach. Boston: Birkhauser, 1991.
- [8] Брусин В.А. Частотные условия  $H_\infty$ -управления и абсолютной стабилизации //АиТ. 1996. №5. С. 17-25.
- [9] Alexandrov A.G., Chestnov V.N. Accurate Control of Steady-State and  $H_\infty$  Suboptimal Control //Proceedings 4th European Control Conference, Brussels, Belgium, 1997. (on CD-ROM, TU-E J1, 5P).

- [10] *Alexandrov A.G., Chestnov V.N.* Toward Accurate Control of Steady-State and  $H_\infty$  Suboptimal Control //Proceedings 2nd Asian Control Conference, Seoul, Korea, 1997. V. 3. P. 587-590.
- [11] *Kwakernaak H.* Robust control and  $H_\infty$  -optimization – Tutorial paper //Automatica. 1993. V. 29. No. 2. P. 255-273.
- [12] *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления //Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. №2. С. 384-420.
- [13] *Willems J.C.* Least Squares Stationary optimal Control and the algebraic Riccati equation //IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 621-634.
- [14] *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.
- [15] *Veillette R.J., Medanic J.V., Perkins W.R.* Robust Control of uncertain systems by decentralised control //Preprints 11 IFAC World Congress, Tallinn, Estonia, USSR, 1990. V. 5. P. 116-121.

Поступила в редакцию 29.05.97