© 2012 г. А. Г. Александров

НЕМОДЕЛИРУЕМАЯ ДИНАМИКА И ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Рассматриваются системы с неучитываемыми при синтезе регулятора "малыми" постоянными времени объекта, о которых известна лишь их верхняя граница. Исследуется их влияние на точность регулирования. Получена граница достижимой точности.

1. Введение

Обеспечение требуемой точности (ошибки регулирования меньше заданной) является основной целью многих систем автоматического управления. Поэтому интенсивно развиваются методы синтеза таких систем, начиная с метода логарифмических амплитудно - частотных характеристик (метода ЛАЧХ) [1],[2] . В последние десятилетия разработаны такие методы как методы аналитического синтеза регуляторов, (базирующиеся на аналитическом конструировании регуляторов (LQ- оптимизации) [3], Hinf - оптимизации [4], линейных матричных неравенствах [5]) и метод эллипсоидальных оценок [6].

Требуемая точность не всегда может быть достигнута из- за немоделируемой динамики. Немоделируемая динамика - это малые постоянные времени, не учтенные при синтезе регулятора. Эти постоянные времени изменяют структуру дифференциального уравнения объекта и поэтому далее будем называть немоделируемую динамику структурным возмущением.

При большом коэффициенте усиления системы, который обеспечивает малую ошибку регулирования, структурные возмущения приводят к неустойчивости системы [7],[8]. В методе ЛАЧХ устойчивость при структурном возмущении обеспечивается выбором частоты среза так, чтобы она была меньше частот изломов ЛАЧХ, соответствующих малым постоянных времени. Аналогичный подход используется при аналитическом синтезе регуляторов на базе LQ- оптимизации [3]. Он обеспечивает согласование требуемой точности с уровнем структурных возмущений, который

[1]

является известным максимальным значением неизвестных малых постоянных времени.

В зарубежной литературе исследуется влияние немоделируемой динамики различной структуры (мультипликативной, аддитивной и т.п.) на устойчивость систем, оптимальных по различным критериям [9].

Цель этой работы состоит в том, чтобы найти условия не согласованности требований к точности со структурыми возмущениями.

2. Немоделируемая динамика (Структурные возмущения)

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему управления, описываемую дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &d_n y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + d_1 \dot{y} + d_0 y = k_m u^{(m)} + \ldots + k_1 \dot{u} + k_0 u + \\ &+ c_q f^{(q)} + \ldots + c_1 \dot{f} + c_0 f, \quad t \geqslant t_0, \;\; m < n, \;\; q < n, \end{aligned} \tag{1}$$

$$g_{n_c} u^{(n_c)} + g_{n_c-1} u^{(n_c-1)} + \ldots + g_1 \dot{u} + g_0 y = r_{m_c} y^{(m_c)} + \ldots + r_1 \dot{y} + r_0, \quad m_c \leqslant n_c, \tag{2}$$

где $y(t)$ – измеряемый выход объекта (1), $u(t)$ – измеряемый выход регулятора (2), $f(t)$ – неизвестное, ограниченное внешнее возмущение:

$$|f(t)| \leqslant f^*, t \geqslant t_0, \tag{3}$$

f^*-заданное положительное число.

Уравнения (1) будем называть рабочей моделью объекта управления. В действительности объект описывается уравнением

$$\begin{aligned} &d_{n_0} y^{(n_0)} + d_{n_0-1} y^{(n_0-1)} + \ldots + d_{n+1} y^{n+1} + \tilde{d}_n y^{(n)} + \tilde{d}_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \\ &+ \tilde{d}_0 y = k_{m_0} u^{(m_0)} + \ldots + k_{m+1} u^{m+1} + \tilde{k}_m u^{(n)} + \ldots + \tilde{k}_0 u + \\ &+ c_q f^{(q)} + \ldots + c_1 \dot{f} + c_0 f \;, m_0 < n_0 \end{aligned} \tag{4}$$

где d_i $(i = \overline{n+1, n_0})$, k_j $(j = \overline{m+1, m_0})$ – неизвестные числа, называемые структурными возмущениями рабочей модели (1). Будем полагать, что коэффициенты уравнения (4), если их записать как

$$d^b(s) y = k^b(s) u + c(s) f, \tag{5}$$

где s символ преобразования по Лапласу при нулевых начальныых условиях, обладают свойством

$$d^b(s) = \sum_{i=n+1}^{n_0} d_i s^i + \sum_{i=0}^{n} \tilde{d}_i s_i = \bar{d}(s) d(s) = \left(\sum_{i=0}^{\bar{n}} \bar{d}_i s^i + 1 \right) d(s) \quad \bar{n} = n_0 - n, \tag{6}$$

$$k^b(s)=\sum_{i=m+1}^{m_0}k_is^i+\sum_{0}^{m}\tilde{k}_is_i=\bar{k}(s)k(s)=\left(\sum_{i=0}^{\bar{m}}\bar{k}_is^i+1\right)k(s)\quad \bar{m}=m_0-m. \tag{7}$$

В этом случае передаточная функция объекта (4) имеет вид

$$w^b(s)=\frac{k^b(s)}{d^b(s)}=\bar{w}(s)w(s), \tag{8}$$

где $w(s)$- передаточная функция рабочей модели объекта:

$$\begin{gathered} w(s)=\frac{k(s)}{d(s)}=\frac{k}{s^\nu}\frac{\prod\limits_{i=1}^{\check{n}_1}\left(\check{T}_is+1\right)\prod\limits_{i=\check{n}_1+1}^{\check{n}_1+\check{n}_2}\left(\check{T}_i^2s^2+2\check{\xi}_i\check{T}_is+1\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n_1}(T_is+1)\prod\limits_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(T_i^2s^2+2\xi_iT_is+1\right)}e^{-\tau s}\\ |\xi_i|\leqslant 1,\quad |\check{\xi}_j|\leqslant 1,\quad i=n_1+1,...,n_1+n_2,\quad j=\check{n}_1+1,...,\check{n}_1+\check{n}_2,\\ n_1+2n_2+\nu=n,\quad \check{n}_1+2\check{n}_2=m, \end{gathered} \tag{9}$$

$\bar{w}(s)$-передаточная функция структурных возмущений (немоделируемой динамики):

$$\begin{gathered} \bar{w}(s)=\frac{\bar{k}(s)}{\bar{d}(s)}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{\check{p}_1}\left(\check{L}_is+1\right)\prod\limits_{i=\check{p}_1+1}^{\check{p}_1+\check{p}_2}\left(\check{L}_i^2s^2+2\check{\zeta}_i\check{L}_is+1\right)}{\prod\limits_{i=1}^{p_1}(L_is+1)\prod\limits_{i=p_1+1}^{p_1+p_2}\left(L_i^2s^2+2\zeta_iL_is+1\right)}e^{-\bar{\tau}s}\\ |\zeta_i|\leqslant 1,\quad |\check{\zeta}_j|\leqslant 1,\quad i=p_1+1,...,p_1+p_2,\quad j=\check{p}_1+1,...,\check{p}_1+\check{p}_2,\\ p_1+2p_2=\bar{n},\quad \check{p}_1+2\check{p}_2=\bar{m}, \end{gathered} \tag{10}$$

$\bar{\tau}$-время запаздывания. Постоянные времени, декременты затухания и запаздывание, входящие в эту передаточную функцию неизвестны, поэтому структурное возмущение называют также немоделируемой динамикой.

О структурном возмущении известно следующее:

a)полином $\bar{d}(s)$ его передаточной функции -гурвицев (корни полинома $\bar{d}(s)$ имеют отрицательные вещественные части),

b)модуль этой передаточной функции - ограничен:

$$|\bar{w}(j\omega)|\leqslant 1,\quad 0\leqslant\omega\leqslant<\infty, \tag{11}$$

c)известна верхняя граница L неизвестных постоянных времени и запаздывания

$$L=\max\left\{L_1,\dots,L_{p_1+p_2},\bar{\tau},|\check{L}_1|,\dots,\left|\check{L}_{\check{p}_1+\check{p}_2}\right|\right\}. \tag{12}$$

Число L называется уровнем структурных возмущений.

Если величина L неизвестна, то полагают, что она меньше минимальной постоянной времени T_{min} рабочей модели:

$$L = T_{min} q_1^{-1}, \tag{13}$$

где

$$T_{min} = \min\left\{T_1, \ldots, T_{n_1+n_2}, |\check{T}_1|, \ldots, \left|\check{T}_{\check{n}_1+\check{n}_2}\right|\right\}, \tag{14}$$

$q_1 = 5 \div 10$, и поэтому постоянные времени структурных возмущений называют малыми постоянными времени объекта либо "паразитными"постоянными времени, так как они могут нарушить устойчивость системы.

Определение 2.1. Система (1),(2) называется структурно грубой, если ее асимптотическая устойчивость сохраняется при структурных возмущениях заданного уровня; если асимптотическая устойчивость не сохраняется , то система называется структурно негрубой.

3. Постановка задачи

Пусть внешнее возмущение принадлежит некоторому множеству Ω_f ограниченных функций (3)

$$f(t) \in \Omega_f \tag{15}$$

Точность системы (1),(2) при внешнем возмущении определяется как наименьшее положительное число $\bar{y}$, удовлетворяющее, начиная с некоторого момента времени $t_p > t_0$, условию

$$|y(t)| \leqslant \bar{y}, \qquad t \geqslant t_p, \tag{16}$$

в котором t_p – время затухания переходных процессов, вызванное, в частности, начальными условиями.

Требование к точности системы имеет вид

$$\bar{y}(t) \leqslant y^*, \tag{17}$$

где y^* - заданное число.

Будем полагать, что существует регулятор (2), при котором требование к точности системы (1), (2) выполняется.

Определение 3.1. Требуемая точность y^* системы (1),(2) называется не согласованной с уровнем структурных возмущений, если эта система является структурно негрубой.

В методе ЛАЧХ требуемая точность согласовывается с уровнем структурных возмущений путем выбора частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ желаемой ЛАЧХ, чтобы выполнялось неравенство

$$L \leqslant 1/q_2\omega_{\text{ср}}, \tag{18}$$

где $q_2 = 5 \div 10$.

Частота среза системы определяется как

$$\omega_{\text{ср}} = \max[\omega_1, ..., \omega_p], \quad i = 1, ..., p,$$

где частоты $\omega_i, i = 1, ..., p$, находятся из уравнения

$$|w_{\text{раз}}(j\omega_i)| = 1, \quad i = 1, ..., p, \tag{19}$$

в котором $w_{\text{раз}}(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы:

$$w_{\text{раз}}(s) = -\frac{k(s)}{d(s)}\frac{r(s)}{g(s)}. \tag{20}$$

Если найдется такая частота ω, что $|w_{\text{раз}}(j\omega)| > 1$,то частота среза существует, так как

$$\lim_{\omega\to\infty} |w_{\text{раз}}(j\omega)| = 0. \tag{21}$$

Это равенство следует из того, что степень полинома знаменателя передаточная функция разомкнутой системы больше степени ее числителя

$$deg[d(s)g(s)] > deg[k(s)r(s)]. \tag{22}$$

Такой способ согласования требуемой точности с уровнем структурных возмущений использует процедуру формирования желаемой ЛАЧХ, которая лежит в основе синтеза регулятора.

Задача состоит в том, чтобы найти условия несогласованности требуемой точности с уровнем структурных возмущений до начала синтеза регулятора.

Решение этой задачи опирается на следующее понятие

Определение 3.2. Частотной эффективности регулятора ω_e называется минимальная из частот, определяемых равенством

$$\frac{|c(j\omega_e)|f^*}{|d(j\omega_e)|y^*} = 2 \tag{23}$$

■

Для описания соржания этого понятия для случая, когда объект управления асимптотически устойчив, рассмотрим гармоническое внешнее возмущение

$$f(t) = f^* sin\omega_e t, \tag{24}$$

принадлежащее множеству Ω_f

$$f^* sin\omega_e t \in \Omega_f \tag{25}$$

В установившемся режиме, при $t \to \infty$, выход системы (1), (2)

$$y(t) = a_f(\omega_e) \sin\left[\omega_e t + \varphi(\omega_e)\right], \tag{26}$$

где амплитуда $a_f(\omega_e) = |t_{yf}(j\omega_e)|f^*$ и фаза $\varphi(\omega_e) = \arg t_{yf}(j\omega_e)$ определяются передаточной функцией $t_{yf}(s)$, связывающей выход объекта с внешним возмущением

$$t_{yf}(s) = \frac{g(s)c(s)}{d(s)g(s) - k(s)r(s)}, \tag{27}$$

Выход объекта в тех же условиях, но при отсутствии регулятора (в уравнении (1) $u = 0$) имеет вид

$$\tilde{y}(t) = \tilde{a}_f(\omega_e) \sin\left[\omega_e t + \tilde{\varphi}(\omega_e)\right], \tag{28}$$

где амплитуда $\tilde{a}_f(\omega_e) = |w_{yf}(j\omega_e)|f^*$ и фаза $\varphi(\omega_e) = \arg w_{yf}(j\omega_e)$ определяются передаточной функцией $w_{yf}(s) = c(s)/d(s)$.

Таким образом,

$$\tilde{a}_f(\omega_e) = \frac{|c(j\omega_e)|f^*}{|d(j\omega_e)}. \tag{29}$$

Обозначим $v(\omega)$ отношение амплитуд выхода объекта без регулятора и с ним

$$v(\omega) = \tilde{a}_f(\omega)/a_f(\omega). \tag{30}$$

Гармоническое внешнее возмущение принадлежит множеству Ω_f, для которого регулятор обеспечивает требование к точности и поэтому

$$a(\omega_e) \leqslant y^*. \tag{31}$$

Используя определение частоты эффективности, оценим на основе выражений (31),(29) нижнюю границу отношения амплитуд на этой частоте

$$v(\omega_e) = \tilde{a}_f(\omega_e)/a_f(\omega_e) \geqslant \tilde{a}_f(\omega_e)/y^* = 2. \tag{32}$$

Эти соотношения означают, что, если объект асимптотически устойчив, то при гармоническом внешнем возмущении с частотой ω_e регулятор обеспечивает выход,который может быть лишь в два раза меньше, чем при его отсутствии.

4. Условия несогласованности требуемой точности и уровня структурных возмущений

Утверждение 4.1. Если уровень структурных возмущений таков, что

$$L \geqslant 1/\omega_{\text{ср}}, \tag{33}$$

то существуют постоянные времени передаточной функции структурных возмущений такие, что система (**??**), (2)находится на границе устойчивости.

Доказательство этого утверждения, приведеное в приложении, носит конструктивный характер и число постоянных времени структурных возмущений составляет от четырех до восьми в зависимости от свойств параметрически невозмущенной системы.

Утверждение 4.2. Частота эффективности регулятора меньше частоты среза

$$\omega_e < \omega_{\text{ср}}, \tag{34}$$

Доказательство этого утверждения несложно.

Действительно, найдем свяэь отношения амплитуд с передаточной функцией разомкнутой системы. Для этого запишем передаточную функцию системы как

$$t_{yf}(s) = \frac{c(s)}{d(s)(1 + w_{\text{раз}}(s))} \tag{35}$$

ТОгда отношение амплитуд

$$v(\omega) = \tilde{a}_f(\omega)/a_f(\omega) = |w_{yf}(j\omega)|/|t_{yf}(j\omega)| = |1 + w_{\text{раз}}(j\omega)| \tag{36}$$

или

$$|v(\omega)|^2 = 1 + 2a(\omega)\cos\varphi(\omega) + a^2(\omega), \tag{37}$$

где $a(\omega) = |w_{\text{раз}}(j\omega)|$, $\varphi(\omega) = Argw_{\text{раз}}(j\omega)$.

Из выражений (37)и (32) следует

$$1 + 2a(\omega_e)\cos\varphi(\omega_e) + a^2(\omega_e) \geqslant 4. \tag{38}$$

учитывая,что

$$-1 < \cos\varphi(\omega_e) \leqslant 1$$

получим

$$a(\omega_e) \geqslant 1$$

По определению, $\omega_{\text{ср}}$- наибольшая из частот, удовлетворяющих равенству $a(\omega_{\text{ср}}) = 1$ и так как $\lim_{\omega\to\infty} |a(j\omega)| = 0$, то из неравенства $a(\omega_e) \geqslant a(\omega_{\text{ср}})$ следует неравенство $\omega_e \leqslant \omega_{\text{ср}}$ утверждения.

Приведем два простых следствия утверждений 1и 2

Следствие 4.1. Если выполняется условие

$$L \geqslant 1/\omega_e, \tag{39}$$

то точность системы не согласована с уровнем структурных возмущений.

Действительно, из неравенства $L \geqslant 1/\omega_e$ следует по утверждению 4.2, что $L \geqslant 1/\omega_{\text{ср}}$, и тогда по утверждению 4.1 заключаем о несогласованности.

Итак, если при известных уравнении (1) объекта и уровне структурных возмущений требуется построить регулятор (2), обеспечивающий заданную точность,то небходимо проверить достижима ли эта точность. Для этого находим по формуле (23) частоту эффективности и проверяем неравенство (39). Если оно выполняется, то ищем наименьшее значение требуемой точности, обозначаемое как y_r, при котором неравенство (39)нарушается, и синтезируем регулятор для величины

$$y* \geqslant y_r \tag{40}$$

Чтобы найти величину y_r будем рассматривать левую часть уравнения (23) как функцию двух переменных y^* и ω_e и найдем такую величину $y^* = y_r$, что при $\omega_e = \omega_{er}$ -решение уравнения (23), удовлетворяющее условию $L < 1/\omega_{er}$.

Следствие 4.2. Если для требуемой точности выполняется неравенство

$$y^* \leqslant y_r, \tag{41}$$

где

$$y_r = \frac{|c(j/L)|f^*}{|d(j/L)|2}, \tag{42}$$

то точность системы не согласована с уровнем структурных возмущений.

Действительно,сравнивая выражения (**??**)и(23)заключаем, что частота $\omega_e = 1/L$ является частотой эффективности регулятора при $y^* = y_r$. Тогда из утверждения 4.2 следует, что $1/L < \omega_{\text{ср}}$ и на основе утверждения 4.1 заключаем о не согласованности.

5. Пример

Рассмотрим объект управления, рабочая модель которого описывается уравнением

$$d_3 \dddot{y} + d_2\ddot{y} + d_1\dot{y} + y = k_1\dot{u} + u + f, \tag{43}$$

в котором

$$d_3 = 0,2, \quad d_2 = 1,24, \quad d_1 = 5,24, \quad k_1 = 0,4. \tag{44}$$

Числам (44) соответствуют следующие постоянные времени и декремент затухания

$$T_1 = 5, \quad T_2 = 0,2, \quad \xi_2 = 0,6, \quad \check{T}_1 = 0,4 \quad k = 1. \tag{45}$$

Передаточная функция объекта

$$w(s) = \frac{0,4s + 1}{(5s + 1)(0,04s^2 + 0,24s + 1)} \tag{46}$$

Внешнее возмущение

$$f(t) = \sin \omega t \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \infty. \tag{47}$$

Граница структурных возмущений

$$L = 0,04. \tag{48}$$

Проверим согласованность требуемой точности $y^* = 10^{-4}$ с заданной границей немоделируемой динамики T_{nm}

Для этого найдем число $y_r = \dfrac{1}{2 * |d(j/L)|} = 1,61610^{-4}$. Это число превышает требуемую точность системы и поэтому она теряет устойчивость при структурных возмущениях.

Чтобы убедиться в этом рассмотрим регулятор с передаточной функцией

$$w_p(s) = -\frac{0,2s^4 + 1,45s^3 + 6,58s^2 + 6,7s + 1,414}{1,3 \cdot 10^{-9}s^4 + 4 \cdot 10^{-5}s^3 + 1,8 \cdot 10^{-4}s^2 + 2,5 \cdot 10^{-4}s + 1,11 \cdot 10^{-4}}. \tag{49}$$

Амплитудно-частотная характеристика системы с таким регулятором $|tyf(j\omega)| < 10^{-4}$ для всех частот и, следовательно, этот регулятор обеспечивает требуемую точность, если не учитывать структурные возмущения.

Пусть передаточная функция структурных возмущений

$$\bar{w}(s) = \frac{1}{(L_1 s + 1)(L_2 s + 1)}, \tag{50}$$

где

$$L_1 = 0,04, \qquad L_2 = 0,00008. \tag{51}$$

При таких структурных возмущениях система неустойчива.

Заметим, что она теряет устойчивость и при меньших значениях коэффициентов передаточной функции (50):

$$L_1 = 0,0008, \qquad L_2 = 0,00008,$$

так как условие следствия 4.2 является лишь достаточным.

Литература

1. Основы автоматического управления. (Под редакцией В.В. Солодовникова) М: Машгиз, 1954.

2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Ч.I. Линейные системы регулирования одной величичны. М.- Л.: Энергия, 1965.

3. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.

4. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез много мерных систем заданной точности. I, II// АиТ. 1998. No 7 С. 83-95; No 8. С. 124-138.

5.Агафонов П.И., В.Н.Честнов Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе H_∞- подхода. // АиТ. 2004. No 10. С. 101-108.

6. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу.// АиТ. 2008. No 5. С. 72-90.

7. Мееров М.В. Об учете малых параметров при исследовании устойчивости систем авторегулирования . Электричество. 1947. No 6.

8. Мееров М.В. Системы автоматического регулирования, устойчивые при сколь угодно большом коэффициенте усиления. II// АиТ. 1947. No 4.

9. Поляк Б.Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение

Доказательство утверждения 1

Передаточная функция структурно возмущенной системы (4), (2) имеет вид (8)

$$w^b_{\text{раз}}(s) = w_{\text{раз}}(s)\bar{w}(s) \tag{П.1}$$

Ее амплитудно- и фазо-частотные характеристики

$$a^b(\omega) = a(\omega)\bar{a}(\omega), \quad \varphi^b(\omega) = \varphi(\omega) + \bar{\varphi}(\omega), \tag{П.2}$$

где $a(\omega) = |w_{\text{раз}}(j\omega)|$, $\varphi(\omega) = \text{Arg}\, w_{\text{раз}}(j\omega)$, $\bar{a}(\omega) = |\bar{w}(j\omega)|$, $\bar{\varphi}(\omega) = \text{Arg}\, \bar{w}(j\omega)$.

На частоте среза

$$a(\omega_{\text{ср}}) = 1, \quad \varphi(\omega_{\text{ср}}) = \varphi_c + 2\pi\nu, \quad \bar{\varphi}(\omega_{\text{ср}}) = \bar{\varphi}_c + 2\pi\mu, \tag{П.3}$$

где ν и μ– целые числа, определяемые как целое отношений $\dfrac{\varphi(\omega_{\text{ср}})}{2\pi}$ и $\dfrac{\bar{\varphi}(\omega_{\text{ср}})}{2\pi}$ так, что

$$-2\pi \leqslant \varphi_c \leqslant 0, \quad -2\pi \leqslant \bar{\varphi}_c \leqslant 0. \tag{П.4}$$

Найдем коэффициенты передаточной функции структурных возмущений, при которых выполняются равенства

$$a^b(\omega_{\text{ср}}) = 1, \quad \varphi^b(\omega_{\text{ср}}) = \varphi_c + \bar{\varphi}_c + 2\pi(\nu + \mu) = -\pi + 2\pi\rho, \tag{П.5}$$

где ρ – целое число либо ноль.

Эти равенства означают, что годограф Найквиста системы (2), (4) проходит через критическую точку $(-1, j0)$ и поэтому система находится на границе устойчивости.

Первое из этих равенств выполняется при условии

$$\bar{a}(\omega_{\text{ср}}) = 1. \tag{П.6}$$

Второе из них выполняется, когда

$$\bar{\varphi}_c = -\pi - \varphi_c + 2\pi(\rho - \mu - \nu), \tag{П.7}$$

Разобъем первый из двух интервалов (П.4) на два интервала

$$-\pi \leqslant \varphi_c \leqslant 0; \tag{П.8}$$

$$-2\pi \leqslant \varphi_c \leqslant -\pi, \tag{П.9}$$

Для интервала (П.8)получим на основе (П.7) при $\rho = \mu + \nu$

$$\bar{\varphi}_c = -\pi - \varphi_c, \quad (-\pi \leqslant \bar{\varphi}_c \leqslant 0), \tag{П.10}$$

а для интервала (П.9)при $\rho = \mu + \nu - 1$ найдем

$$\bar{\varphi}_c = -3\pi - \varphi_c, \quad (-2\pi \leqslant \bar{\varphi}_c \leqslant -\pi) \tag{П.11}$$

Передаточную функцию, для которой удовлетворяются условия (П.6), (П.10), будем искать в виде

$$\bar{w}(s) = \frac{(-T_b s + 1)^2}{(T_b s + 1)^2}, \quad T_b > 0. \tag{П.12}$$

Найдем такое $T_b \leqslant 1/\omega_{\text{ср}}$, что при структурном возмущении (П.12) система будет на границе устойчивости.

Фазо-частотная характеристика этого возмущения

$$\bar{\varphi}(\omega) = -4 \operatorname{arctg} T_b \omega. \tag{П.13}$$

Подставим это выражение в (П.10) и получим

$$\operatorname{arctg} T_b \omega_{\text{ср}} = \frac{\pi + \varphi_c}{4}$$

или

$$T_b = \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \operatorname{tg} \frac{\pi + \varphi_c}{4}. \tag{П.14}$$

При $-\pi \leqslant \varphi_c \leqslant 0$ получим $0 \leqslant \operatorname{tg} \dfrac{\pi + \varphi_c}{4} \leqslant 1$ или $0 \leqslant T_b \leqslant \dfrac{1}{\omega_{\text{ср}}}$. При значениях T_b из этого интервала система находится (в зависимости от φ_c)на границе устойчивости.

Если φ_c находится в интервале (П.9), то примем

$$\bar{w}(s) = \frac{(-T_b s + 1)^4}{(T_b s + 1)^4}.$$

В этом случае $\bar{\varphi}(\omega) = -8 \operatorname{arctg} T_b \omega$ и тогда

$$T_b = \frac{1}{\omega_{\text{ср}}} \operatorname{tg} \frac{3\pi + \varphi_c}{8}. \tag{П.15}$$