ЧАСТОТНОЕ АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОРЕЖИМНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Александров А.Г.[1)], Орлов Ю.Ф.[2)]

[1)] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117 997, г. Москва, В-342, ул. Профсоюзная, д. 65
E-mail: alex7@ipu.rssi.ru

[2)] *Электростальский политехнический институт (филиал МИСиС)*
Россия, 144 000, Московская обл., г. Электросталь, ул. Первомайская, д. 7
E-mail: yu_orlov@mail.ru

Аннотация: предлагается алгоритм частотного адаптивного управления. Он основан на методе конечно-частотной идентификации и H_∞ -субоптимальном управлении.

Введение

Технические системы функционируют в условиях многорежимности (режимы полета самолета, грузы различного веса, которые должен поднимать и переносить робот в различные интервалы времени, поломки компонентов системы и т.д.). Многорежимность означает, что постоянные параметры объекта управления изменяются в некоторый момент времени и остаются неизменными в течении достаточно большого интервала времени (длительности режима) постоянными. Эти параметры часто неизвестны и поэтому используют адаптивное управление, в котором можно выделить два вида: прямое и идентификационное.

Прямое адаптивное управление связано с системами с эталонной моделью [1]-[3], [4]. Оно формируется также на основе метода рекуррентных целевых неравенств [5], [6] и его современного развития в работах [7], [8].

Идентификационное адаптивное управление основано на идентификации объекта управления с целью получения оценок его параметров. Используя эти оценки, синтезируется регулятор. К этому виду управления относится частотное адаптивное управление [9], где для идентификации объекта и замкнутой системы используется метод конечно-частотной идентификации [10], в соответствии с которым объект или замкнутая система возбуждаются испытательным сигналом в виде суммы гармоник, число которых не превышает размерности пространства состояний объекта или замкнутой системы. Частоты испытательного сигнала не должны совпадать с частотами внешнего возмущения. Это условие проверяется в процессе идентификации, что несколько сужает класс внешних возмущений.

В указанных выше прямых методах адаптации регулятор непрерывно перестраивается, а при частотном адаптивном управлении изменение параметров регулятора происходит через достаточно большие промежутки времени (интервалы адаптации). Это обеспечивает линейность модели системы на этих интервалах (тогда, как в других методах модель системы нелинейна и трудно найти условия, при которых в процессе адаптации значения входа и выхода объекта не принимали бы недопустимо больших значений) и поэтому не возникает трудностей реализации алгоритма адаптации.

Основной проблемой адаптивного управления многорежимными объектами является сокращение времени адаптации, которое должно быть меньше длительности каждого режима. Для решения этой задачи используется метод [11]. Основан он на методе конечно-частотной идентификации и H_∞-субоптимальном управлении. В [11] предполагалось, что амплитуды и частоты испытательного сигнала заданы. Если окажется, что эти частоты далеки от модулей границ корней характеристического полинома объекта, то длительность адаптации может оказаться недопустимо большой [12] и превышать длительность режимов работы объекта.

Для сокращения времени адаптации предлагаются алгоритмы самонастройки амплитуд и частот испытательного сигнала (8). Частоты настраиваются так, чтобы они были близки к границам корней характеристического полинома объекта. Основаны они на алгоритмах [12], [13] такой самонастройки для объектов с одним входом и одним выходом. Для этого многомерный объект (1) рассматривается как совокупность $l \times m$ одномерных «объектов».

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{p}} = A_{\text{p}}^{(r)}\boldsymbol{x}_{\text{p}} + B_{\text{p}}^{(r)}\boldsymbol{u} + M^{(r)}\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{y} = C_{\text{p}}^{(r)}\boldsymbol{x}_{\text{p}}, \quad t_{r-1} \le t < t_r, \quad r = 1, 2, \ldots; \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{c}} = A_{\text{c}}(t)\boldsymbol{x}_{\text{c}} + B_{\text{c}}(t)\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = C_{\text{c}}(t)\boldsymbol{x}_{\text{c}}, \tag{2}$$

где r – номер режима работы объекта (1); t_r – момент окончания r-го режима (значения t_r, для простоты, известны); $\boldsymbol{x}_{\text{p}}(t) \in \boldsymbol{R}^n$ – вектор состояния объекта; $\boldsymbol{x}_{\text{c}}(t) \in \boldsymbol{R}^n$ – вектор состояния регулятора (2); $\boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{R}^m$ – вектор управления; $\boldsymbol{y}(t) \in \boldsymbol{R}^l$ – вектор измеряемых и регулируемых переменных; $\boldsymbol{f}(t) \in \boldsymbol{R}^{m_1}$ – вектор неизмеряемых внешних возмущений – ограниченных полигармонических функций:

$$f_i(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} f_{i\mu} \sin(\bar{\omega}_\mu t + \varphi_{i\mu}), \quad i = \overline{1, m_1}, \tag{3}$$

частоты $\bar{\omega}_\mu$ и фазы $\varphi_{i\mu}$ $(i = \overline{1, m_1},\ \mu = \overline{1, \infty})$ которых – неизвестные числа, а амплитуды $f_{i\mu}$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |f_{i\mu}| < f_i^*, \quad i = \overline{1, m_1}; \tag{4}$$

звездочка при переменной здесь и далее означает значение этой переменной – заданное либо известное число; $A_{\text{p}}^{(r)}$, $B_{\text{p}}^{(r)}$, $C_{\text{p}}^{(r)}$ и $M^{(r)}$ – неизвестные матрицы чисел, такие, что в каждом режиме объект (1) полностью управляем и полностью наблюдаем. $A_{\text{c}}(t)$, $B_{\text{c}}(t)$ и $C_{\text{c}}(t)$ – кусочно-постоянные матрицы, длительность постоянства которых меньше длительности режимов объекта. Длительность режимов достаточно велика, так что вынужденные колебания на выходах объекта устанавливаются (процессы успокаиваются). Это означает, что существует момент времени $\bar{t}_{r-1} > t_{r-1}$ такой, что

$$y_i(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_i^{(r)}(\bar{\omega}_\mu) \sin\left(\bar{\omega}_\mu t + \bar{\varphi}_i(\bar{\omega}_\mu)\right) + \varepsilon(t), \quad i = \overline{1, l}, \quad \bar{t}_{r-1} \le t < t_r, \tag{5}$$

где $|\varepsilon(t)| \le \varepsilon_y$, ε_y – заданное число.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм адаптации коэффициентов регулятора (2), такой, чтобы система (1), (2) удовлетворяла требованиям

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left| a_i^{(r)}(\bar{\omega}_\mu) \right| \le y_i^*, \quad i = \overline{1, l}, \quad \bar{t}_{r-1} \le t < t_r, \tag{6}$$

к установившимся амплитудам (значениям $a_i^{(r)}(\bar{\omega}_\mu)$) вынужденных колебаний (5), где y_i^* $\left(i=\overline{1,l}\right)$ – заданные числа. ■

Предполагается, что при известных матрицах объекта (1) решение этой задачи существует.

В r -ом режиме работы объекта адаптивное управление описывается уравнениями с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{c}}^{(r,\sigma)} = A_{\text{c}}^{(r,\sigma)}\boldsymbol{x}_{\text{c}}^{(r,\sigma)} + B_{\text{c}}^{(r,\sigma)}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}^{(r,\sigma)}), \quad \boldsymbol{u} = C_{\text{c}}^{(r,\sigma)}\boldsymbol{x}_{\text{c}}^{(r,\sigma)}, \\ t_{r-1,\sigma-1} \le t < t_{r-1,\sigma}, \quad \sigma=\overline{1,N^{(r)}}, \quad t_{r-1,N^{(r)}} \doteq \bar{t}_{r-1} \le t_{r,0} \doteq t_r, \end{gathered} \tag{7}$$

где ν -й элемент вектора $\boldsymbol{v}^{(r,\sigma)}$:

$$v_\nu(t) = \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{l}\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{\mu\nu}^{[i]} \sin\omega_{\mu\nu}^{[i]}(t-t_u), & \text{при} \quad t_{r-1} \le t \le \bar{t}_{r-1}, \\ 0, & \text{при} \quad \bar{t}_{r-1} \le t \le t_r, \end{cases} \qquad \nu=\overline{1,m}, \tag{8}$$

– испытательный сигнал, в котором $\rho_{\mu\nu}^{[i]} > 0$ и $\omega_{\mu\nu}^{[i]} \ne \bar{\omega}_q$ $\left(\mu=\overline{1,l},\ \ \nu=\overline{1,m},\ \ i=\overline{1,n}\right)$ – его амплитуды и частоты, а t_u – момент его приложения.

При решении задачи будем иметь в виду физические ограничения на элементы вектора $\boldsymbol{u}(t)$ управления:

$$|u_i(t)| \le u_i^* \ \ (i=\overline{1,m}), \quad t \ge t_0, \tag{9}$$

и вектора $\boldsymbol{y}(t)$ измеряемых и регулируемых переменных:

$$|y_i(t)| \le y_{\_i}^* \ \ \left(i=\overline{1,l}\right), \quad t \ge t_0, \tag{10}$$

где u_i^* $(i=\overline{1,m})$ и $y_{\_i}^*$ $\left(i=\overline{1,l}\right)$ – заданные числа, $y_{\_i}^* > y_i^*$ $\left(i=\overline{1,l}\right)$.

Для удобства изложения в начале приводятся алгоритмы для одномерного случая построение которых начинается с объекта первого порядка.

2. Управление одномерным объектом

2.1. Объект первого порядка

Система (1), (2) в этом случае примет вид

$$d^{(r)}\dot{y} + y = k^{(r)}u + m^{(r)}f, \quad t_{r-1} \le t < t_r, \quad r=1,2,\dots; \tag{11}$$

$$u = b^{(r)}y, \quad t_{r-1} \le t < t_r, \quad r=1,2,\dots, \tag{12}$$

вход $u(t)$ и выход $y(t)$ в которой:

$$|u(t)| \ \le \ u^*, \quad t \ge t_0; \tag{13}$$

$$|y(t)| \ \le \ y_{\_}^*, \quad t \ge t_0 \tag{14}$$

– ограниченные заданными значениями u^* и y^* функции; амплитуды f_i внешнего возмущения

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin(\bar{\omega}_i t + \varphi_i) \tag{15}$$

соответственно удовлетворят условиям:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i| \le f^*; \tag{16}$$

коэффициенты $d^{(r)} > 0$ и $k^{(r)} \neq 0$ объекта (11) не известны, для простоты положим $m^{(r)} = 1$.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм адаптации коэффициента $b^{(r)}$ регулятора (12) такой, чтобы система (11), (12) удовлетворяла требованиям (6), (14):

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a(\bar{\omega}_i)| \leq y^* \tag{17}$$

к установившимся амплитудам (значениям $a(\bar{\omega}_i)$) вынужденных колебаний (5):

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a(\bar{\omega}_i) \sin\left(\bar{\omega}_i t + \bar{\varphi}(\bar{\omega}_i)\right), \quad \bar{t}_{r-1} \leq t < t_r, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

2.1.1. Синтез регулятора

Для начала положим значения коэффициентов $d^{(r)}$ и $k^{(r)}$ известными на каждом режиме $r = 1, 2, \ldots$ работы объекта (11). Уравнение системы (11), (12) имеет вид

$$d^{(r)}\dot{y} + \left(1 - k^{(r)} b^{(r)}\right) y = f, \quad t_{r-1} \leq t < t_r, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Опустим, для простоты, индекс $^{(r)}$ у коэффициентов d, k и b. Подставляя (18) в (19), с учетом (15), имеем при $t \to \infty$

$$\bar{a}(\bar{\omega}_i) = \frac{f_i}{\sqrt{d^2 \bar{\omega}_i^2 + (1 - kb)^2}} \leq \frac{f_i}{\kappa}, \tag{20}$$

где

$$\kappa = \min_{\bar{\omega}_i} \left[d^2 \bar{\omega}_i^2 + (1 - kb)^2\right]^{1/2} = 1 - kb. \tag{21}$$

При $d > 0$ из условия устойчивости $1 - kb > 0$.

Оценивая (18) с учетом (20) и (21), имеем

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{a}(\bar{\omega}_i)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|f_i|}{\sqrt{d^2 \bar{\omega}_i^2 + (1 - kb)^2}} \leq \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} |f_i|}{1 - kb} \leq \frac{f^*}{1 - kb}.$$

Значение b будем искать из условия (14) и положим

$$\frac{f^*}{1 - kb} = y^*,$$

откуда получим выражение для определения коэффициента

$$b^{(r)} = \left(1 - \frac{f^*}{y^*}\right) \frac{1}{k^{(r)}}, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

2.1.2. Идентификация объекта

При неизвестных коэффициентах d и k объекта (11) в первом режиме[1] найдем их оценки методом конечно-частотной идентификации [14], для чего приложим в момент времени t_u ко входу объекта испытательный сигнал

$$u(t) = \rho \sin \omega (t - t_u), \quad t \geq t_u, \tag{23}$$

[1] Для простоты, индекс $^{(1)}$ у коэффициентов d, k и порождающих их параметров опущен в п. 2.1.2 и п. 2.1.3.

значения ρ^* амплитуды $\rho > 0$ и ω^* частоты $\omega > 0$ для начала положим заданными, а выход объекта (11) с момента времени $t_F \geq t_u$ подадим на вход фильтра Фурье:

$$\alpha(\tau) = \frac{2}{\rho\tau}\int_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\sin\omega(t-t_u)\,dt \qquad \text{и} \qquad \beta(\tau) = \frac{2}{\rho\tau}\int_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\cos\omega(t-t_u)\,dt. \tag{24}$$

При заданном значении τ^* времени фильтрации τ искомые оценки можно найти по значениям $\alpha(\tau^*)$, $\beta(\tau^*)$ и ω^* из равенств

$$d(\tau^*) = -\frac{1}{\omega^*}\frac{\beta(\tau^*)}{\alpha(\tau^*)} \qquad \text{и} \qquad k(\tau^*) = \alpha(\tau^*) + \frac{\beta(\tau^*)}{\alpha(\tau^*)}\beta(\tau^*), \tag{25}$$

удовлетворяющих уравнению

$$k(\tau^*) - j\omega^*\Big(\alpha(\tau^*) + j\beta(\tau^*)\Big)d(\tau^*) = \alpha(\tau^*) + j\beta(\tau^*).$$

Примечание 1. При $\tau^* \to \infty$ это уравнение имеет вид

$$k - j\omega(\alpha + j\beta)d = \alpha + j\beta, \tag{26}$$

где $\omega := \omega^*$, и вытекает из передаточной функции

$$w(s) = \frac{k}{ds+1} \tag{27}$$

объекта (11), значения

$$\alpha = \operatorname{Re} w(j\omega) \quad \text{и} \quad \beta = \operatorname{Im} w(j\omega)$$

которой на частоте ω называются [14] *частотными параметрами* объекта. Его коэффициенты d и k находятся из (26) однозначно при $\omega \neq 0$. ■

Значение τ^* времени фильтрации τ находится с помощью следующей процедуры.

Процедура 1 *(*определения времени фильтрации).

1. Прикладываем ко входу объекта (11) испытательный сигнал (23), а выход $y(t)$ объекта подаем на вход фильтра Фурье (24). Измеряем выходы этого фильтра в момент времени $\tau := \tau'$.

2. Продолжаем фильтрацию и измеряем выходы фильтра (24) в момент времени $\tau := \tau'' = \delta_\tau \tau'$, где $\delta_\tau > 1$ – заданное значение[2].

3. Проверяем условие

$$\left|\frac{\alpha(\tau') - \alpha(\tau'')}{\alpha(\tau'')}\right| < \varepsilon_\alpha \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{\beta(\tau') - \beta(\tau'')}{\beta(\tau'')}\right| < \varepsilon_\beta, \tag{28}$$

   где ε_α и ε_β – заданные числа. Если оно нарушается, то принимаем $\tau' = \tau''$ и возвращаемся к пункту 2.

4. Время фильтрации τ определено значением $\tau'' \doteq \tau^*$. ■

[2]для простоты можно принять $\delta_\tau = 2$

2.1.3. Самонастройка испытательного сигнала

При неизвестной амплитуде ρ испытательного сигнала (23), найдем максимальное ее значение ρ^*, при котором выполняются условия (13) и (14). Поиск амплитуды при известном значении ω^* частоты ω осуществляется следующей процедурой.

Процедура 2 (определения амплитуды испытательного сигнала).

1. Выбираем максимально возможное по условию (13) значение[3]
$$\rho := u^*.$$
2. Подаем сигнал
$$u(t) = \rho \sin \omega^*(t - t_u), \quad t_u \le t \le t_u + \tau_\rho, \tag{29}$$
где τ_ρ – заданное значение, и проверяем условие (14). Если оно выполняется, то переходим к пункту 4.
3. Уменьшаем значение амплитуды:
$$\rho := \rho/\delta_\rho,$$
где $\delta_\rho > 1$ – заданное значение[4], и возвращаемся к пункту 2, полагая t_u равным значению времени, при котором нарушилось условие (14).
4. Полагаем $t_u := t_u + \tau_\rho$ и вычисляем окончательное значение амплитуды
$$\rho := \min\left(u^*, \rho\frac{y^*}{y_{\max}}\right) \doteq \rho^*, \tag{30}$$
где $y_{\max}$ – максимально достигнутое значение выхода объекта на последнем обращении к пункту 2. ■

Примечание 2. Для сходимости этой процедуры на внешние возмущения накладываются дополнительные ограничения, описанные в работе [13]. ■

Значение ω^* частоты ω испытательного сигнала (23) находится используя следующую процедуру.

Процедура 3 (определения частоты испытательного сигнала).

1. Зададимся начальным значением $\omega^* := \omega_0$, по которому находим значения ρ^*, τ^*, $\alpha(\tau^*)$ и $\beta(\tau^*)$ используя процедуры 1 и 2.
2. Вычисляем частоту
$$\omega(\tau^*) = \left|\omega^*\frac{\alpha(\tau^*)}{\beta(\tau^*)}\right|.$$
3. Принимаем $\omega^{**} = \omega^*/2$, прикладываем к объекту сигнал
$$u(t) = \rho^{**}\sin\omega^{**}(t - t_u), \quad t \ge t_u,$$
в котором ρ^{**}, а также значения τ^{**}, $\alpha(\tau^{**})$ и $\beta(\tau^{**})$ находим используя процедуры 1 и 2.
4. Вычисляем частоту
$$\omega(\tau^{**}) = \left|\omega^{**}\frac{\alpha(\tau^{**})}{\beta(\tau^{**})}\right|.$$

[3]Операция $:=$ означает присвоение ($a := b$ – значение выражения b присваивается переменной a).
[4]для простоты можно принять $\delta_\rho = 2$

5. Проверяем условие
$$\left|\frac{\omega(\tau^*)-\omega(\tau^{**})}{\omega(\tau^{**})}\right| \le \varepsilon_\omega,$$
где ε_ω – заданное число. Если оно нарушается, то полагаем $\omega^* = \omega^{**}$, $\rho^* = \rho^{**}$, $\tau^* = \tau^{**}$, $\omega(\tau^*) = \omega(\tau^{**})$, и возвращаемся к пункту 3.

6. Частота ω испытательного сигнала (23) определена значением $\omega(\tau^{**}) \doteq \omega^*$. ■

По окончании процедуры 3 с найденным с ее помощью значением ω^*, находим, используя процедуры 1 и 2, значения ρ^*, τ^*, $\alpha(\tau^*)$ и $\beta(\tau^*)$ для вычисления по ним оценок (25) коэффициентов d и k объекта (11).

2.1.4. Анализ замкнутой системы

Подключаем регулятор (12), коэффициент (22) для которого вычислен по значению $k^{(r)} := k(\tau^*)$, определенному из формул (25), к объекту (11). Возможны следующие случаи:

A. Требование (14) к точности выполняется. Тогда, начиная с момента t_1 (времени начала второго режима), идентифицируем коэффициенты объекта этого режима, замкнутого регулятором (12), (22). Процесс такой идентификации описан ниже (в п. 2.1.5).

B. Требование (14) к точности не выполняется (объект оказался второго порядка). Тогда полагаем $\hat{n} = 2$ и идентифицируем коэффициенты модели второго порядка для объекта замкнутого регулятором (12), (22). Процесс такой идентификации описан в п. 2.2.

C. Система не устойчива. Тогда выключаем регулятор и начинаем процесс идентификации объекта с большим временем фильтрации, исходя из модели второго порядка.

Примечание 3. Предполагается, что регулятор не нарушает устойчивости системы при переходе объекта в следующий режим. В противном случае, такой регулятор отключается от объекта и начинается более длительный процесс идентификации.

2.1.5. Идентификация объекта, замкнутого регулятором

Рассмотрим систему
$$d^{(2)}\dot{y} + y = k^{(2)}u + f, \quad t \ge t_1 \tag{31}$$
$$u = b^{(1)}y + v, \quad t \ge t_1 \tag{32}$$
в начале второго режима (когда коэффициенты у объекта изменились, а регулятор остался от первого режима). При неизвестных коэффициентах $d^{(2)}$ и $k^{(2)}$ объекта (31) для определения их значений приложим в момент времени t_v ко входу $v(t)$ регулятора (32) испытательный сигнал
$$v(t) = \tilde{\rho}\sin\tilde{\omega}(t-t_v), \quad t \ge t_v, \tag{33}$$
значения $\tilde{\rho}^*$ амплитуды $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\omega}^*$ частоты $\tilde{\omega}$ которого определим используя процедуры 4[5] и 3, а выходы объекта (31) и регулятора (32) – измеряемые переменные $y(t)$ и $u(t)$, которые в момент времени $t_F \ge t_v$ подадим на входы фильтров Фурье:
$$\alpha_y(\tau) = \frac{2}{\rho\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\sin\omega(t-t_u)\,dt \qquad \text{и} \qquad \beta_y(\tau) = \frac{2}{\rho\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\cos\omega(t-t_u)\,dt,$$

[5] Процедура 4 – модификация процедуры 2, где наряду с условием (14) проверяется условие (13).

$$\alpha_u(\tau) = \frac{2}{\rho\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\sin\omega(t-t_u)\,dt \qquad \text{и} \qquad \beta_u(\tau) = \frac{2}{\rho\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\cos\omega(t-t_u)\,dt,$$

значение $\tilde{\tau}^*$ времени фильтрации τ в которых определим с помощью процедуры 1, и, затем, вычислим [15] значения

$$\alpha(\tau) = \frac{\alpha_y(\tau)\alpha_u(\tau)+\beta_y(\tau)\beta_u(\tau)}{\alpha_u^2(\tau)+\beta_u^2(\tau)} \qquad \text{и} \qquad \beta(\tau) = \frac{-\alpha_y(\tau)\beta_u(\tau)+\beta_y(\tau)\alpha_u(\tau)}{\alpha_u^2(\tau)+\beta_u^2(\tau)}.$$

Подставляя найденные значения $\tilde{\omega}^*$, $\tilde{\tau}^*$, $\alpha(\tilde{\tau}^*)$ и $\beta(\tilde{\tau}^*)$ в равенства (25):

$$d^{(2)}(\tilde{\tau}^*) = -\frac{1}{\tilde{\omega}^*}\frac{\beta(\tilde{\tau}^*)}{\alpha(\tilde{\tau}^*)} \qquad \text{и} \qquad k^{(2)}(\tilde{\tau}^*) = \alpha(\tilde{\tau}^*) + \frac{\beta(\tilde{\tau}^*)}{\alpha(\tilde{\tau}^*)}\beta(\tilde{\tau}^*),$$

найдем оценки коэффициентов объекта (31), по которым, затем, вычислим по формулам (22) оценку коэффициента $b^{(2)}$ регулятора (12) для второго режима.

Процедура 4 *(*определения амплитуды испытательного сигнала $\boldsymbol{v(t)}$).

1. Выбираем максимально возможное по условию (14) значение
$$\tilde{\rho} := y^*.$$

2. Подаем сигнал
$$v(t) = \tilde{\rho}\sin\tilde{\omega}(t-t_v), \quad t_v \le t \le t_v + \tau_{\tilde{\rho}}, \tag{34}$$
где $\tau_{\tilde{\rho}}$ – заданное значение, и проверяем условия (13) и (14). Если они выполняются, то переходим к пункту 4.

3. Уменьшаем значение амплитуды:
$$\tilde{\rho} := \tilde{\rho}/\delta_{\tilde{\rho}},$$
где $\delta_{\tilde{\rho}} > 1$ – заданное значение[6], и возвращаемся к пункту 2, полагая t_v равным значению времени, при котором нарушилось первое из условий: (13) либо (14).

4. Полагаем $t_v := t_v + \tau_{\tilde{\rho}}$ и вычисляем окончательное значение амплитуды
$$\tilde{\rho} := \tilde{\rho}\min\left(\frac{u^*}{u_{\max}},\ \frac{y^*}{y_{\max}}\right) \doteq \rho^*, \tag{35}$$
где $u_{\max}$ и $y_{\max}$ – максимально достигнутые значения входа и выхода объекта на последнем обращении к пункту 2. ■

2.2. Объект n-го порядка

Система (1), (2) в этом случае примет вид

$$d_n^{(r)}y^{(n)} + \cdots + d_1^{(r)}\dot{y} + y = k_{n-1}^{(r)}u^{(n-1)} + \cdots + k_0^{(r)}u + f, \ \ t_{r-1} \le t < t_r, \ \ r = 1,2,\ldots; \tag{36}$$

$$g_{n-1}^{(r)}u^{(n-1)} + \cdots + g_0^{(r)}u = b_{n-1}^{(r)}y^{(n-1)} + \cdots + b_0^{(r)}y, \quad \bar{t}_{r-1} \le t < \bar{t}_r, \quad r = 1,2,\ldots, \tag{37}$$

на каждом режиме: вход $u(t)$, выход $y(t)$ и внешнее возмущение удовлетворяют условиям (13)-(16), объект (36) устойчив, $d_n^{(r)} \neq 0$ и найдется $\gamma < n$ такая, что $k_\gamma^{(r)} \neq 0$, коэффициенты объекта (36) не известны. Нужно найти алгоритм адаптации коэффициентов регулятора (37) такой, чтобы система (36), (37) удовлетворяла требованию (17) к установившимся амплитудам вынужденных колебаний (18).

[6] для простоты можно принять $\delta_{\tilde{\rho}} = 2$

2.2.1. Синтез регулятора

Для начала положим значения коэффициентов $d_i^{(r)}$ $(i=\overline{1,n})$ и $k_i^{(r)}$ $(i=\overline{0,n-1})$ известными на каждом режиме $r=1,2,\ldots$ работы объекта (36). Опустим, для простоты, индекс $^{(r)}$ у коэффициентов системы (36), (37).

Искомый регулятор определяется тождеством Безу

$$d(s)g(s)-k(s)b(s)=k(s)\delta(s), \tag{38}$$

в котором полиномы $d(s)\doteq d_ns^n+\cdots+d_1s+1$, $g(s)\doteq g_{n-1}s^{n-1}+\cdots+g_1s+g_0$, $k(s)\doteq k_{n-1}s^{n-1}+\cdots+k_1s+k_0$ и $b(s)\doteq b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0$ определены на коэффициентах системы (36), (37), а гурвицев[7] полином $\delta(s)$ находится из тождества

$$\delta(-s)\delta(s)=d(-s)d(s)+q. \tag{39}$$

Нетрудно видеть что уравнение (38) имеет решение

$$g(s)=k(s) \qquad \text{и} \qquad b(s)=d(s)-\delta(s). \tag{40}$$

Передаточная функция системы (36), (37) с учетом (38) имеет вид

$$w_{yf}(s)=\frac{g(s)}{d(s)g(s)-k(s)b(s)}=\frac{1}{\delta(s)}.$$

Оценим (18) с учетом свойства $d(j\omega)d(-j\omega)\geq 0$:

$$\begin{aligned}|y(t)| \ &\leq \ \sum_{i=0}^{\infty}|\bar{a}(\bar{\omega}_i)|\leq\sum_{i=0}^{\infty}|w_{yf}(j\bar{\omega}_i)f_i|=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|f_i|}{|\delta(j\bar{\omega}_i)|}= \\ &= \ \sum_{i=0}^{\infty}\frac{|f_i|}{\sqrt{\delta(-j\bar{\omega}_i)\delta(j\bar{\omega}_i)}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|f_i|}{\sqrt{d(-j\bar{\omega}_i)d(j\bar{\omega}_i)+q}}\leq\frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty}|f_i|}{\sqrt{q}}\leq\frac{f^*}{\sqrt{q}}.\end{aligned} \tag{41}$$

Из неравенств (14) и (41) следует, что если значение коэффициента q в (39) определить из неравенства

$$q\leq\frac{f^{*2}}{y^{*2}}, \tag{42}$$

то регулятор (37) с коэффициентами полиномов (40) обеспечивает выполнение требования (17) к точности.

Таким образом, коэффициенты $g_i^{(r)}$ и $b_i^{(r)}$ $(i=\overline{0,n-1})$ регулятора находятся из следующей процедуры.

Процедура 5 (синтеза регулятора).

1. Выбираем значение q удовлетворяющее неравенству (42).
2. Решая тождество (39) находим гурвицев полином $\delta(s)$.
3. По формулам (40) формируем полиномы с коэффициентами регулятора (37). ■

Если степень полинома $k^{(r)}(s)$ объекта меньше $n-1$, то процедура 5 усложняется и она изложена в [16].

[7] чьи корни имеют отрицательные вещественные части

2.2.2. Идентификация объекта

При неизвестных коэффициентах d_i $(i=\overline{1,n})$ и k_i $(i=\overline{0,n-1})$ объекта (36) в первом режиме[8] найдем их оценки методом конечно-частотной идентификации [14], для чего приложим в момент времени t_u ко входу объекта испытательный сигнал

$$u(t)=\rho^*\sum_{i=1}^{n}\bar\rho_i\sin\omega_i(t-t_u),\quad t\ge t_u, \tag{43}$$

значение ρ^* амплитуды ρ которого определим используя процедуру 2, а значения

$$\omega_i=i\omega^*\quad i=\overline{1,n},$$

по нижней границе $\omega_l(\tau^{**})\doteq\omega^*$ испытательных частот, которую определим в результате использования процедуры 3. Значения $\bar\rho_i$ $(i=\overline{1,n})$ в (43) заданы. Выход объекта (11), возбужденного испытательным сигналом (43) подадим, с момента времени $t_F\ge t_u$, на вход фильтра Фурье:

$$\alpha_i(\tau)=\frac{2}{\rho^*\bar\rho_i\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau}y(t)\sin\omega_i(t-t_u)\,dt\quad\text{и}\quad\beta_i(\tau)=\frac{2}{\rho^*\bar\rho_i\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau}y(t)\cos\omega_i(t-t_u)\,dt,\qquad i=\overline{1,n},\quad t_F\ge t_u, \tag{44}$$

значение $\tilde\tau^*$ времени фильтрации τ в котором определим с помощью процедуры 1.

По значениям ω_i , $\alpha_i(\tau^*)$ и $\beta_i(\tau^*)$ $(i=\overline{1,n})$ формируем систему уравнений

$$\begin{aligned}k_0(\tau^*)+j\omega_ik_1(\tau^*)+\dots+(j\omega_i)^{n-1}k_{n-1}(\tau^*)-\Big(\alpha_i(\tau^*)+j\beta_i(\tau^*)\Big)\times\\ \times\Big(j\omega_id_1(\tau^*)+(j\omega_i)^2d_2(\tau^*)+\dots+(j\omega_i)^nd_n(\tau^*)\Big)=\alpha_i(\tau^*)+j\beta_i(\tau^*),\quad i=\overline{1,n},\end{aligned} \tag{45}$$

решением которой будут значения $d_i(\tau^*)$ $(i=\overline{1,n})$ и $k_i(\tau^*)$ $(i=\overline{0,n-1})$ оценок искомых коэффициентов объекта.

Примечание 4. При $\tau^*\to\infty$ эта система имеет вид

$$\begin{aligned}k_0+j\omega_ik_1+\dots+(j\omega_i)^{n-1}k_{n-1}-\Big(\alpha_i+j\beta_i\Big)\times\\ \times\Big(j\omega_id_1+(j\omega_i)^2d_2+\dots+(j\omega_i)^nd_n\Big)=\alpha_i+j\beta_i,\quad i=\overline{1,n},\end{aligned} \tag{46}$$

и вытекает из передаточной функции

$$w(s)=\frac{k_{n-1}s^{n-1}+\dots+k_1s+k_0}{d_ns^n+\dots+d_1s+1} \tag{47}$$

объекта (36), значения

$$\alpha_i=\operatorname{Re}w(j\omega_i)\quad\text{и}\quad\beta_i=\operatorname{Im}w(j\omega_i),\quad i=\overline{1,n}$$

которой на частотах

$$\omega_i\ne0,\ (i=\overline{1,n})\quad\text{и}\quad|\omega_\mu|\ne|\omega_\nu|\ \ (\mu\ne\nu) \tag{48}$$

называются [14] *частотными параметрами* объекта. Его коэффициенты d_i $(i=\overline{1,n})$ и k_i $(i=\overline{0,n-1})$ находятся из (46) однозначно при (48). ■

Анализ замкнутой системы и идентификация объекта второго режима, замкнутого регулятором первого режима также легко переносятся на случай объекта n-го порядка.

[8] Для простоты, индекс $^{(1)}$ у коэффициентов объекта и порождающих их параметров здесь опущен.

Процедура 6 (адаптивного управления).

1. Решая систему уравнений (45) находим оценки коэффициентов объекта (параметры этой системы находятся с помощью процедур 1, 2 и 3).

2. Синтезируем регулятор с помощью процедуры 5, используя оценки коэффициентов объекта.

3. Замыкаем объект регулятором и проверяем требование к точности (анализируем систему в соответствии с разделом 2.1.4). В пункте B этого анализа полагаем $\hat{n} := \hat{n} + 1$.

Примечание 5. Если f^* не известно, то в пункте 1 процедуры 5 полагаем $q := q^*$, где q^* – некоторое заданное число (при известном значении f^* это число находится из формулы (42)), и, при анализе замкнутой системы в пункте B возможны два варианта:

1. Объект имеет порядок больший чем n .

2. Выбрано малое значение q_0 . В этом случае увеличиваем значение $q := \delta_q q$, где $\delta_q > 1$ – заданное значение[9], и возвращаемся к пункту 2 процедуры 6 (обращение к процедуре 5 в этом пункте при этом происходит со второго пункта).

   Если требование к точности не выполняется после нескольких шагов, то объект имеет порядок, больший чем n .

Если при выбранном значении q^* параметра q система не устойчива (пункт C. раздела 2.1.4), то уменьшаем значение этого параметра: $q := q/\delta_q$.

3. Управление многомерным объектом

Рассмотрим устойчивый объект, описываемый эквивалентным (1) уравнением

$$\boldsymbol{y} = W^{(r)}(s)\boldsymbol{y} + W_f^{(r)}(s)\boldsymbol{f}, \quad t_{r-1} \le t < t_r, \quad r = 1, 2, \dots, \tag{49}$$

где

$$W^{(r)}(s) = C_{\text{p}}^{(r)}(E_n s - A_{\text{p}}^{(r)})B_{\text{p}}^{(r)} = \begin{pmatrix} w_{11}^{(r)}(s) & w_{12}^{(r)}(s) & \cdots & w_{1m}^{(r)}(s) \\ w_{21}^{(r)}(s) & w_{22}^{(r)}(s) & \cdots & w_{2m}^{(r)}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{l1}^{(r)}(s) & w_{l2}^{(r)}(s) & \cdots & w_{lm}^{(r)}(s) \end{pmatrix},$$

$$w_{pq}^{(r)}(s) = \frac{k_{pq}^{(r)[\gamma_{pq}]} s^{\gamma_{pq}} + \cdots + k_{pq}^{(r)[1]} s + k_{pq}^{(r)[0]}}{d_{pq}^{(r)[n_{pq}]} s^{n_{pq}} + \cdots + d_{pq}^{(r)[1]} s + 1} \tag{50}$$

– передаточная функция, связывающая q -й вход и p -й выход объекта в r -ом режиме, $W_f(s) = C_{\text{p}}^{(r)}(E_n s - A_{\text{p}}^{(r)})M^{(r)}$ – $l \times m_1$ матрица.

Коэффициенты $d_{pq}^{(r)[i]}$ $(i = \overline{1, n_{pq}})$ и $k_{pq}^{(r)[i]}$ $(i = \overline{0, \gamma_{pq}}, \quad p = \overline{1, l}, \quad q = \overline{1, m})$ передаточных функций (50) объекта (49) не известны.

Так как значения n_{pq} и γ_{pq} не известны, будем полагать $n_{pq} = \kappa$, $\gamma_{pq} = \kappa - 1$ $\left(p = \overline{1, l}, \quad q = \overline{1, m}\right)$ и принимать последовательно $\kappa = 1$, затем $\kappa = 2$, и т.д., до тех пор, пока не выполнятся требования (6) к точности.

[9] для простоты можно принять $\delta_\rho = 2$

3.1. Объект с двумя входами и двумя выходами

Записанное через передаточную матрицу

$$W^{(r)}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{k_{11}^{(r)}}{d_{11}^{(r)}s+1} & \dfrac{k_{12}^{(r)}}{d_{12}^{(r)}s+1} \\ \dfrac{k_{21}^{(r)}}{d_{21}^{(r)}s+1} & \dfrac{k_{22}^{(r)}}{d_{22}^{(r)}s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11}^{(r)}(s) & w_{12}^{(r)}(s) \\ w_{21}^{(r)}(s) & w_{22}^{(r)}(s) \end{pmatrix} \tag{51}$$

уравнение такого объекта, здесь имеет вид

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11}^{(r)}(s) & w_{12}^{(r)}(s) \\ w_{21}^{(r)}(s) & w_{22}^{(r)}(s) \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad t_{r-1} \le t < t_r, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{52}$$

Его входы $u_1(t)$, $u_2(t)$ и выходы $y_1(t)$, $y_2(t)$ – ограниченные функции:

$$|u_1(t)| \le u_1^*, \quad |u_2(t)| \le u_2^*, \quad t \ge t_0, \tag{53}$$

$$|y_1(t)| \le y_1^*, \quad |y_2(t)| \le y_2^*, \quad t \ge t_0, \tag{54}$$

где u_1^* , u_2^* , y_1^* и y_2^* – заданные значения. Амплитуды $f_{1\mu}$ и $f_{2\mu}$ внешнего возмущения (3) соответственно удовлетворят условиям (4), где $m_1 = 2$. Коэффициенты $d_{11}^{(r)} > 0$, $d_{12}^{(r)} > 0$, $d_{21}^{(r)} > 0$, $d_{22}^{(r)} > 0$ и $k_{11}^{(r)} \ne 0$, $k_{12}^{(r)} \ne 0$, $k_{21}^{(r)} \ne 0$, $k_{22}^{(r)} \ne 0$ объекта (52) не известны.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм адаптации коэффициентов передаточной матрицы регулятора

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} w_{c,11}^{(r)}(s) & w_{c,12}^{(r)}(s) \\ w_{c,21}^{(r)}(s) & w_{c,22}^{(r)}(s) \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad t_{r-1} \le t < t_r, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{55}$$

такой, чтобы система (52), (55) удовлетворяла требованиям (6), (54):

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_1(\bar\omega_i)| \le y_1^* \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |a_2(\bar\omega_i)| \le y_2^* \tag{56}$$

к установившимся амплитудам (значениям $a_1(\bar\omega_i)$ и $a_2(\bar\omega_i)$) вынужденных колебаний (5).

3.1.1. Синтез регулятора

Для начала положим значения коэффициентов передаточной матрицы (51) известными на каждом режиме $r = 1, 2, \ldots$ работы объекта (52). Опустим, для простоты, индекс ${}^{(r)}$ у коэффициентов $d_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ и $b_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = \overline{1,2})$.

Уравнение объекта в форме «вход-выход» можно представить как два одномерных объекта:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (d_{11}s+1)(d_{12}s+1)y_1 &=& k_{11}(d_{12}s+1)u_1 + k_{12}(d_{11}s+1)u_2, \\ (d_{21}s+1)(d_{22}s+1)y_2 &=& k_{21}(d_{22}s+1)u_1 + k_{22}(d_{21}s+1)u_2, \end{array} \right. \tag{57}$$

Пусть объект (52) является минимально-фазовым. Это означает, что корни полинома

$$t(s) = \det \begin{pmatrix} k_{11}(d_{12}s+1) & k_{12}(d_{11}s+1) \\ k_{21}(d_{22}s+1) & k_{22}(d_{21}s+1) \end{pmatrix}$$

имеют отрицательные вещественные части.

Введем «новое» управление

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar u_1 &=& k_{11}(d_{12}s+1)u_1 + k_{12}(d_{11}s+1)u_2, \\ \bar u_2 &=& k_{21}(d_{22}s+1)u_1 + k_{22}(d_{21}s+1)u_2. \end{array} \right. \tag{58}$$

Тогда уравнения (57) примут вид

$$\begin{cases} (d_{11}s+1)(d_{12}s+1)y_1 &= \bar{u}_1, \\ (d_{21}s+1)(d_{22}s+1)y_2 &= \bar{u}_2. \end{cases}$$

Это уравнение двух одномерных объектов. Используя процедуру 5 найдем

$$\begin{cases} \bar{g}_{11}(s)\bar{u}_1 &= \bar{b}_{11}(s)y_1, \\ \bar{g}_{22}(s)\bar{u}_2 &= \bar{b}_{22}(s)y_2. \end{cases}$$

Исключая $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ с помощью (58) получим формулы для вычисления коэффициентов передаточной матрицы регулятора (55).

Общий случай (когда объект может быть неминимально-фазовым) будет рассмотрен ниже (см. п. 3.2.3).

3.1.2. Идентификация объекта

При неизвестных коэффициентах d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} и k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22} передаточной матрицы (51) объекта (52) в первом режиме[10] найдем их оценки методом конечно-частотной идентификации, для чего приложим в момент времени t_u ко входу объекта испытательный сигнал

$$\begin{cases} u_1(t) &= \rho_1\Big(\bar{\rho}_{11}\sin\omega_1(t-t_u)+\bar{\rho}_{12}\sin\omega_2(t-t_u)\Big), \\ u_2(t) &= \rho_2\Big(\bar{\rho}_{21}\sin\omega_1(t-t_u)+\bar{\rho}_{22}\sin\omega_2(t-t_u)\Big), \end{cases} \qquad t\ge t_u, \tag{59}$$

где $\bar{\rho}_{11}$, $\bar{\rho}_{12}$, $\bar{\rho}_{21}$ и $\bar{\rho}_{22}$ – заданные весовые коэффициенты. Значения ρ_i^* амплитуд ρ_i и ω_i^* частот ω_i $(i=\overline{1,2})$ в начале положим заданными, а выход объекта (11) в момент времени $t_F\ge t_u$ подадим на вход фильтра Фурье:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(\tau) &= \frac{2}{\rho_1^*\bar{\rho}_{11}\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_1(t)\sin\omega_1^*(t-t_u), & \alpha_{12}(\tau) &= \frac{2}{\rho_1^*\bar{\rho}_{12}\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_1(t)\sin\omega_2^*(t-t_u), \\ \alpha_{21}(\tau) &= \frac{2}{\rho_2^*\bar{\rho}_{21}\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_2(t)\sin\omega_1^*(t-t_u), & \alpha_{22}(\tau) &= \frac{2}{\rho_2^*\bar{\rho}_{22}\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_2(t)\sin\omega_2^*(t-t_u), \end{aligned} \tag{60}$$

и

$$\begin{aligned} \beta_{11}(\tau) &= \frac{2}{\rho_1^*\bar{\rho}_{11}\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_1(t)\cos\omega_1^*(t-t_u), & \beta_{12}(\tau) &= \frac{2}{\rho_1^*\bar{\rho}_{12}\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_1(t)\cos\omega_2^*(t-t_u), \\ \beta_{21}(\tau) &= \frac{2}{\rho_2^*\bar{\rho}_{21}\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_2(t)\cos\omega_1^*(t-t_u), & \beta_{22}(\tau) &= \frac{2}{\rho_2^*\bar{\rho}_{22}\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_2(t)\cos\omega_2^*(t-t_u). \end{aligned} \tag{61}$$

При заданном значении τ^* времени фильтрации τ искомые оценки можно найти по значениям $\alpha_{11}(\tau^*)$, $\alpha_{12}(\tau^*)$, $\alpha_{21}(\tau^*)$, $\alpha_{22}(\tau^*)$, $\beta_{11}(\tau^*)$, $\beta_{12}(\tau^*)$, $\beta_{21}(\tau^*)$, $\beta_{22}(\tau^*)$, ω_1^* и ω_1^* из аналогичных (25) равенств

$$d_{\mu\nu}(\tau^*) = -\frac{1}{\omega_q^*}\frac{\beta_{\mu\nu}(\tau^*)}{\alpha_{\mu\nu}(\tau^*)} \quad \text{и} \quad k_{\mu\nu}(\tau^*) = \alpha_{\mu\nu}(\tau^*) + \frac{\beta_{\mu\nu}(\tau^*)}{\alpha_{\mu\nu}(\tau^*)}\beta_{\mu\nu}(\tau^*), \quad \mu,\nu=\overline{1,2},$$

удовлетворяющих уравнению

$$k_{\mu\nu}(\tau^*) - j\omega_q^*\Big(\alpha_{\mu\nu}(\tau^*)+j\beta_{\mu\nu}(\tau^*)\Big)d_{\mu\nu}(\tau^*) = \alpha_{\mu\nu}(\tau^*)+j\beta_{\mu\nu}(\tau^*), \quad \mu,\nu=\overline{1,2}.$$

[10] Для простоты, индекс $^{(1)}$ у коэффициентов передаточной матрицы (51) и порождающих их параметров опущен в п. 3.1.2 и п. 3.1.3.

Примечание 1 также легко переносится на объекты (52). Значение τ^* времени фильтрации τ можно найти, в свою очередь, с помощью следующей, аналогичной процедуре 1, процедуры.

Процедура 7 *(*определения времени фильтрации).

1. Прикладываем ко входам объекта (52) испытательный сигнал (59), а выходы (функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$) объекта подаем на входы фильтра Фурье (60), (61) и измеряем выходы этого фильтра в момент времени $\tau := \tau'$.

2. Продолжаем фильтрацию и измеряем выходы фильтра (60), (61) в момент времени $\tau := \tau'' = \delta_\tau \tau'$, где $\delta_\tau > 1$ – заданное значение[11].

3. Проверяем условие

$$\left|\frac{\alpha_{\mu\nu}(\tau') - \alpha_{\mu\nu}(\tau'')}{\alpha_{\mu\nu}(\tau'')}\right| < \varepsilon_\alpha \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{\beta_{\mu\nu}(\tau') - \beta_{\mu\nu}(\tau'')}{\beta_{\mu\nu}(\tau'')}\right| < \varepsilon_\beta, \qquad \mu, \nu = \overline{1, 2}, \tag{62}$$

   где ε_α и ε_β – заданные числа. Если оно нарушается (не выполняется хотя-бы одно из неравенств (62)), то принимаем $\tau' = \tau''$ и возвращаемся к пункту 2.

4. Время фильтрации τ определено значением $\tau'' \doteq \tau^*$. ■

3.1.3. Самонастройка испытательного сигнала

При неизвестных амплитудах $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$ испытательного сигнала (59), найдем максимальные их значения ρ_1^* и ρ_2^* , при которых выполняются условия (53) и (54). Поиск амплитуды при известных значениях ω_1^* и ω_2^* частот $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ оформим в виде следующей, аналогичной процедуре 2, процедуры.

Процедура 8 *(*определения амплитуды испытательного сигнала).

1. Выбираем максимально возможные по условию (53) значения

$$\rho_1 := \frac{u_1^*}{\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho}_{12}} \qquad \text{и} \qquad \rho_2 := \frac{u_2^*}{\bar{\rho}_{21} + \bar{\rho}_{22}}.$$

2. Подаем сигнал (59) с частотами $\omega_1 := \omega_1^*$ и $\omega_2 := \omega_2^*$, на интервале $[t_u, t_u + \tau_\rho] \ni t$, где τ_ρ – заданное значение, и проверяем условия (54). Если они выполняются, то переходим к пункту 4.

3. Уменьшаем значения амплитуд:

$$\rho_1 := \rho_1 / \delta_{\rho_1} \qquad \text{и} \qquad \rho_2 := \rho_2 / \delta_{\rho_2},$$

   где $\delta_{\rho_1} > 1$ и $\delta_{\rho_2} > 1$ – заданные значения[12], и возвращаемся к пункту 2, полагая t_u равным значению времени, при котором нарушилось условие (14).

4. Полагаем $t_u := t_u + \tau_\rho$ и вычисляем окончательные значения амплитуд

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_1 &:= \min\left(\frac{u_1^*}{\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho}_{12}},\ \rho_1 \frac{y_1^*}{y_1^{\max}},\ \rho_1 \frac{y_2^*}{y_2^{\max}} \right) \doteq \rho_1^*, \\ \rho_2 &:= \min\left(\frac{u_2^*}{\bar{\rho}_{21} + \bar{\rho}_{22}},\ \rho_2 \frac{y_1^*}{y_1^{\max}},\ \rho_2 \frac{y_2^*}{y_2^{\max}} \right) \doteq \rho_2^*, \end{aligned} \right. \tag{63}$$

   где $y_1^{\max}$ и $y_2^{\max}$ – максимально достигнутые значения выхода объекта на последнем обращении к пункту 2. ■

[11] для простоты можно принять $\delta_\tau = 2$

[12] для простоты можно принять $\delta_{\rho_1} = \delta_{\rho_2} = 2$

Значения ω_1^* и ω_2^* частот ω_1 и ω_2 испытательного сигнала (59) можно найти, в свою очередь, с помощью следующей, аналогичной процедуре 3, процедуры.

Процедура 9 (определения частоты испытательного сигнала).

1. Зададимся начальными значениями $\omega_1^* := \omega_1^0$ и $\omega_2^* := \omega_2^0$, по которым находим значения ρ_1^*, ρ_2^*, τ^*, $\alpha_{11}(\tau^*)$, $\alpha_{12}(\tau^*)$, $\alpha_{21}(\tau^*)$, $\alpha_{22}(\tau^*)$, $\beta_{11}(\tau^*)$, $\beta_{12}(\tau^*)$, $\beta_{21}(\tau^*)$ и $\beta_{22}(\tau^*)$, используя процедуры 7 и 8.

2. Вычисляем частоты

$$\begin{aligned} \omega_{11}(\tau^*) &= |\omega_1^*|\left|\frac{\alpha_{11}(\tau^*)}{\beta_{11}(\tau^*)}\right|, & \omega_{12}(\tau^*) &= |\omega_2^*|\left|\frac{\alpha_{12}(\tau^*)}{\beta_{12}(\tau^*)}\right|, \\ \omega_{21}(\tau^*) &= |\omega_1^*|\left|\frac{\alpha_{21}(\tau^*)}{\beta_{21}(\tau^*)}\right|, & \omega_{22}(\tau^*) &= |\omega_2^*|\left|\frac{\alpha_{22}(\tau^*)}{\beta_{22}(\tau^*)}\right|. \end{aligned}$$

3. Принимаем $\omega_1^{**} = \omega_1^*/2$ и $\omega_2^{**} = \omega_2^*/2$, прикладываем к объекту сигнал (59), в котором $\rho_1 := \rho_1^{**}$, $\rho_2 := \rho_2^{**}$ и $\tau_1 := \tau_1^{**}$, $\tau_2 := \tau_2^{**}$, а также значения $\alpha_{11}(\tau^{**})$, $\alpha_{12}(\tau^{**})$, $\alpha_{21}(\tau^{**})$, $\alpha_{22}(\tau^{**})$, и $\beta_{11}(\tau^{**})$, $\beta_{12}(\tau^{**})$, $\beta_{21}(\tau^{**})$, $\beta_{22}(\tau^{**})$ находим используя процедуры 7 и 8.

4. Вычисляем частоты

$$\begin{aligned} \omega_{11}(\tau^{**}) &= |\omega_1^{**}|\left|\frac{\alpha_{11}(\tau^{**})}{\beta_{11}(\tau^{**})}\right|, & \omega_{12}(\tau^{**}) &= |\omega_2^{**}|\left|\frac{\alpha_{12}(\tau^{**})}{\beta_{12}(\tau^{**})}\right|, \\ \omega_{21}(\tau^{**}) &= |\omega_1^{**}|\left|\frac{\alpha_{21}(\tau^{**})}{\beta_{21}(\tau^{**})}\right|, & \omega_{22}(\tau^{**}) &= |\omega_2^{**}|\left|\frac{\alpha_{22}(\tau^{**})}{\beta_{22}(\tau^{**})}\right|. \end{aligned}$$

5. Проверяем условия

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\omega_{11}(\tau^*) - \omega_{11}(\tau^{**})}{\omega_{11}(\tau^{**})}\right| \le \varepsilon_\omega, & &\left|\frac{\omega_{12}(\tau^*) - \omega_{12}(\tau^{**})}{\omega_{12}(\tau^{**})}\right| \le \varepsilon_\omega, \\ &\left|\frac{\omega_{21}(\tau^*) - \omega_{21}(\tau^{**})}{\omega_{21}(\tau^{**})}\right| \le \varepsilon_\omega, & &\left|\frac{\omega_{22}(\tau^*) - \omega_{22}(\tau^{**})}{\omega_{22}(\tau^{**})}\right| \le \varepsilon_\omega, \end{aligned}$$

   где ε_ω – заданное число. Если оно нарушается, то полагаем $\omega_1^* = \omega_1^{**}$, $\omega_2^* = \omega_2^{**}$, $\rho_1^* = \rho_1^{**}$, $\rho_2^* = \rho_2^{**}$, $\tau^* = \tau^{**}$, $\omega_{11}(\tau^*) = \omega_{11}(\tau^{**})$, $\omega_{12}(\tau^*) = \omega_{12}(\tau^{**})$, $\omega_{21}(\tau^*) = \omega_{21}(\tau^{**})$, $\omega_{22}(\tau^*) = \omega_{22}(\tau^{**})$, и возвращаемся к пункту 3.

6. Частоты ω_1 и ω_2 испытательного сигнала (59) определены значениями $\omega_1(\tau^{**}) \doteq \omega_1^*$ и $\omega_2(\tau^{**}) \doteq \omega_2^*$ соответственно. ■

По окончании процедуры 9 с найденными с ее помощью значениями ω_1^*, ω_2^* ($\omega_1^* \ne \omega_2^*$), находим значения ρ_1^*, ρ_2^*, τ^*, $\alpha_{11}(\tau^*)$, $\alpha_{12}(\tau^*)$, $\alpha_{21}(\tau^*)$, $\alpha_{22}(\tau^*)$, $\beta_{11}(\tau^*)$, $\beta_{12}(\tau^*)$, $\beta_{21}(\tau^*)$ и $\beta_{22}(\tau^*)$, используя процедуры 7 и 8. Последние из перечисленных значений являются оценками частотных параметров

$$\alpha_{\mu\nu} = \operatorname{Re} w_{\mu\nu}(j\omega_\nu) \qquad \text{и} \qquad \beta_{\mu\nu} = \operatorname{Im} w_{\mu\nu}(j\omega_\nu), \quad \mu,\nu = \overline{1,2} \tag{64}$$

объекта (52) – значений функций первого столбца его передаточной матрицы (51) на частоте $\omega_1 := \omega_1^*$ и второго – на частоте $\omega_2 := \omega_2^*$ соответственно.

3.2. Общий случай (объект n-го порядка с m входами и l выходами)

Решение задачи приведем в естественной последовательности: определения параметров испытательного сигнала, идентификации объекта и синтеза регулятора для достижения поставленной в задачи цели. Для простоты, индекс ${}^{(r)}$ везде опущен.

3.2.1. Самонастройка испытательного сигнала

Для определения значений коэффициентов передаточных функций (50), в момент времени t_u ко входам объекта (49) прикладывается испытательный сигнал

$$u_q(t) = \rho_q \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_{qi} \sin \omega_{qi}(t - t_u), \quad q = \overline{1,m}, \quad t \geq t_u, \tag{65}$$

а выходы (функции $y_p(t)$ $\left(p = \overline{1,l}\right)$) объекта подаются на входы фильтра Фурье

$$\begin{aligned} \alpha_{pq}^{[i]}(\tau) &= \frac{2}{\rho_q \bar{\rho}_{qi} \tau} \int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_p(t) \sin \omega_{qi}(t - t_u), \\ \beta_{pq}^{[i]}(\tau) &= \frac{2}{\rho_q \bar{\rho}_{qi} \tau} \int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y_p(t) \cos \omega_{qi}(t - t_u), \end{aligned} \quad \begin{aligned} &p = \overline{1,l}, \\ &q = \overline{1,m}, \quad t_F \geq t_u. \\ &i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{66}$$

Значения $\bar{\rho}_{qi}$ $(q = \overline{1,m}, \ i = \overline{1,n})$ заданы. Числа (66) – оценки частотных параметров

$$\alpha_{pq}^{[i]} = \operatorname{Re} w_{pq}(j\omega_{qi}) \quad \text{и} \quad \beta_{pq}^{[i]} = \operatorname{Im} w_{pq}(j\omega_{qi}), \quad p = \overline{1,l}, \quad q = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,n}$$

– значений передаточной функции (50) объекта (49) на частотах

$$\omega_{qi} \neq 0 \ \ (q = \overline{1,m}, \ \ i = \overline{1,n}) \quad \text{и} \quad |\omega_{q_1 i_1}| \neq |\omega_{q_2 i_2}| \ \ \Big(\{q_1, i_1\} \neq \{q_2, i_2\}\Big). \tag{67}$$

Все процедуры раздела 3.1.3 легко переносятся на многомерные объекты n-го порядка. Процедура 9 будет определять нижнюю границу $\omega_{l,q}(\tau^{**}) \doteq \omega_q^*$ частот (67) испытательного сигнала (65), приложенного к q-му входу объекта (49). Их значения можно определить следующим образом:

$$\omega_{q1} = \omega_q^*, \quad \omega_{q2} = 2\omega_q^*, \quad \ldots, \quad \omega_{qn} = n\omega_q^*.$$

3.2.2. Идентификация объекта

По значениям $\alpha_{pq}^{[i]}(\tau^*)$, $\beta_{pq}^{[i]}(\tau^*)$ и ω_{qi} формируем систему уравнений

$$\sum_{\mu=0}^{\gamma_{pq}} (j\omega_{qi})^\mu k_{pq}^{[\mu]}(\tau^*) - \Big(\alpha_{pq}^{[i]}(\tau^*) + j\beta_{pq}^{[i]}(\tau^*)\Big) \sum_{\mu=0}^{n_{pq}} (j\omega_{qi})^\mu d_{pq}^{[\mu]}(\tau^*) = \alpha_{pq}^{[i]}(\tau^*) + j\beta_{pq}^{[i]}(\tau^*), \tag{68}$$

вытекающую из (50), решением которой будут оценки искомых коэффициентов передаточных функций (50) объекта (49).

Система (68) при $\alpha_{pq}^{[i]}(\tau^*) = \alpha_{pq}^{[i]}$ и $\beta_{pq}^{[i]}(\tau^*) = \beta_{pq}^{[i]}$ имеет единственное решение если, и только если частоты удовлетворяют неравенствам (67) и полиномы $d_{pq}(s)$ и $k_{pq}(s)$ взаимно простые.

Для синтеза регулятора преобразуем объект (49) к форме Коши, для чего:

1. Выполним разложение
$$W(s) = D^{-1}(s)K(s)$$
передаточной матрицы в произведение взаимно простых полиномиальных матриц (факторизацией Смита-Макмиллана [17], например).

2. Левыми эквивалентными (унимодулярными) преобразованиями
$$W(s) = \left(U(s)D(s)\right)^{-1} U(s)K(s)$$

приведем матрицу $D(s)$ к строчно-правильной форме [18]:

$$D'(s) = S(s)D'' + S^*(s)D^* = U(s)D(s) \quad \text{и} \quad K'(s) = S(s)K'' = U(s)K(s),$$

где $S(s) = \operatorname{diag}(\operatorname{row}(1, s, \dots, s^{\nu_1-1}), \operatorname{row}(1, s, \dots, s^{\nu_2-1}), \dots, \operatorname{row}(1, s, \dots, s^{\nu_l-1}))$, $S^*(s) = \operatorname{diag}(s^{\nu_1}, s^{\nu_2}, \dots, s^{\nu_l})$, $U(s)$ – унимодулярная матрица преобразований.

3. Вычисляя по формулам [18]:

$$C^\star = D^{-*}, \qquad A^\star = -D''C^\star \qquad \text{и} \qquad B = K'', \tag{69}$$

найдем коэффициенты матриц A, B и C канонической формы Люенбергера

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{f}}, \qquad \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\eta}, \tag{70}$$

$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i$ -й столбец матрицы A которой является i -ым столбцом матрицы $A^\star$. Так же связаны между собой столбцы матрицы C и $C^\star$. Вектор $\tilde{\boldsymbol{f}} = TM\boldsymbol{f}$ имеет длину n а $n \times n$ -матрица T удовлетворяет равенству $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}_{\text{р}}$. ■

Заметим, однако, что форму Коши (в канонике Люенбергера (70)) можно получить [19] по оценкам частотных параметров (66), определенным до идентификации передаточных функций (50) – элементов матрицы $W(s)$ объекта (49). Для этого нужно:

1. Сформировать матрицу
$$M = \begin{pmatrix} F \mid G \end{pmatrix},$$
где $F = \begin{pmatrix} I & \varOmega I & \cdots & \varOmega^{n-1} I \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} H & \varOmega H & \cdots & \varOmega^{n-1} H \end{pmatrix}$, $\varOmega = \operatorname{diag}(J \otimes \varOmega_1, J \otimes \varOmega_2, \dots, J \otimes \varOmega_n)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varOmega_i = \operatorname{diag}(\omega_{1i}, \omega_{2i}, \dots, \omega_{mi})$ $(i = \overline{1, n})$, $\otimes$ – символ кронекерова произведения матриц, $I = \begin{pmatrix} E_m & 0_m & \cdots & E_m & 0_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $H = \begin{pmatrix} -\varPhi_1(\tau^*) & -\varPsi_1(\tau^*) & -\varPhi_2(\tau^*) & -\varPsi_2(\tau^*) & \cdots & -\varPhi_n(\tau^*) & -\varPsi_n(\tau^*) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\varPhi_i(\tau^*) = $
$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{[i]}(\tau^*) & \alpha_{12}^{[i]}(\tau^*) & \cdots & \alpha_{1m}^{[i]}(\tau^*) \\ \alpha_{21}^{[i]}(\tau^*) & \alpha_{22}^{[i]}(\tau^*) & \cdots & \alpha_{2m}^{[i]}(\tau^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{l1}^{[i]}(\tau^*) & \alpha_{l2}^{[i]}(\tau^*) & \cdots & \alpha_{lm}^{[i]}(\tau^*) \end{pmatrix} \text{ и } \varPsi_i(\tau^*) = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{[i]}(\tau^*) & \beta_{12}^{[i]}(\tau^*) & \cdots & \beta_{1m}^{[i]}(\tau^*) \\ \beta_{21}^{[i]}(\tau^*) & \beta_{22}^{[i]}(\tau^*) & \cdots & \beta_{2m}^{[i]}(\tau^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{l1}^{[i]}(\tau^*) & \beta_{l2}^{[i]}(\tau^*) & \cdots & \beta_{lm}^{[i]}(\tau^*) \end{pmatrix}.$$

2. Найти значения ν_i – минимальные числа, при которых столбцы $\varOmega^{\nu_i - 1}\boldsymbol{h}_i$ $\left(i = \overline{1, l}\right)$ (где $\boldsymbol{h}_i$ – i -й столбец матрицы H) матрицы M линейно выражаются через предыдущие столбцы этой матрицы.

3. Решая системы
$$M\boldsymbol{\theta}_i = -\varOmega^{\nu_i}\boldsymbol{h}_i, \quad i = \overline{1, l},$$
найти[13] значения $\boldsymbol{\theta}_i$ – вектора элементов i -х столбцов матриц K'', D'' и D^*.

4. Вычисляя[14] по формулам (69) найдем коэффициенты матриц канонической формы (70). ■

[13]Расположение элементов указанных матриц в векторах $\boldsymbol{\theta}_i$ $\left(i = \overline{1, l}\right)$ приведено в [19].

[14]Этот пункт совпадает с пунктом 3 предыдущей процедуры.

3.2.3. Синтез регулятора

При известных матрицах A_p, B_p и C_p объекта (1), матрицы регулятора (2), обеспечивающего выполнение требований (6), будем определять [20] из выражений

$$\begin{gathered} A_\text{c} = A_\text{p} - B_\text{p}R^{-1}B_\text{p}^\text{T}P - K_fC_\text{p}, \quad B_\text{c} = K_f, \\ C_\text{c} = -R^{-1}B_\text{p}^\text{T}P, \quad K_f = (E_n - \gamma^{-2}YP)^{-1}YC_\text{p}^\text{T}, \end{gathered} \tag{71}$$

в которых неотрицательные $n \times n$-матрицы P и Y являются решениями следующих уравнений Риккати

$$A_\text{p}^\text{T}P + PA_\text{p} - PB_\text{p}R^{-1}B_\text{p}^\text{T}P = -C_\text{p}^\text{T}QC_\text{p}, \tag{72}$$

$$A_\text{p}Y + YA_\text{p}^\text{T} - YC_\text{p}^\text{T}(E_l - \gamma^{-2}Q)C_\text{p}Y = 0, \tag{73}$$

с числом γ, удовлетворяющим условию

$$\lambda_\text{max}(PY) < \gamma^2, \tag{74}$$

где $\lambda_\text{max}(M)$ – максимальное собственное значение неотрицательной матрицы M, а $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \ldots, q_l)$ и $R = \text{diag}(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ – диагональные матрицы с положительными элементами.

Если элементы матриц Q и R удовлетворяют [11] неравенствам

$$q_i \geq \frac{1}{y_i^{*2}}\sum_{\mu=1}^{m} f_\mu^{*2}, \quad i = \overline{1,l} \qquad \text{и} \qquad r_i \geq \frac{1}{u_i^{*2}}\sum_{\mu=1}^{m} f_\mu^{*2}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{75}$$

то установившиеся амплитуды вынужденных колебаний системы (1), (2) с матрицами (71)-(73) удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{y_i^{*2}}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_i^2(\bar\omega_\mu) + \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{u_i^{*2}}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{ui}^2(\bar\omega_\mu) \leq \gamma^{*2}, \tag{76}$$

в котором $a_{ui}(\bar\omega_\mu)$ – амплитуды вынужденных колебаний выхода регулятора, γ^* – наименьшее значение γ, при котором P и Y – неотрицательные матрицы и выполняется условие (74).

Из неравенства (76) в свою очередь следует, что если $\gamma^* \leq 1$, то регулятор (12) с коэффициентами (71) обеспечивает выполнение требований (6) к амплитудам вынужденных колебаний.

Заменим матрицы $A_\text{p}^{(r)}$, $B_\text{p}^{(r)}$ и $C_\text{p}^{(r)}$ объекта (1) их оценками $A^{(r)}$, $B^{(r)}$ и $C^{(r)}$.

Литература

1. *Parks P.C.* Lyapunov redesign of model reference adaptive control system // IEEE Trans. Automat. Control, 1966. V. AC-11. No. 3. P. 362-367.

2. *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспоисковых самонастраивающихся систем с моделью // АиТ, 1967. Т. 28. №6. С. 88-94.

3. *Narendra K.C., Valavani L.S.* Stable adaptive control design-direct control // IEEE Trans. Automat. Control, 1978. V. AC-23. No. 4.

4. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.

5. *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Доклады АН СССР, 1966. Т. 166. №6. С. 1308-1311.

6. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.

7. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление с гарантированным результатом в условиях ограниченных возмущений // АиТ, 1994. Т. 55. №2. С. 121-131.

8. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в l_1 -постановке // АиТ, 1998. Т. 59. №3. С. 107-131.

9. *Alexandrov A.G.* Accurate adaptive control // Proceedings of the IASTED International Conference "Automation Control and Information Technology". Novosibirsk: ACTA Press, June 10-13 2002. ISNB: 0-88986-342-3. P. 212-217.

10. *Александров А.Г.* Адаптивное управление на основе идентификации частотных характеристик // Известия РАН: «Теория и системы управления», 1995. №2. С. 63-71.

11. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Частотное адаптивное управление многомерными объектами // Автоматика и телемеханика, 2006. Т. 67. №7. С. 104-119.

12. *Alexandrov A.G.* Finite-frequency identification: selftuning of test signal // Preprints of the 16th IFAC World Congress. Prague, Czech Republic, 3-8 Jily 2005, CD-ROM.

13. *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: самонастройка испытательного сигнала // Сборник научных трудов «Робастное управление и частотная идентификация». Электросталь: ЭПИ МИСиС, 2004. С. 67-97.

14. *Александров А.Г.* Метод частотных параметров // Автоматика и телемеханика, 1989. Т. 50. №12. С. 3-15.

15. *Александров А.Г.* Адаптивное управление объектом с запаздыванием // Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», посвященной 105-летию Н.Г. Четаева, Иркутск: 2007. Т. 3. Управление и оптимизация. С. 6-13.

16. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.

17. *Kailath T.* Linear systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980. 682 p.

18. *Wolovich W.A.* Linear multivariable systems. New-York: Springer-Verlag, 1974. 358 p.

19. *Орлов Ю.Ф.* Идентификация по частотным параметрам при параллельных испытаниях // Автоматика и телемеханика, 2007. Т. 68. №1. С. 20-40.

20. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. II. Применение процедур H_∞ -оптимизации // Автоматика и телемеханика, 1998. Т. 59. №8. С. 124-138.