Точное управление на основе LQ и H_∞-оптимизаций

Часть I. Одномерные системы (системы со скалярным управлением и регулируемой переменной)

1. Введение

2. Точное управление

2.1. Задача точного управления

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = Ax + b_1 f + b_2 u, \quad z = c_1 x, y = c_2 x, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T; \tag{1}$$

$$\dot{x}_c = A_c x_c + b_c y, \quad u = c_c x_c + d_c y, \tag{2}$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния объекта (1), $u(t)$ – управление, $y(t)$ – измеряемая переменная, $z(t)$ – регулируемая переменная, $f(t)$ – внешнее возмущение, $x_c(t)$ – n_c-мерный вектор состояния регулятора (2),матрица чисел A и n-мерные числовые вектора b_1, b_2, c_1, c_2 – известны, матрица чисел A_c и вектора чисел b_c, c_c и число d_c – неизвестны, t_0 и T – моменты начала и окончания процесса, описываемых (1) и (2), объект (1) – полностью управляем по $u(t)$ и полностью наблюдаем по переменным y и z.

Внешнее возмущение – неизвестная, непрерывная, ограниченная функция, удовлетворяющая условию

$$|f(t)| \leqslant f^*, \tag{3}$$

где $f(t)$ – известное число.

Максимальная ошибка системы (1), (2) при известном стабилизирующем регуляторе (2) определяется, начиная с некоторого момента времени как $t_p < T$, как

$$z_s = \max_{\substack{t_p \leqslant t \leqslant T \\ |f(t)| \leqslant f^*}} |z(t)|, \tag{4}$$

где t_p – время,по истечению которого модуль компонент вектора $z(t)$, зависящих от начальных условий $x(t_0)$, $x_c(t_0)$ и значения $f(t_0)$ станет меньше заданного числа.

Задача состоит в том, чтобы найти регулятор (2), при котором система (1), (2) удовлетворяет требованию к точности

$$z_s \leqslant z_s^*, \tag{5}$$

где z_s^* – заданное число.

Управление (2), обеспечивающее выполнение условия (5) будем называть точным управлением.

2.2. Редукция задачи

Заменим эту задачу другой, в которой отсутствует в явной форме неизвестное внешнее возмущение.

Разложим это возмущение в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sin\left(\omega_k t + \Psi_k\right), \tag{6}$$

в котором частота $\omega_k = \dfrac{2\pi}{T}k$ $(k = \overline{0,\infty})$, а амплитуды и фазы неизвестны. Сумма квадратов амплитуд удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leqslant f{*}^2, \tag{7}$$

которое следует из равенства Ляпунова

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leqslant \frac{1}{T}\int\limits_0^T f^2(t)dt \tag{8}$$

и ограничения (3).

Ряд Фурье (6) непрерывной функции является абсолютно сходящимся и поэтому существует положительное число $f{**}$ такое, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \leqslant f^{**}. \tag{9}$$

Из определения абсолютной сходимости следует, что

$$|f(t)| \leqslant f^{**}, \tag{10}$$

и поэтому

$$f^* \leqslant f^{**} \tag{11}$$

Рассмотрим реакцию системы (1), (2) со стабилизирующим регулятором (2) на любую гармонику ряда Фурье (6). Пусть $T \to \infty$. При возмущении

$$f(t) = \bar{f} \sin(\omega t + \psi) \tag{12}$$

где ψ – неизвестное число, амплитуда $\bar{f}$ – неизвестна, но удовлетворяет неравенству

$$\left|\bar{f}\right| \leqslant f^*. \tag{13}$$

Установившиеся (при $t \to \infty$) ошибки системы (1),(2) имеют вид

$$z_{ss}(t) = a(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega)), \tag{14}$$

где амплитуда ошибки определяется выражением

$$|a(\omega)| = |t_{zf}(j\omega)|\,\bar{f}, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \infty, \tag{15}$$

в котором $t_{zf}(s)$ – передаточная функция системы (1),(2), связывающая выход z с внешним возмущением f.

Наибольшее значение частотной передаточной функции называется её H_∞-нормой $||t_{zf}(s)||_\infty$:

$$||t_{zf}(s)||_\infty = \sup_{0 \leqslant \omega < \infty} |t_{zf}(j\omega)|\,. \tag{16}$$

Из выражений (13) – (15) следует

$$|z_{ss}(t)| \leqslant ||t_{zf}(s)||_\infty f^*. \tag{17}$$

Очевидно, что если найден регулятор (2) такой, что частотная передаточная функция системы(1), (2) удовлетворяет неравенству

$$q\,|t_{zf}(j\omega)|^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \omega < \infty, \tag{18}$$

где

$$q = \frac{f^{*2}}{z_s^{*2}}, \tag{19}$$

то установившаяся ошибка удовлетворяет требованиям к точности

$$|z_{ss}(t)| \leqslant z_s^*. \tag{20}$$

Для того чтобы удовлетворить требованию (5) к точности, уменьшим допустимую величину ошибки и положим

$$\bar{z}_s^* = z_s^* - \delta, \quad \delta > 0. \tag{21}$$

Обычно полагают $\delta = \dfrac{z_s^*}{20}$ (5% от установившейся ошибки).

Пусть найден регулятор (2) такой, что

$$\bar{q}\left|t_{zf}(j\omega)\right|^2 \leqslant 1, \tag{22}$$

где

$$\bar{q} = \frac{f^{*2}}{\bar{z}^{*2}}. \tag{23}$$

Тогда существует момент времени $t_P < T$ (t_p – зависит от выбора величины δ),

$$|z_s(t)| \leqslant z_s^*, \quad t_p \leqslant t < \infty. \tag{24}$$

Далее будем полагать, что z_s^* задано с учетом числа δ и вместо выражений (22), (23) используем выражения (18), (19).

Повторяя изложенное для общего случая внешнего возмущения запишем при $T \to \infty$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a(\omega_k)\sin(\omega_k t + \varphi(\omega_k), \tag{25}$$

где

$$a(\omega_k) = |t_{zf}(j\omega_k)|\, f_k. \tag{26}$$

Учитывая это выражение и обозначение (16) запишем

$$|z_{ss}(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|a(j\omega_k)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}|t_{zf}(j\omega_k)|\,|f_k| \leqslant ||t_{zf}(s)|\,|_\infty \sum_{k=0}^{\infty}|f_k|\,. \tag{27}$$

С учетом ограничения (9) получим неравенство, аналогичное (17)

$$|z_{ss}(t)| \leqslant ||t_{zf}(s)|\,|_\infty \cdot f^{**}. \tag{28}$$

Если передаточная функция системы (1), (2) такова, что выполнено неравенство (18), где

$$q = \frac{f^{**2}}{z_s^{*2}}, \tag{29}$$

то установившаяся ошибка удовлетворяет требованию (20).

Для выполнения требований (5) к точности, уменьшим величину допустимой ошибки в соответствии с (21), и тогда может существовать такой момент времени $t_p < T$, что требование (5) выполняется.

Если величина f^{**} неизвестна, но известно, что внешнее возмущение содержит p существенных гармоник, то пренебрегаем в ряде Фурье остальными гармониками. Тогда после переобозначения существенных гармоник представим

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{p} f_k \sin(\omega_k t + \Psi_k). \tag{30}$$

Амплитуды этой суммы подчинены условию

$$\sum_{k=0}^{p} f_k^2 \leqslant f^{*2}, \tag{31}$$

которое следует из неравенства (7), а частоты и фазы неизвестны.

Аналогично (27) запишем, используя неравество Коши-Буняковского,

$$z_{ss}^2(t) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p} |a(\omega_k)| \right)^2 \leqslant p \sum_{k=0}^{p} (a(\omega_k))^2 \leqslant p \sum_{k=0}^{p} |t_{zf}(j\omega_k)|^2 f_i^2 \leqslant ||t_{zf}(s)||_\infty^2 p f^{*2}.$$

Если передаточная функция системы (1), (2) удовлетворяет неравенству (18), где

$$q \leqslant \frac{p f^{*2}}{z_s^{*2}}, \tag{32}$$

тогда (с учетом уменьшения величины z_s^*) требование к точности (5) выполняется.

Таким образом, задача точного управления состоит в том, чтобы найти регулятор (2) такой, чтобы передаточная функция системы (1), (2) удовлетворяла неравенству (18), в котором число q определялось выражениями (29) либо (32).

3. Точность LQ-оптимальных систем

3.1. Управление по состоянию при суммированном внешнем возмущении

Рассмотрим объект (1) без внешних возмущений и измеряемых переменных состояния

$$\dot{x} = Ax + b_2 u, \quad z = c_1 x, \quad y = x. \tag{33}$$

Пусть требуется найти управление

$$u = kx, \tag{34}$$

где k – n-мерный вектор чисел такой, чтобы на решениях системы (33), (34) при любых начальных условиях $x(t_0)$ минимизировался функционал

$$J = \int\limits_{t_0}^{\infty} \left(qz^2 + u^2\right) dt. \tag{35}$$

Искомый вектор k определяется как

$$k = b_2^T X, \tag{36}$$

где X – симметричная неотрицательно определенная матрица $X = X^T \geqslant 0$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$A^T X + XA - Xb_2 b_2^T X = -c_1^T q c_1. \tag{37}$$

Пусть к объекту системы (33), (34) с оптимальным управлением (34) приложено внешнее возмущение. Уравнение этой системы при

$$b_1 = b_2 \tag{38}$$

принимает вид (при условии (38) внещнее возмущение называется суммируемым возмущением)

$$\dot{x} = Ax + b_2(u + f), \quad z = c_1 x, \quad u = kx. \tag{39}$$

Передаточная функция системы (39)

$$t_{zf}(s) = c_1 \left(Is - A - b_2 k\right)^{-1} b_2. \tag{40}$$

Преобразуем правую часть этого выражения. Для этого используем тождество

$$\left(Is - A - b_2 k\right)^{-1} b_2 = \left(Is - A\right)^{-1} b_2 \left[1 - k \left(Is - A\right)^{-1} b_2\right]^{-1}, \tag{41}$$

которое легко доказать, умножая его справа на $\left[1 - k \left(Is - A\right)^{-1} b_2\right]$, а слева на $\left(Is - A - b_2 k\right)$.

Обозначая

$$w_{zu}(s) = c_1 \left(Is - A\right)^{-1} b_2, \quad w(s) = -k \left(Is - A\right)^{-1} b_2, \tag{42}$$

запишем передаточную функцию (40) как

$$t_{zf}(s) = \frac{w_{zu}(s)}{1 + w(s)}. \tag{43}$$

Утверждение 3.1. Передаточная функция $w(s)$ оптимальной системы удовлетворяет тождеству

$$[1+w(-s)][1+w(s)] = 1 + qw_{zu}(-s)w_{zu}(s). \tag{44}$$

Для доказательства утверждения прибавим и вычтем из левой части равенства (37) матрицу sX, умножим полученное равенство слева на матрицу $b_2^T(-Is-Y)^{-1T}$, а справа – на $(-Is-Y)^{-1}b_2$, и прибавим к обеим частям полученного выражения единицу и получим, с учетом равенства (36) и обозначений (42) тождество (44).

Запишем теперь передаточную функцию (43) с учетом тождества (44) как

$$qt_{zf}(-s)t_{zf}(s) = \frac{qw_{zu}(-s)w_{zu}(s)}{1+qw_{zu}(-s)w_{zf}(s)}. \tag{45}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{q\left|w_{zu}(j\omega)\right|^2}{1+q\left|w_{zu}(j\omega)\right|^2} = \frac{q}{\left|w_{zu}(j\omega)\right|^{-2}+q} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \omega < \infty. \tag{46}$$

Это означает, что для передаточной функции системы (39), регулятор которой определяется выражениями (36), (39), удовлетворяет частотному неравенству (18) и поэтому система (39), (36), (37) удовлетворяет требованию (5) к точности.

3.2. Управление по выходу объекта, регулируемая переменная которого совпадает с измеряемой

Если вектор состояния объекта (33) не может быть измерен, а измеряется скалярная переменная y, то управление для объекта

$$\dot{x} = Ax + b_2u, \quad y = c_2x, \quad z = y, \quad (c_1 = c_2) \tag{47}$$

строится как

$$u = kx_c, \tag{48}$$

где x_c – n-мерный вектор состояния наблюдателя, k – вектор, определяемый состояниями (36), (37). Вектор x_c формируется наблюдателем

$$\dot{x}_c = Ax_c + b_2w + k_0(y - c_2x_c), \tag{49}$$

в котором вектор k_0 находится как

$$k_0 = Y_e c_2^T, \tag{50}$$

где Y_e – неотрицательно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$AY_e + Y_eA - Y_ec_2^Tc_2Y_e = -Q_e, \tag{51}$$

в котором Q_e – заданная неотрицательно определенная матрица.

Выбор матрицы Q_e зависит от свойств объекта, а именно, является ли он минимально-фазовым (корни числителя передаточной функции $w_{yu}(s)$ имеют отрицательные вещественные части) или нет. Чтобы описать эту зависимость, запишем передаточную функцию регулятора (48), (49), после исключения вектора x_c, как

$$w_c(s) = \frac{k\,(Is - A + k_0c_2)^{-1}}{1 - k\,(Is - A + k_0c_2)^{-1}\,b_2}. \tag{52}$$

Сформируем передаточную функцию

$$w_0(s) = -w_c(s)w_{yu}(s), \tag{53}$$

где $w_c(s)$ определяется выражением (52).

<u>Утверждение 3.2.</u> Если в уравнении Риккати (51) для наблюдателя матрица имеет вид

$$Q_e = Q_0 + \beta b_2b_2^T, \quad \beta > 0, \tag{54}$$

где Q_0 – произвольная неотрицательно определенная матрица, и объект (47) является минимально-фазовым, то при $\beta \to \infty$ передаточная функция (53) системы с наблюдателем приближается к передаточной функции (42) с измеряемым вектором состояния:

$$w_0(s) \cong w(s). \tag{55}$$

Доказательство приведено в приложении.

Пусть к объекту (47) – (49) приложено внешнее возмущение. В этом случае он описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + b_1f + b_2u, \quad y = c_2x, \quad z = y. \tag{56}$$

Передаточная функция системы(47) – (49) с учетом утверждения 3.2 имеет вид

$$t_{yf}(s) = \frac{w_{yf}(s)}{1 - w_c(s)w_{yu}(s)} = \frac{w_{yf}(s)}{1 + w_0(s)} \cong \frac{w_{yf}(s)}{1 + w(s)}. \tag{57}$$

где

$$w_{yf}(s) = c_2(Is - A)^{-1}b_1.$$

Если в уравнении (56) $b_1 = b_2$, то передаточная функция (57) близка к передаточной функции (43), когда состояние объекта измеряется. При $b_1 \neq b_2$ числители этих передаточных функций отличаются. В связи с этим введем новое возмущение

$$\varphi = w_{yu}^{-1}(s) w_{yf}(s) f = w_{\varphi f}(s) f. \tag{58}$$

Минимальная-фазовость объекта обеспечивает ограниченность возмущения $\varphi(t)$.

Уравнение (56) примет вид

$$y = w_{yu}[u + \varphi]. \tag{59}$$

Уравнению (59) соответствует модель в пространстве состояний

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + b_2(u + \varphi), \quad y = c_2\bar{x}, \quad z = y, \tag{60}$$

где новый вектор $\bar{x}(t)$, вообще говоря, отличен от вектора состояния исходной системы однако переменные $y(t)$ при нулевых начальных условиях совпадают.

Пусть найдено число ρ такое, что

$$|w_{\varphi f}(j\omega)| \leqslant \rho, \quad \omega \in [0, \omega^*], \tag{61}$$

где ω^* – достаточно большое число.

Тогда вместо системы (56) можно рассматривать систему (60), в которой $\varphi(t)$ – неизвестное внешнее возмущение, ограниченное известной величиной $\varphi^* = \rho f^*$:

$$|\varphi(t)| \leqslant \rho f^*. \tag{62}$$

Передаточная функция системы (60)

$$t_{yf}(s) = \frac{w_{yu}(s)}{1 + w_{yu}(s)}. \tag{63}$$

Аналогично (46) заключаем, что

$$q\, |t_{y\varphi}(j\omega)|^2 \leqslant 1, \tag{64}$$

где

$$q = \frac{|\rho f^*|^2}{z_s^{*2}}. \tag{65}$$

Это означает, что система (56), (48), (36), (37), (49) – (51), в которой в уравнении Риккати (37) величина q находится из выражения (65), в уравнении Риккати (51) имеет вид (54), где $\beta > 0$ – достаточно большое число.

4. Точность H_∞ оптимальных систем

4.1. Управление по состоянию

Рассмотрим объект (1) с измеряемым вектором состояния

$$\bar{x} = Ax + b_1 f + b_2 u, \quad z = c_1 x, \quad y = x. \tag{66}$$

Будем рассматривать возмущение $f(t)$ как некое "управление" f_b, максимизирующее функционал (35), который минимизируется управлением u. Дополним этот функционал весовой функцией этого "управления". Тогда

$$J = \min_u \max_{f_b} \int\limits_0^\infty \left(q^2 z^2 + u^2 - \gamma^{-2} f_b^2\right) dt. \tag{67}$$

Вектора k и k_b искомых уравнений

$$u = kx; \tag{68}$$

$$f_b = k_b x \tag{69}$$

находятся как

$$k = -b_2^T X; \tag{70}$$

$$k_b = -\gamma^{-2} b_1^T X, \tag{71}$$

где симметричная неотрицательно определенная матрица $X = X^T \geqslant 0$ является решением уравнения

$$A^T X + XA - Xb_2 b_2^T X + \gamma^{-2} X b_1 b_1^T X = -q c_1^T c_1. \tag{72}$$

Обозначим $A_r = A + b_2 k$ и найдем передаточную функцию

$$t_{zf}(s) = c_1 \left(Is - A_r\right)^{-1} b_1, \quad t_{uf}(s) = k \left(Is - A_r\right)^{-1} b_1, \quad t_f(s) = k_b \left(Is - A_r\right)^{-1} b_1. \tag{73}$$

Утверждение 4.1. Передаточные функции (73) удовлетворяют частотному тождеству

$$q \left|t_{zf}(j\omega)\right|^2 + \left|t_{uf}(j\omega)\right|^2 = \gamma^2 - \gamma^2 \left|1 + t_f(j\omega)\right|^2, \quad \omega \in [0, \infty). \tag{74}$$

Доказательство утверждения аналогично доказательству утверждения 3.1, если вычесть из левой и правой частей уравнения (62) величину $Xb_2 b_2^T X$ и тогда приходим к уравнению

$$A_r^T X + X A_r + \gamma^{-2} X b_1 b_1^T X = -q c_1^T c_1 - X b_2 b_2^T X \tag{75}$$

которое аналогично уравнению Риккати. Умножая его слева на $b_1^T\left(Is-A_r^T\right)^{-1}$, а справа на $(Is-A_r)^{-1}b_1$ получим, после прибавления и вычитания sX, тождество (74).

Из тождества (74) следует, что

$$q\left|t_{zf}(j\omega)\right|^2 \leqslant \gamma^2. \tag{76}$$

Если $\gamma^2 \leqslant 1,$ то требование (10) к точности выполняется.

Если $\gamma^2 > 1,$ то найдем наименьшее значение $\gamma^2 \doteq \gamma_m^2,$ при котором решением уравнения (72) является $X \geqslant 0.$ Если $\gamma_m^2 > 1$ и γ_m^2 не зависит от $q,$ то примем

$$q = \alpha^2\frac{2f^{**2}}{z_s^2}, \tag{77}$$

полагая $\alpha^2 = \gamma_m^2.$ Тогда требование к точности (10) выполняется.

Если γ_m зависит от $\alpha,$ то найдем число

$$\bar{\gamma}_m^2 \doteq \min_{\alpha}\frac{\gamma_m^2(\alpha)}{\alpha^2}. \tag{78}$$

Если $\bar{\gamma}_m \leqslant 1,$ то требование к точности выполняется, в противном случае

$$z_c \leqslant \bar{\gamma}_m z_s^2. \tag{79}$$

Таким образом, алгоритм 4.1 построения точного управления состоит из операций:

1. Найти число q по формуле (19);

2. При $\gamma^2 = 1$ решить уравнение (72) и проверить неотрицательную определенность матрицы $X.$ Если $X \geqslant 0,$ то искомое точное управление имеет вид (68), в котором вектор k вычисляется по формуле (70).

3. Если $X < 0,$ то выбирая некоторые $\gamma^2 > 1$ и $\alpha^2 > 1,$ решить уравнение (72), при $q,$ вычисленным по формуле (77) и проверить неотрицательную определенность матрицы $X,$ если $X \geqslant 0,$ то уменьшаем γ и проверяем, что $X \geqslant 0,$ и так далее до тех пор, пока при некотором γ_m не приблизимся с заданным допуском к матрице $X < 0.$ Если $\dfrac{\gamma_m^2(\alpha)}{\alpha^2} < 1,$ то требование к точности выполняется, если

$$\frac{\gamma_m^2(\alpha)}{\alpha^2} > 1, \tag{80}$$

то

4. Увеличить число $\alpha^2,$ повторить операцию 3 и проверить равенство (80). Если оно выполняется, то увеличить число α^2 и проверить это неравенство и так далее до тех пор, пока оно не нарушится, либо величина $\dfrac{\gamma_m^2(\alpha)}{\alpha^2}$ не достигнет минимума $\bar{\gamma}_m^2$. Если такового минимума не существует, то полагаем, в качестве $\bar{\gamma}_m^2$, число $\bar{\gamma}_m^2(\alpha(i))$, при котором

$$\left|\frac{\gamma_m^2(\alpha(i))}{\alpha(i)^2} - \frac{\gamma_m^2(\alpha(i-1))}{\alpha(i-1)^2}\right| \leqslant \varepsilon, \quad i = 2, 3, \dots\ , \tag{81}$$

где $\alpha(i)$ – значение α, принимаемое на i-том шаге операции 4, ε – заданное достаточно малое число.

4.2. Управление по выходу

Рассмотрим общий случай, когда объект описывается уравнением (1). Более того, пусть выход объекта измеряется с помехой $\eta(t)$. Уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x} = Ax + b_1 f + b_2 u, \quad z = c_1 x, \quad y = c_2 x + r\eta, \tag{82}$$

где r – заданное число.

Будем искать управление в виде

$$u = kx_c, \quad k = -b_2^T X, \tag{83}$$

где $X = X^T \geqslant 0$ – решение уравнения (72), $x_c(t)$ – n-мерный вектор состояния наблюдателя

$$\dot{x}_c = Ax_c + b_1 f_b + b_2 u + k_0(y - c_2 x_2), \tag{84}$$

в котором

$$f_b = k_b x_c, \quad k_b = -\gamma^{-2} b_1^T X, \tag{85}$$

$$k_0 = -\left(1 - \gamma^{-2} Y X\right)^{-1} Y c_2^T r^2, \tag{86}$$

где $y > 0$ – положительно определенное решение уравнения

$$AY + YA^T + \gamma^{-2} q Y c_1^T c_1 Y - Y c_2^T Y r^2 = -b_1 b_1^T. \tag{87}$$

Решения уравнений (72), (87) удовлетворяют условию

$$\lambda_{\max}(XY) \leqslant \gamma^2, \tag{88}$$

где $\lambda_{\max}(M)$ – максимальное собственное значение матрицы M.

Утверждение 4.2. Если управление сформировано на основе соотношений (83) – (87) и выполнено условие (88), то передаточная функция системы (82) – (87) удовлетворяет соотношению

$$q^2 \left|t_{zf}(j\omega)\right|^2 + q^2 r^2 \left|t_{z\eta}(j\omega)\right|^2 + \left|t_{uf}(j\omega)\right|^2 + r^2 \left|t_{u\eta}(j\omega)\right|^2 \leqslant \gamma^2. \tag{89}$$

Доказательство утверждения приведено в приложении.

При отсутствии помех измерения $(r = 0)$ из неравенства (89) следует соотношение (76). Используя алгоритм 1, найдем число $\bar{\gamma}_m$ в неравенстве (79), которое определяет точность построенной системы.

Часть II. Многомерные системы

5. Управление по выходу

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = Ax + B_1 f + B_2 u, \quad z = C_1 x, \quad y = C_2 x, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T; \tag{90}$$

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \quad u = C_c x_c + D_c y, \tag{91}$$

которые отличаются от уравнений (1), (2) тем, что управление и регулируемые переменные u и z – m-мерные вектора, $y(t)$ – r-мерный вектор измеряемых переменных, $f(t)$ – μ-мерный вектор внешних возмущений, A, B_1, B_2, C_1, C_2, A_c, B_c, C_c, D_c – числовые матрицы соответствующих размеров.

Вектор внешних возмущений состоит из непрерывных, неизвестных, ограниченных функций

$$|f_r(t)| \leqslant f_r^*, \quad r = \overline{1, \mu}, \tag{92}$$

где f_r^* $(r = \overline{1, \mu})$ – известные числа.

При известном стабилизирующем регуляторе (91) определяется как

$$z_{s,i} = \max_{\substack{t_p \leqslant t \leqslant T \\ |f_i(t)| \leqslant f_i^*}} |z_i(t)| \quad i = \overline{1, m} \tag{93}$$

Задача точного управления объектом (90) состоит в нахождении регулятора (91), при котором система (90), (91) удовлетворяет требованию к точности

$$z_{s,i} \leqslant z_{s,i}^*, \quad i = \overline{1, m}, \tag{94}$$

где $z_{s,i}^*$ $(i = \overline{1, m})$ – заданные числа.

Переходя к редукции этой задачи разложим компоненты вектора внешних возмущений в ряды Фурье

$$f_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{rk} \, \sin\left(\omega_k t + \psi_{rk}\right), \quad r = 1, \mu, \tag{95}$$

в которых $\omega_k = \dfrac{2\pi}{T} k$ $(k = \overline{0, \infty})$, а амплитуды и фазы неизвестны. Сумма модулей амплитуд удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_{rk}| \leqslant f_r^{**}, \quad r = \overline{1, \mu,}. \tag{96}$$

Убедимся, что, если выполняется неравенство

$$T_{zf}^{T}(-j\omega)QT_{zf}(j\omega) \leqslant I_m, \quad 0 \leqslant \omega < \infty, \tag{97}$$

где $T_{zf}(s)$ – передаточная матрица системы (90), (91), связывающая вектор z с вектором f, Q – диагональная матрица $Q = [q, \ldots, q_m]$ с компонентами

$$q_i = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\mu} f_r^{**}\right)^2}{z_{s,i}^{*2}}, \quad (i = \overline{1,m}), \tag{98}$$

то установившиеся ошибки системы (90), (91) меньше допустимых

$$|z_{ss_i,i}| \leqslant z_{s_i,i}^{*}, \quad (i = \overline{1,m}). \tag{99}$$

Действительно, при $t \to \infty$ выходы

$$z_{ss_i,i} = \sum_{k=0}^{\infty} a_i(\omega_k)\sin(\omega_k t + \varphi_i(\omega_k)), \quad i = \overline{1,m}. \tag{100}$$

Амплитуды выходов связаны с передаточной матрицей $T_{zf}(s)$ следующим образом

$$a_i^2(\omega_k) = z_i^- z_i^+ \quad (i = \overline{1,m}), \tag{101}$$

где z_i^- z_i^+ – i-тые компоненты векторов

$$z_i^- = [T_{zf}(-j\omega_k)f_k^+]_{[i]}, \quad z_i^+ = [T_{zf}(j\omega_k)f_k^+]_{[i]} \quad (i = \overline{1,m}), \tag{102}$$

в которых $[*]_{[i]}$ - i-я компонента вектора [*],

$$f_k^- = \left[f_{1k}e^{-\Psi_1 k}, \ldots, f_{\mu k}e^{-\Psi_\mu k}\right]^T, \quad f_k^+ = \left[f_{1k}e^{\Psi_1 k}, \ldots, f_{\mu k}e^{\Psi_\mu k}\right]^T, \quad (k = 0, \infty). \tag{103}$$

Ниже используются неравенства

$$\frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{p} |\nu_k|\right)^2}{p} \leqslant \sum_{k=0}^{p} \nu_k^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p} |\nu_k|\right)^2, \tag{104}$$

первое из которых является неравенством Коши-Буняковского, а второе – очевидно.

Умножим неравенство (97) слева на $\left(f_k^-\right)^T$, а справа на f_k^+ и получим, учетом второго из неравенств (104)

$$\sum_{i=1}^{m} q_i a_i^2(\omega_k) \leqslant \sum_{r=1}^{\mu} f_{rk}^2 \leqslant \left(\sum_{r=1}^{\mu} |f_{rk}|\right)^2 \tag{105}$$

или

$$|a_i(\omega_k)| \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{\mu} |f_{rk}|\right)}{\sqrt{q_i}}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{106}$$

Из выражения (100) следует, что

$$|z_{ss,i}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_i(\omega_k)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{q_i}} \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} |f_{rk}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{q_i}} \sum_{r=1}^{\mu} f_r^{**}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{107}$$

Учитывая выражение (98) получим неравенство (99).

Если известно, что внешнее возмущение содержит P существенных гармоник, то, пренебрегая в рядах Фурье (95) остальными гармониками, получим, после переобозначения индексов частот, амплитуд и фаз

$$f_r(t) \approx \sum_{k=1}^{p} f_{rk} \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad r = \overline{1,\mu}. \tag{108}$$

Амплитуды этого возмущения удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=1}^{p} f_{rk}^2 \leqslant f_r^{*2}, \quad r = \overline{1,\mu}. \tag{109}$$

Если принять коэффициенты диагональной матрицы в матричном неравенстве (97) как

$$q_i = \frac{p \sum\limits_{r=1}^{\mu} f_r^{*2}}{z_{s,i}^{*2}}, \quad i = \overline{1,\mu}, \tag{110}$$

то установившиеся ошибки будут меньше допустимых.

Действительно, при возмущении (108) выходы описываются как

$$z_{ss,i}(t) \approx \sum_{k=1}^{p} a_i(\omega_k) \sin(\omega_k t + \varphi_i(\omega_k)). \tag{111}$$

Тогда, с учетом первого из неравенств (104), получим

$$|z_{ss,i}(t)|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} |a_i(\omega_k)|\right)^2 \leqslant p \sum_{k=1}^{p} a_i^2(\omega_k), \quad i = \overline{1,m}. \tag{112}$$

Из выражений (105) следует, с учетом (109) после суммирования по всем частотам

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \sum_{k=1}^{p} a_i^2(\omega_k) \leqslant \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{p} f_{rk}^2 \leqslant \sum_{r=1}^{\mu} f_r^{*2}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{113}$$

или

$$\sum_{k=1}^{p} a_i^2(\omega_k) \leqslant \frac{\sum\limits_{r=1}^{\mu} f_r^{*2}}{q_i}. \tag{114}$$

С учетом этого неравенства запишем (112) как

$$|z_{ss,i}(t)|^2 \leqslant \frac{p\sum\limits_{r=1}^{\mu} f_r^{*2}}{q_i}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{115}$$

Используя выражение (110) получим

$$|z_{ss_i i}(t)| \leqslant z_{s_i i}^{*2}. \tag{116}$$

6. Точность LQ оптимальных систем

6.1. Управление по состоянию при суммирующем внешнем возмущении

Рассмотрим систему, аналогичную системе (32)

$$\dot{x} = Ax + B_2(u + f), \quad z = C_1 x, \quad u = Kx, \tag{117}$$

в которой матрица K находится как

$$K = -B_2^T X, \tag{118}$$

где X – симметричная неотрицательно определенная матрица, являющаяся решением уравнения Риккати

$$A^T X + XA - XB_2B_2^T X = -C_1^T Q C_1. \tag{119}$$

Передаточная матрица этой системы удовлетворяет тождеству

$$\left[I_m + W(s)\right]^T \left[I_m + W(s)\right] = I_m + w_{zu}^T(-s) Q w_{zu(s)}, \tag{120}$$

где

$$W(s) = -K\left(Is - A\right)^{-1} B_2, \quad W_{zu}(s) = C_1\left(Is - A\right)^{-1} B_2. \tag{121}$$

Доказательство этого тождества повторяет доказательство утверждения 3.1.

Повторяя преобразования (40) – (43), получим передаточную матрицу этой системы

$$T_{zf}(s) = W_{zu}(s)\left[Im + W(s)\right]^{-1}. \tag{122}$$

Покажем, что если матрица K определяется выражениями (118), (119), то выполняется неравенство (97).

Перепишем выражение (122) как

$$[I_m + W(s)]\, W_{zu}^{-1}(s) T_{zf}(s) = I_m. \tag{123}$$

Его можно записать также в виде

$$T_{zf}^T(-s) W^{-1T}(-s)\, [I_m + W(s)]^T = I_m. \tag{124}$$

Из этих выражений следует, что

$$T_{zf}^T(-j\omega) W_{zu}^{-1T}(-j\omega)\, [I_m + W(-j\omega)]^T\, [I_m + W(j\omega)]\, W_{zu}^{-1}(j\omega) T_{zf}(j\omega) = I_m, \quad 0 \leqslant \omega < \infty \tag{125}$$

Используя тождество (126), получим

$$T_{zf}^T(-j\omega) \left[W_{zu}^{-1T}(-j\omega) W_{zu}^{-1}(j\omega) + Q\right] T_{zf}^T(j\omega) = I_m, \quad 0 \leqslant \omega < \infty \tag{126}$$

Так как $W_{zu}^{-1T}(-j\omega) W_{zu}^{-1}(j\omega) \geqslant 0,$ то из равенства (126) следует неравенство (97).