ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ РАН

А.Г. АЛЕКСАНДРОВ

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация Излагаются методы синтеза регуляторов и адаптивного управления, позволяющие построить алгоритмы управления объектами по их линейным моделям. Эти алгоритмы обеспечивают требуемую точность регулирования при ограниченных неизвестных внешних возмущениях, действующих на объект.

Методы опираются на процедуры LQ - и H_∞ - оптимизации, а также на метод конечно-частотной идентификации.

Приводится описание доступной программной системы ГАММА, являющейся программным обеспечением части излагаемых методов. Она позволит оценить эффективность методов для построении реальных систем.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Внедрение методов построения алгоритмов управления в практику разработки новых систем автоматического управления (САУ) сталкивается с рядом трудностей.

Одна из них состоит в том, что инженер-разработчик САУ не имеет времени, а часто и достаточных знаний, чтобы изучать научную литературу по теории управления, где эти методы изложены.

Цель этой книги - уменьшить разрыв между теорией и практикой.

Изложение каждого метода начинается с постановки задачи, затем даются особенности подхода и формируется утверждение или процедура, отражающие существо метода. Доказательство утверждения приводится лишь в случаях, когда оно несложно и служит для более глубокого понимания утверждения. Главы завершаются комментариями, где обсуждаются истоки методов их современное состояние и дается краткий обзор других подходов.

Для многих методов имеется доступное программное обеспечение. В этих случаях дается список директив системы ГАММА и m-файлов системы MATLAB.

Использование этих программных систем позволяет оценить эффективность выбранного метода для построения управления объектами конкретной физической природы.

ВВЕДЕНИЕ

Выбор метода построения алгоритма автоматического управления зависит от целей управления, параметрических и внешних возмущений.

Цель управления состоит в обеспечении заданных границ показателей точности, качества и грубости (установившихся ошибок, времени регулирования, перерегулирования и запасов устойчивости).

Параметрические возмущения описываются границами возможных отклонений от известных значений параметров дифференциальных управлений объекта. Можно выделить малые и большие параметрические возмущения. Причиной первых является разброс параметров компонентов объекта в пределах технологических допусков на их изготовление, старение этих компонентов и т.д. Большие параметрические возмущения являются следствием изменения режимов работы объекта, поломки его частей и т.д. При малых параметрических возмущениях строится регулятор с постоянными коэффициентами, а при больших - эти коэффициенты изменяются, адаптируясь к неизвестным параметрам объекта.

Книга посвящена методам построения алгоритмов управления при заданных допусках на установившиеся ошибки, время регулирования при малых и больших параметрических возмущениях и внешних возмущениях, являющиеся известными функциями времени с неизвестными параметрами.

В первой главе приводятся показатели точности, качества и грубости, которые являются простым обобщением известных понятий на случай неизвестных ограниченных внешних возмущений. Описываются модели объектов управления и внешних возмущений.

Формируется задача синтеза регуляторов по этим показателям и задача построения адаптивного управления.

Вторая глава посвящена методам (LQ , H_∞ , l_1) оптимизации. Приводятся процедуры синтеза регуляторов на основе этих методов.

Метод LQ - оптимизации является мощным инструментом синтеза регуляторов, который в отличие от метода логарифмических амплитудно-частотных характеристик (метода ЛАЧХ), охватывает многомерные системы. В LQ - оптимизации цель управления описывается значением квадратичного функционала переменных объекта и управления и поэтому возникает проблема выбора коэффициентов этого функционала так, чтобы выполнялись требования к показателям точности, качества и грубости.

При H_∞ - оптимизации одномерных систем цель управления носит содержательный характер (максимум амплитуда вынужденных колебаний выхода объекта при гармоническом внешнем возмущении). Однако, в многомерном случае этот смысл не сохраняется и поэтому, как и в LQ - оптимизации, возникает проблема определения коэффициентов функционала оптимизации.

Синтез регуляторов по показателям точности качества и грубости на основе LQ - либо H_∞ - оптимизации называется аналитическим синтезом регуляторов.

Глава 3 посвящена аналитическому синтезу регуляторов для объекта, переменные состояния которого измеряются. Получена структура функционала LQ - оптимизации, при которой регулятор обеспечивает запасы устойчивости системы и найдена связь коэффициента передачи разомкнутой системы с коэффициентами функционала. Приведена связь коэффициентов функционала с установившимися ошибками.

Даются аналогичные зависимости для H_∞ - оптимизации.

На этой основе строятся методы аналитического синтеза регуляторов.

Глава 4, как и глава 7, является центральной. В ней приводится метод аналитического синтеза регуляторов по измерениям выходами объекта. Для восстановления (наблюдения) вектора состояния регулятора предыдущей главы используются наблюдатели, которые дают оценки вектора состояния, и исследуются свойства систем с наблюдателями. Оказывается, что такие системы могут терять грубость, обеспечиваемую регулятором по состоянию, и поэтому необходимо восстановление грубости. Рассматриваются два вида объектов: минимально-и неминимально-фазовые. Для первого вида восстановление грубости возможно и приводится метод синтеза регуляторов на основе LQ - оптимизации. Для неминимально-фазовых объектов строится управление (называемое точным управлением) которое обеспечивает лишь определенные границы установившихся значений регулируемых переменных.

Глава 5 вводит в адаптивное управление. Описываются два вида такого управления: прямое и идентификационное.

При идентификационном адаптивном управлении находятся оценки параметров объекта (объект идентифицируется) и на основе этих оценок синтезируется регулятор.

Прямое адаптивное управление основано на использовании отклонения выхода объекта от допустимого значения.

Первым видом прямого адаптивного управления явилась система с эталонной моделью, с помощью которой задается желаемый выход системы при измеряемом задающем воздействии.

Приводятся алгоритмы адаптивного управления с эталонной моделью.

В главе 6 приводятся методы идентификации, используемые далее в методах идентификационного адаптивного управления: метод наименьших квадратов (МНК) и конечно- частотная идентификация.

МНК предназначен для идентификации объектов при внешних возмущениях являющихся стационарными случайными процессами типа "белый шум".

Метод конечно- частотный идентификации применяется, когда возмущение- неизвестная ограниченная функция. Для достижения необходимой точности идентификации используются специальные (идентифицирующие) воздействия на объект, которые самонастраиваются так чтобы вход и выход объекта не превышали заданных границ.

Глава 7 посвящена адаптивному управлению. В начале приводится метод адаптивного управления на основе МНК. Он применим при внешнем возмущении, являющемся "белым шумом".

Затем описывается прямое адаптивное управление на основе метода рекуррентных целевых неравенств. Цель управления - минимизация установившееся ошибки. Внешнее возмущение - произвольная ограниченная функция.

Во второй части главы рассматривается частотное адаптивное управление, которое обеспечивает заданный допуск на установившуюся ошибку регулирования. Внешние возмущения - известные функции с неизвестными параметрами.

Наряду с общим случаем, рассматривается адаптивный ПИД- регулятор, обеспечивающий требуемую точность в условиях изменения режимов работы объекта.

В главе 8 описывается системе ГАММА, которая является программным обеспечением ряда методов, изложенных в книге. ГАММА предназначена для инженеров - разработчиков САУ. Она состоит из директив, решающих определенный класс задач: аналитический синтез регуляторов, конечно-частотная идентификация и частотное адаптивное управление.

Изложение многих методов книги завершается ссылкой на директивы системы ГАММА или m- функции системы $MATLAB$. Используя эти системы можно исследовать возможности этих методов

применительно к конкретному объекту управления.

1 Цели управления, модели систем и внешние возмущения

Управление–это воздействие на объект (процесс), направленное на достижение заданной цели. Это означает, что цель управления является первичным понятием , а управление–это средство ее достижения. В системах управления целями служат показатели точности и качества: установившиеся ошибки стабилизации, время регулирования, перерегулирование и т.д..

Обычно [1.1] и [1.2] эти показатели определяются для ступенчатых либо гармонических внешних и задающих воздействий. Поскольку рассматриваемые далее методы ориентированы на более общий вид таких воздействий, когда они являются неизвестными ограниченными функциями, то в этой главе, после краткого описания линейных моделей систем управления, эти показатели развиваются для таких воздействий.

Вторым центром этой главы является формулировка задач, методам решения которых посвящены последующие главы.

1.1 Модели систем управления

1.1.1 Одномерные системы

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = Ax + bu + \psi f, \;\; \theta = \tilde{n}x, \;\; y = \tilde{d}x + \chi, \;\; x(t_0) = x^{(0)}, \tag{1.1}$$

$$\dot{x_p} = A_p x + b_p y + \psi_p g, \;\; u = d_p x_p + cy, \;\; x_p(t_0) = x_p^{(0)}, \tag{1.2}$$

где $x(t)$ $-n-$ мерный вектор переменных состояния объекта (1.1) , t_0 – заданный начальный момент времени, $y(t)$ – измеряемая переменная, $\theta(t)$ -регулируемая переменная, $\chi(t)$ –помеха измерения, $f(t)$ – внешнее возмущение, $u(t)$ –управление, являющееся выходом регулятора (1.2), $x_p(t)$ $-n_p$ мерный вектор переменных состояния регулятора, $g(t)$ –задающее воздействие, A , A_p – матрицы чисел, $\tilde{d}, \tilde{n}, d_p$ –вектора-строки, b, ψ, b_p, ψ_p –вектора-столбцы, c –скаляр.

Начальные условия $x^{(0)}$ и $x_p^{(0)}$ удовлетворяют неравенствам

$$x^{(0)'}x^{(0)} \leq \delta^2, \;\; x_p^{(0)'}x_p^{(0)} \leq \delta_p^2, \tag{1.3}$$

где δ и δ_p –известные числа.

Объект (1.1) часто описывают в форме "вход-выход которая при $f(t) = \chi(t) = 0$, имеет вид

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0 y = k_m u^{(m)} + \cdots + k_1\dot{u} + k_0 u, \;\; m < n. \tag{1.4}$$

Нетрудно найти связь коэффициентов уравнений (1.1) и (1.4).

Действительно, преобразуя систему (1.1) по Лапласу, получим при нулевых начальных условиях, $x(s) = (Es - A)^{-1}bu(s)$. Отсюда следует выражение

$$y(s) = d(Es - A)^{-1}bu(s) = \frac{d(\widetilde{Es - A})b}{\det(Es - A)}u(s), \tag{1.5}$$

где $(\widetilde{Es - A})$ – присоединеная матрица: $(\widetilde{Es - A})(Es - A) = E\det(Es - A)$, E –единичная матрица соответствующих размеров.

С другой стороны, передаточная функция объекта в форме "вход-выход"

$$w_0(s) = \frac{k_m s^{(m)} + \cdots + k_1 s + k_0}{s^{(n)} + d_{n-1}s^{(n-1)} + \cdots + d_1 s + d_0} = \frac{k(s)}{d(s)} \tag{1.6}$$

и таким образом

$$d(s) = \det(Es - A), \;\; k(s) = d(\widetilde{Es - A})b. \tag{1.7}$$

Будем различать два вида объектов: *минимально– и неминимально–фазовые объекты.* Все корни полинома $k(s)$ минимально–фазового объекта имеют отрицательные вещественные части. В противном случае объект называется неминимально–фазовым. Полиномы, чьи корни имеют отрицательные вещественные части часто называют гурвицевыми полиномами.

Уравнения регулятора (1.2) в форме "вход-выход"записываются аналогично как

$$d_p(s)u = k_p(s)y, \tag{1.8}$$

где $d_p(s) = \det(Es - A_p) = d_{p,n}s^{(n)} + d_{p,n-1}s^{(n-1)} + \dots + d_{p,1}s + d_{p,0}$, $k_p(s) = d_p(\widetilde{Es - A_p})b_p + c = k_{p,m}s^{(m)} + \dots + k_{p,1}s + k_{p,0}$, $m \le n$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$w(s) = -\frac{k(s)k_p(s)}{d(s)d_p(s)} \tag{1.9}$$

Характеристический полином системы записывается как

$$D(s) = d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s) \tag{1.10}$$

1.1.2 Многомерные системы

Многомерные системы описываются уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Psi f, \ \ \theta = Nx, \ \ y = Dx + \chi, \ \ x(t_0) = x^{(0)} \tag{1.11}$$

$$\dot{x_p} = A_p x + B_p y + \Psi_p g, \ \ u = D_p x_p + Cy, \ \ x_p(t_0) = x_p^{(0)} \tag{1.12}$$

где $y(t) - r$ –мерный вектор измеряемых переменных, $u(t) - m$ —мерный вектор управлений, $\theta(t)$ - m_1 —мерный вектор регулируемых переменных, $g(t) - m_1$ —мерный вектор задающих воздействий, $f(t) - \mu$ —мерный вектор внешних возмущений, $\chi(t) - r$ —мерный вектор помех измерения, $A, B, \Psi, D, N, A_p, B_p, \Psi_p, D_p, C$ –матрицы чисел соответствующих размеров.

Здесь и далее матрицы обозначены прописными, а вектора - строчными буквами. Исключением является обозначение прописными буквами характеристического полинома системы и его коэффициентов.

Далее будем полагать, что объект (1.11) , как и объект (1.1), полностью управляем и полностью наблюдаем.

1.1.3 Дискретные системы

Часто регулятор содержит управляющую ЭВМ. В этом случае он описывается (при $g(t) = 0$) разностными уравнениями:

$$x_p[(k+1)] = \Phi_p x_p(k) + R_p y(k) \ \ (k = 0,\ 1,\ 2, \dots), \tag{1.13}$$

$$u(k) = D_p x_p(k) + C_p y(k) \ \ (k = 0,\ 1,\ 2, \dots), \tag{1.14}$$

$$u(t) = u(kh) = u(k), \ \ kh \le t \le (k+1)h \ \ (k = 0,\ 1,\ 2, \dots), \tag{1.15}$$

где h – интервал дискретности регулятора, Φ_p, R_p, D_p , C_p – матрицы чисел соответствующих размеров. Поскольку для работы регулятора (1.13), (1.14) достаточно измерения вектора y лишь в дискретные моменты времени 0 , T , $2T$, $3T$ и т. д., то естественно при определении параметров дискретного регулятора использовать дискретную модель объекта (1.11), (1.12). Такая модель при $f(t) = \chi(t) = 0$ имеет вид

$$x[(k+1)] = \Phi x(k) + Ru(k), \ \ \theta(k) = Nx(k) \tag{1.16}$$

$$y(k) = D(k)x(k) + \chi(k), \ \ (k = 0,\ 1,\ 2, \dots) \tag{1.17}$$

Матрицы Φ и R нетрудно построить на основе матриц A и B , если воспользоваться формулой Коши

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau. \tag{1.18}$$

Тогда при $t = (k+1)h$ и $t_0 = kh$ получим

$$\Phi = e^{Ah} = E + Ah + \frac{1}{2!}(Ah)^2 + \dots + \frac{1}{\mu!}(Ah)^{\mu} + \dots + \tag{1.19}$$

$$R = \left[Eh + \frac{1}{2!}Ah^2 + \dots + \frac{A^{\mu-1}h^{\mu}}{\mu!} + \dots\right] B. \tag{1.20}$$

Эти уравнения для случая скалярных измеряемой переменной и управления имеют вид

$$y(k) + \varphi_1 y(k-1) + \dots + \varphi_n y(k-n) = r_1 u(k-1) + \dots + r_n u(k-n), \quad k = 1, 2, \dots \tag{1.21}$$

1.1.4 Внешнее возмущение и задающее воздействия

Материальный мир, не включающий в себя систему управления (1.1), (1.2), называется средой. Внешнее возмущение $f(t)$ – это модель воздействия среды на систему управления. Функция $f(t)$ ограничена известным числом f^* : $|f(t)| \le f^*$. Обычно об этой функции имеется значительно больше сведений, чем её ограниченность.

Эти сведения зависят от области применения системы управления (транспорт, энергетика, нефте-газовая промышленность и т.п.). В связи с этим будем полагать, что

$$f(t) = f^s\,(p_f,\ t)\,, \tag{1.22}$$

где p_f – n_f -мерный вектор параметров внешнего возмущения, $f^s\,(p_f,\ t)$ – известная функция, которая определяется областью применения системы управления. Вектор p_f – неизвестен и его компоненты удовлетворяют неравенствам

$$\underline{p}_{fi} \le p_{fi} \le \bar{p}_{fi}, \tag{1.23}$$

в которых $\underline{p}_{fi}$ и $\bar{p}_{fi}$ $(i = \overline{1, n_f})$ – известные числа.

Функция $f^s\,(p_f,\ t)$ такова, что для всех значений параметров из множества (1.23)

$$|f^s\,(p_f,\ t)| \le f^*, \quad t_0 \le t \le \infty. \tag{1.24}$$

При этом заданная граница f^* должна достигаться:

$$\sup_{t_0 \le t \le \infty} f^s\,(p_f,\ t) = f^*. \tag{1.25}$$

Функция $f^s\,(p_f, t)$ называется *типовым внешним возмущением.*

Далее будем использовать обозначение

$$p_f \in \Omega_f, \tag{1.26}$$

где Ω_f – множество , описываемое неравенствами (1.23) и (1.24).

С точностью до обозначений изложенное сохраняется для задающего воздействия:

$$g(t) = g^s\,(p_g,\ t)\,, \tag{1.27}$$

где p_g – n_g -мерный вектор параметров задающего воздействия, g^s – известная функция, которая определяется областью применения системы управления.

Функция $g^s(p_g, t)$ называется *типовым задающим воздействием.* Далее будем рассматривать три вида функций внешнего возмущения $f(t)$.

A) Ступенчатое внешнее возмущение:

$$f(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0, \quad f(t) = p_{f_0} \quad \text{при} \quad t \ge 0 \tag{1.28}$$

где величина p_{f0} удовлетворяет неравенству

$$|p_{f_0}| \le f^*, \tag{1.29}$$

в котором f^* – заданное число.

B) Гармоническое внешнее возмущение.

$$f(t) = p_{f_1} \sin p_{f_2} t, \tag{1.30}$$

параметры которого удовлетворяют неравенствам

$$|p_{f_1}| \le f^*, \quad \underline{p}_{f_2} \le p_{f_2} \le \bar{p}_{f_2}, \tag{1.31}$$

где $\underline{p}_{f_2}$ и $\bar{p}_{f_2}$ – заданные числа.

C) Кусочно-непрерывное возмущение.

Это возмущение является кусочно-непрерывной функцией. Такая функция разложима в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p^s_{f_i} \sin \tilde{p}_{f_i} t + p^c_{f_i} \cos \tilde{p}_{f_i} t = \sum_{i=0}^{\infty} p_{f_i} \sin\left(\tilde{p}_{f_i} t + \varphi_{f_i}\right), \tag{1.32}$$

в котором числа $\tilde{p}_{f_i} = \frac{2i\pi}{t_1 - t_0}$ $(i = \overline{0, \infty})$, а $p_{f_i}(i = \overline{0, \infty})$ – неизвестные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=0}^{\infty} |p_{f_i}| \le f^*. \tag{1.33}$$

1.2 Цели управления (Показатели точности и качества)

Процесс по регулированию переменной $\theta(t)$ системы (1.1), (1.2) разделяют во времени два процесса: переходный и установившийся. Первый из них вызывается начальными условиями и изменением состояния системы при возникновении внешнего возмущения. Установившийся процесс – это обычный режим работы системы, обусловленный внешним возмущением. По истечении некоторого времени, называемым временем регулирования, переходный процесс затухает до установившегося. Опишем понятия прямых показателей, предполагая, что коэффициенты объекта известны. Кроме того, для простоты будем полагать, что задающее воздействие отсутствует $(g = 0)$.

Рассмотрим вначале свободное движение системы, когда внешнее возмущение отсутствует $(f(t) = 0)$.

Определение 1. *Ошибка регулирования при свободном движении* системы – это число

$$\theta_{\text{св},m} = \sup_{\substack{\bar{x}(t_0)\in\Omega_0 \\ t_0\le t<\infty}} |\theta(t)|, \tag{1.34}$$

где $\Omega_0 \in R^n$ – множество, описываемое неравенствами (1.3), $\bar{x} = [x, x_p]^T$

Определение 2. *Время регулирования при свободном движении* системы – это минимальное положительное число t_c такое, что начиная с момента времени $t_0 + t_c$ выполняется условие

$$\sup_{\bar{x}(t_0)\in\Omega_0} |\theta(t)| \le \theta_{\text{св}}, \qquad t \ge t_0 + t_c, \tag{1.35}$$

в котором $\theta_{\text{св}}$ – заданное число.

Рассмотрим теперь случай, когда $f(t) \neq 0$.

Определение 3. *Ошибка регулирования*

$$\theta_m = \sup_{\substack{\bar{x}(t_0)\in\Omega_0 \\ t_0\le t<\infty \\ f\in\Omega_f}} |\theta(t)|. \tag{1.36}$$

Определение 4. *Установившаяся ошибка* – это минимальное положительное число $\theta_{\text{ст}}$ такое, что для всех $t_1 > t_0$

$$\sup_{\substack{\bar{x}(t_0)\in\Omega_0 \\ f\in\Omega_f}} |\theta(t)| \le \theta_{\text{ст}}, \qquad t_1 \le t < t_k, \qquad t_0 \le t_1 < t_k. \tag{1.37}$$

где t_k –момент окончания работы системы.

Часто полагают $t_k \to \infty$ и определяют установившуюся ошибку как

$$\theta_{\text{уст}} = \lim_{t\to\infty} \sup |\theta(t)|. \tag{1.38}$$

и определяют величину $\sigma = \dfrac{|\theta_m - \theta_{\text{уст}}|}{\theta_{\text{уст}}}$, которая называется *перерегулированием.*

Введем число

$$\theta_p = \max(\theta_{\text{св}}, \;\; \theta_{\text{ст}} + \varepsilon), \tag{1.39}$$

где ε – заданное, достаточно малое число.

Определение 5. Время регулирования – это минимальное положительное число t_{tr} такое, что, начиная с момента времени $t_0 + t_{tr}$ выполняется неравенство

$$\sup_{\substack{\bar{x}(t_0)\in\Omega_0 \\ f\in\Omega_f}} |\theta(t)| \le \theta_p, \qquad t_0 + t_{tr} \le t < \infty. \tag{1.40}$$

Число $\theta_{\text{уст}}$ называется показателем точности системы, а числа θ_m и t_{tr} – показателями её качества.

Эти определения являются общими и они не связаны с видом уравнений (линейных,нелинейных и т.д.), описывающих систему управления.

Для систем, описываемых линеными уравнениями (1.1), (1.2) часто время регулирования оценивают как обратную величину наименьшего значения модулей вещественных частей корней s_i $(i = \overline{1, n_s})$ характеристического полинома этой системы

$$t_{tr}^{-1} = \min_{1\le i\le n_s} |\text{Re } s_i| \, , \quad n_s = n + n_p \tag{1.41}$$

При этом предполагается, что этот полином не имеет кратных корней.

1.3 Основные задачи

1.3.1 Область применимости линейной модели регулятора

.

Регулятор включает в себя три устройства: измерительное и исполнительное, а также устройство реализации алгоритма преобразования $y(t)$ в $u(t)$.

Измерительное устройство имеет естественный предел измерения $(\pm y_{sat})$ и поэтому измеряемый выход объекта (1.82) не должен превышать эту величину:

$$|y(t)| \le y_{sat}, \tag{1.42}$$

где y_{sat} – известное число. В противном случае информация об объекте поступает для преобразования в соответствии с алгоритмом управления лишь как значения $+y_{sat}$, либо – $-y_{sat}$.

Исполнительное устройство часто относят к объекту управления. В этом случае $u(t)$ – сигнал на входе исполнительного устройства, которое имеет ограничения $(\pm u_{sat})$:

$$|u(t)| \le u_{sat}, \qquad (1.43)$$

где u_{sat} – известное число.

Если это неравенство нарушается, то исполнительное устройство воспринимает лишь $+u_{sat}$ и $-u_{sat}$, что недостаточно для выполнения требований к системе.

1.3.2 Параметрические возмущения

Обычно коэффициенты объекта известны с определенной погрешностью. В этом случае говорят о параметрических возмущениях (параметрической неопределенности). Уравнения объекта при таких возмущениях имеют вид

$$\dot{x} = A(p)x + b(p)u + \psi(p)f, \quad y = \tilde{d}(p)x + \chi, \quad \theta = \tilde{n}(p)x, \qquad (1.44)$$

где p – $\tilde{n}_p$ -мерный вектор неизвестных чисел. Коэффициенты этих уравнений являются неизвестными функциями вектора p .

Границы компонент этого вектора известны:

$$\underline{p} \le p_i \le \overline{p} \quad (i = \overline{1, n_p}), \qquad (1.45)$$

где $\underline{p}$ и $\overline{p}$ $(i = \overline{1, n_p})$ – известные числа, являющиеся нижней и верхней границами интервалов (1.45).

В частном случае уравнение (1.44) имеет вид

$$\dot{x} = (A+\Delta A)x+(b+\Delta b))u+(\psi+\Delta\psi)f, \quad y = (\tilde{d}+\widetilde{\Delta d})x+\chi, \quad \theta = (\tilde{n}+\widetilde{\Delta n})x, \qquad (1.46)$$

где матрица ΔA и вектора Δb , $\Delta\psi$, $\widetilde{\Delta d}$, $\widetilde{\Delta n}$ называются *параметрическими возмущениями*. Они описываются интервалами с известными границами

$$\underline{a_{ij}} \le a_{ij} + \Delta a_{ij} \le \overline{a_{ij}}\, ,\underline{b_i} \le b_i + \Delta b_i \le \overline{b_i}\ \underline{\psi_i} \le \psi_i + \Delta\psi_i \le \overline{\psi_i}$$
$$\underline{\tilde{d}_i} \le \tilde{d}_i + \widetilde{\Delta d_i} \le \overline{\tilde{d}_i}\, ,\underline{\tilde{n}_i} \le \tilde{n}_i + \widetilde{\Delta n_i} \le \overline{\tilde{n}_i}\, ,(i = \overline{1, n}). \qquad (1.47)$$

Далее, для определенности, будем использовать интервальную модель (1.46) и рассмотрим систему, состоящую из объекта (1.46) и регулятора (1.8):

$$d_p(s)u = k_p(s)y. \qquad (1.48)$$

Эта система называется *робастно- устойчивой*, если она устойчива при всех значениях коэффициентов объекта из заданных интервалов (1.47). Объект (1.46) называется *робастно-стабилизируемым*, если существует регулятор (1.48), обеспечивающий устойчивость системы (1.46), (1.48) при всех значениях коэффициентов объекта из заданных интервалов (1.47) . Если этот регулятор обеспечивает требования к точности и качеству системы, то система называется системой с *робастным качеством*.

Показателями чувствительности системы к параметрическим возмущениям служат запасы устойчивости по фазе $(\varphi_З)$ и модулю (L) , которые определяются, используя параметрически невозмущенную систему. Запасы устойчивости, которые могут быть определены экспериментально, являются обобщенными показателями чувствительности, не связаны явно с указанными выше интервалами.

В результате многолетнего опыта эксплуатации различных систем регулирования установлены и рекомендованы [1.16] для использования при проектировании новых систем следующие значения запасов устойчивости:

$$\varphi_З^* = 30^\circ \div 60^\circ; \quad L^* = 2 \div 10. \qquad (1.49)$$

Малые значения запасов устойчивости, по сравнению с допустимыми являются признаком того,что система может потерять устойчивость при параметрических возмущениях из заданных интервалов. Это означает, что запасы устойчивости являются необходимым условием робастной устойчивости.

Запасы устойчивости, как правило, проверяются при проектировании и испытаниях систем управления и поэтому разработка методов построения регуляторов сопровождается исследованием обеспечиваемых ими запасов устойчивости.

1.3.3 Запасы устойчивости. Грубость

Понятие радиуса запасов устойчивости

Запасы устойчивости определяются частотной передаточной функцией разомкнутой системы

$$w(j\omega) = a(\omega)e^{\varphi(\omega)} \qquad (1.50)$$

Запас устойчивости по фазе

$$\varphi_З = -\pi + \varphi(\omega_{\text{ср}}), \qquad (1.51)$$

где ω_{cp} –частота среза, определяемая равенством $a(\omega_{\text{cp}}) = 1$.

Запас устойчивости по модулю

$$L = \min[a(\omega_1), 1/a(\omega_2)], \tag{1.52}$$

где частоты ω_1 и ω_2 находятся из условий

$$\varphi(\omega_1) = -\pi, \min a(\omega_1) > 1, \varphi(\omega_2) = -\pi, \max a(\omega_2) < 1. \tag{1.53}$$

Уравнение $a(\omega_{\text{cp}}) = 1$ может иметь несколько решений относительно ω_{cp} . В качестве ω_{cp} принимается максимальное значение. Аналогичный смысл имеют неравенства в выражениях (1.53).

Иногда удобно определять запасы устойчивости, используя возмущенные передаточные функции

$$\bar{w}_1(s) = k_1 w(s), \quad \bar{w}_2(s) = e^{-j\varphi_1} w(s) \tag{1.54}$$

в которых k_1 и φ_1 -положительные числа.

Запасом устойчивости по модулю называется наибольшее положительное число L такое, что при $k_1 > L$ либо при $k_1 < L^{-1}$ возмущенная система устойчива, а запас устойчивости по фазе- это наибольшее положительное число φ такое, что при $\varphi \in [0, \varphi_1]$ возмущенная система устойчива.

Запасы устойчивости по модулю и фазе определяются независимо и поэтому возможна ситуация,показанная на рис.1.1,

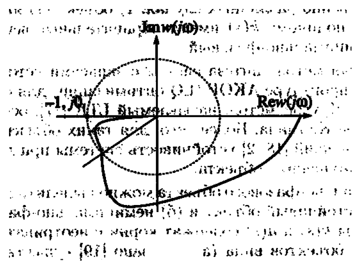

Рис. 1.1

когда годограф амплитудно -фазовой характеристики разомкнутой системы (годограф Найквиста) проходит сколь угодно близко к окружности единичного радиуса и к вещественной оси. Запасы устойчивости системы,имеющей такой годограф: $L = \infty$,

$\varphi_3 > 45^o$, однако, если возмущенная система описывается передаточной функцией $\bar{w}_3(s) = k_1 e^{-j\varphi_1} w(s)$, то она теряет устойчивость при сколь угодно малых отклонениях числа k_1 от единицы и φ_1 -от нуля.

Чтобы избежать подобной ситуации используется радиус запасов устойчивости.

Определение 6 Радиус запасов устойчивости (r) –это максимальный радиус круга с центром в точке $(-1; 0j)$,который не пересекается годографом амплитудно -фазовой характеристики разомкнутой системы.

Указанный в этом определении круг показан на рис.1.2.

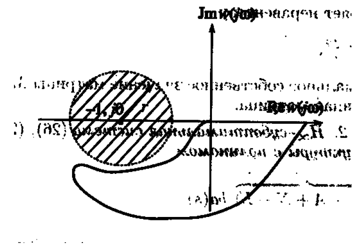

Рис. 1.2

Радиус запасов устойчивости связан с запасами устойчивости по фазе и модулю соотношениями

$$\frac{1}{1+r} < L < \frac{1}{1-r}, \quad |\varphi_3| = arccos(1 - \frac{r^2}{2}) \tag{1.55}$$

Используя эти соотношения, нетрудно заключить, что если $r = 0,75$, то запас по фазе $\varphi_3 = 42^\circ$, запас по модулю $L = 1,75$. При $r = 1$ $\varphi_3 = 60^\circ$, $L = 2$.

Определение 7. Система называется грубой, если ее радиус запасов устойчивости

$$r \geq r^*, \tag{1.56}$$

где $r^* = 0.75$.

Радиус запасов устойчивости связан с передаточной функцией системы соотношением

$$[1 + w(-j\omega)]\,[1 + w(j\omega)] \geq r^2, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \tag{1.57}$$

Если использовать функцию возвратной разности

$$v_p(s) = 1 + w(s), \tag{1.58}$$

то

$$r^2 = inf_{0 \le \omega \le \infty} |v_p(j\omega)|^2. \tag{1.59}$$

Экспериментальное определение запасов устойчивости

Радиус запасов устойчивости, как и запасов устойчивости по фазе и модулю, может быть найден экспериментально. Для описания экспериментов рассмотрим систему (1.4), (1.8) (случай внешних возмущений и помех будет рассмотрен в главе 7), в которой в уравнении (1.8) заменим y на $y - v$.

Приложим к системе испытательный сигнал

$$v(t) = 1 \sin \omega t. \tag{1.60}$$

Передаточная функция $t_{yv}(s)$ системы, связывающая выход $y = t_{yv}(s)v$ с испытательным сигналом, имеет вид

$$t_{yv}(s) = \frac{w(s)}{1 + w(s)}. \tag{1.61}$$

Передаточная функция $S(s)$, связывающая ошибку $e = v - y$ с испытательным сигналом следует из (1.61)

$$S(s) = \frac{1}{1 + w(s)}. \tag{1.62}$$

Передаточная функция $S(s)$ называется *функцией чувствительности*, а функция

$$v(s) = 1 + w(s) \tag{1.63}$$

называется *возвратной разностью.*

Амплитуда установившихся $(t \to \infty)$ колебаний ошибки в рассматриваемой системе

$$a_e(\omega) = \frac{1}{|1 + w(j\omega)|}, \quad 0 \le \omega \le \infty \, . \tag{1.64}$$

Нетрудно видеть, что максимум амплитуды этих колебаний является величиной обратной радиусу запасов устойчивости

$$\max_{0 \le \omega \le \infty} a_e(\omega) = r{-}1.$$

В частном случае, когда система (1.4), (1.8) устойчива в разомкнутом состоянии (полиномы $d(s)$ и $d_p(s)$ ее описания в форме "вход-выход"является гурвицевым), система размыкается (в уравнении (1.8) сигнал $y(t)$ заменяеися на $-v$ и выход объекта (1.4) поступает на вход фильтра Фурье, описанного в п.7.3. Выходы этого фильтра являются оценками значений $\mathrm{Re}\ w(j\omega)$ и $\mathrm{Jm}\ w(j\omega)$, $0 \le \omega \le \infty$.

Используя эти функции, находится наименьшее значение функции

$$|1 + w(j\omega)|^2 = (1 + \mathrm{Re}\ w(j\omega))^2 + \mathrm{Jm}^2\, w(j\omega).$$

Показатель колебательности

Используя передаточную функцию (1.61), связывающую выход объекта с испытательным сигналом, удобно описать широко используемое понятие *показателя колебательности (M)*:

$$M = \max_{0 \le \omega \le \infty} \frac{|w(j\omega)|}{|1 + w(j\omega)|}. \tag{1.65}$$

1.3.4 Основные задачи

Сформулируем задачи, рассматриваемые в последующих главах.

Вначале подитожим изложенное выше в форме следующих предложений.

А.Предположения.

<u>А1.</u>Внешнее возмущение-известная функция с неизвестными параметрами

$$f(t) = f^s\,(p_f,\ t)\,, \quad f \in \Omega_f, \tag{1.66}$$

<u>А2.</u>Задающее воздействие-известная функция с неизвестными параметрами

$$g(t) = g^s\,(p_g,\ t)\,, \quad g \in \Omega_g, \tag{1.67}$$

В. Цели управления.

<u>В1.</u> Установившаяся ошибка не должна превышать заданного числа $\theta^*_{\text{уст}}$

$$\theta_{\text{уст}} \le \theta^*_{\text{уст}}. \tag{1.68}$$

<u>В2.</u> Время регулирования не должно превышать заданного числа t^*_{tr}

$$t_{tr} \le t^*_{tr}. \tag{1.69}$$

<u>B4.</u> Система должна быть грубой. Это означает, что запасы устойчивости ее линейной модели удовлетворяют условиям

$$\varphi_3 \ge 42^\circ, \quad L \ge 1,75. \quad (r \ge 0.75) \tag{1.70}$$

С. Ограничения.

<u>С1.</u> Измеряемая переменная объекта ограничена заданным числом y_{sat}

$$|y(t)| \le y_{sat}, \qquad t \ge t_0. \tag{1.71}$$

<u>С2.</u> Выход регулятора ограничен заданным числом u_{sat}

$$|u(t)| \le u_{sat}, \qquad t \ge t_0 \tag{1.72}$$

Примечание. Предполагается, что начальные условия таковы, что, при отсутствии внешних возмущений и задающих воздействий, система удовлетворяет ограничениям (1.71), (1.72).

Пусть объект (1.1) –робастно-стабилизируем.

Задача А (синтеза регулятора). Найти регулятор (1.2) такой, чтобы выполнялись требования (1.68) и (1.69) к точности и времени регулирования, а система была грубой.

Частным случаем этой задачи является

Задача А1 (точного управления). Найти регулятор (1.2) такой, чтобы выполнялись требования (1.68) и (1.69) к точности.

Рассмотрим теперь случай, когда объект (1.1) не является робастно-стабилизируемым. Это означает, что параметрические возмущения объекта велики и не существует регулятора (1.2) с постоянными коэффициентами, обеспечивающего устойчивость системы.

Задача Б (адаптивного управления). Найти регулятор, коэффициенты которого определяются в процессе работы объекта так, такой, чтобы выполнялись требование (1.68) к точности.

Решение задач А и А1 может не существовать. В этом случае находятся границы $\theta^*_{\text{уст}}$ и t^*_{tr} достижимых точности и времени регулирования (в задаче А1 -только достижимой точности), при которых она имеет решение.

В задаче Б предполагается, что при малых параметрических возмущениях для нее существует решение задачи А.

При решении этих задач явно или неявно учитываются ограничения (1.71), (1.72) на входы и выходы регулятора.

Задачи А и Б сформулированы для одномерного объекта. Их легко обобщить на многомерный случай. Это относится и к их решению. Синтез регуляторов приводится, как для одномерного так и многомерного объектов, в главах 2–4, а адаптивному управлению одномерными, для простоты, объектами посвящены главы 5–7.

1.4 Комментарии

1.4.1 Область применимости линейной модели объекта

Программное управление и уравнения возмущенного движения

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\begin{gathered}\varphi^{(1)}\left(\ddot{\nu},\, \dot{\nu},\, \nu,\, æ,\, f,\, p,\, t\right) = 0, \qquad t \ge t_0 \\ \xi = \varphi^{(2)}\left(\nu,\, \dot{\nu},\, t\right), \qquad \eta = \varphi^{(3)}\left(\nu,\, \dot{\nu},\, t\right),\end{gathered} \tag{1.73}$$

где $\nu(t)$ – n_ν -мерный вектор переменных объекта, $\dot{\nu}(t)$ и $\ddot{\nu}(t)$ – производные этого вектора, $æ(t)$ – управление, $f(t)$ – внешнее возмущение, p – n_p -мерный вектор параметров, $\xi(t)$ – переменная, отклонения от которой измеряются, $\eta(t)$ -регулируемая переменная , $\varphi^{(1)}$ – известная n_ν - вектор-функция такая, что решение уравнения (1.73) существует и единственно, $\varphi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ – известные функции своих аргументов.

Уравнение (1.73) соответствует физической природе объекта и формируется на основе законов этой природы. Будем называть их уравнениями в форме Ланграньжа, с чьим именем связаны уравнения процессов в механике.

Начальные условия и параметры – неизвестные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n_\nu} \nu_i^2(t_0) \le \nu^{*2}, \qquad \sum_{i=1}^{n_\nu} \dot{\nu}^2(t_0) \le \bar{\nu}^{*2}; \tag{1.74}$$

$$\underline{p} \le p_i \le \bar{p}_i \qquad (i = \overline{1, n_p}), \tag{1.75}$$

в которых ν^* , $\bar{\nu}^*$, $\underline{p_i}$ и $\bar{p}_i$ $(i = \overline{1, n_p})$ – известные числа.

Внешнее возмущение $f(t)$ – неизвестная ограниченная функция:

$$|f(t)| \le f^*, \tag{1.76}$$

где f^* – известное число.

Управление $æ(t)$ служит для достижения заданной цели, которая описывается совокупностью неравенств для переменных объекта и регулируемой переменной. Оно не может быть полностью определено до начала (t_0) функционирования объекта, так как начальные условия, внешнее возмущение и параметры объекта, удовлетворяющие неравенствам (1.74), (1.76), неизвестны. В связи с этим управление $æ(t)$ содержит две компоненты

$$æ(t) = u_{pr}(t) + u(t), \tag{1.77}$$

первая их которых $u_{pr}(t)$ – программное управление, вторая – $u(t)$ – стабилизирующее управление (выход регулятора).

Программное управление строится как функция времени на основе известной информации об объекте. Это означает, что в уравнении (1.73) полагают

$$f(t) = 0, \qquad p = p_{pr}, \qquad \nu(t_0) = \nu^*_{pr}, \qquad \dot{\nu}(t_0) = \bar{\nu}^*_{pr}, \tag{1.78}$$

где p_{pr}, ν^*_{pr}, $\bar{\nu}^*_{pr}$ – заданные вектора.

Уравнения (1.73) принимают в этом случае вид

$$\varphi^{(1)}(\ddot{\nu},\, \dot{\nu},\, \nu,\, æ,\, 0,\, p_{pr},\, t) = 0, \qquad \nu(t_0) = \nu^*_{pr}, \qquad \dot{\nu}(t_0) = \bar{\nu}^*_{pr}. \tag{1.79}$$

Используя эти уравнения, из целевых неравенств находят программное управление $æ(t) = u_{pr}(t)$.

Этому управлению соответствует программное движение $\nu_{pr}(t)$ и $\dot{\nu}_{pr}(t)$, являющиеся решением уравнения (1.79), и функции $\xi_{pr}(t) = \varphi^{(2)}(\nu_{pr},\, \dot{\nu}_{pr},\, t)$ и

$$\eta_{pr}(t) = \varphi^{(3)}(\nu_{pr},\, \dot{\nu}_{pr},\, t)\,. \tag{1.80}$$

Представляя решения уравнений (1.73) как

$$\nu = \nu_{pr} + q, \qquad \dot{\nu} = \dot{\nu}_{pr} + \dot{q}, \qquad \eta = \eta_{pr} + \theta, \qquad \xi = \xi_{pr} + y, \tag{1.81}$$

запишем уравнения возмущенного движения

$$\varphi^{(1)}(\ddot{\nu}_{pr} + q,\, \dot{\nu}_{pr} + q,\, \nu_{pr} + q,\, u_{pr} + u,\, f,\, p,\, t) = 0,$$

$$y = \varphi^{(2)}(\nu_{pr} + q,\, \dot{\nu}_{pr} + q,\, t) - \xi_{pr}, \quad \theta = \varphi^{(3)}(\nu_{pr} + q,\, \dot{\nu}_{pr} + q,\, t) - \eta_{pr}. \tag{1.82}$$

Уравнения первого приближения

Разлагая функции $\varphi^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ в ряд Тейлора в окрестности известных функций

$$\nu(t) = \nu_{pr}(t), \;\; \dot{\nu}(t) = \dot{\nu}_{pr}(t), \;\; æ(t) = u_{pr}(t), \;\; f(t) = 0, \;\; p = p_{pr}(t), \tag{1.83}$$

и опуская нелинейные слагаемые, получим уравнения первого приближения

$$\begin{gathered} N^{(2)}(t)\ddot{q} + N^{(1)}(t)\dot{q} + N^{(0)}(t)q = l(t)u + m(t)f, \;\; t \ge t_0 \\ y = c_y^{(0)}(t)q + c_y^{(1)}(t)\dot{q}, \;\; \theta = c_\theta^{(0)}(t)q + c_\theta^{(1)}(t)\dot{q}, \end{gathered} \tag{1.84}$$

в которых элементы матриц $N^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, 2)$ и векторов $l(t)$ и $m(t)$ имеют вид

$$N_{ij}^{(2)} = \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial \nu_j^{(k)}}\bigg|^* \; (ij = 1, n_\nu,\, k = 0, 1, 2), \;\; l_i = \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial æ}\bigg|^*, \;\; m_i = \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial f}\bigg|^*, \;\; i = 1, n_\nu$$

$$c_{y,i}^{(0)} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \nu_i}\bigg|^*, \;\; c_{y,i}^{(1)} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \dot{\nu}_i}\bigg|^*, \;\; c_\theta^{(0)} = \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \nu_i}\bigg|^*, \;\; c_\theta^{(1)} = \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \dot{\nu}_i}\bigg|^*, \;\; i = 1, n_\nu. \tag{1.85}$$

Символ $\big|^*$ означает, что производные вычисляются при значениях (1.83).

Матрицы и вектора уравнений (1.84) являются функциями времени, которые заменяются кусочно-постоянными функциями и тогда эти уравнения принимают вид

$$\begin{gathered} N_{[i]}^{(2)}\ddot{q} + N_{[i]}^{(1)}\dot{q} + N_{[i]}^{(0)}q = l_{[i]}u + m_{[i]}f, \;\; t_{i-1} \le t \le t_i \\ y = c_{y[i]}^{(0)}q + c_{y[i]}^{(1)}\dot{q}, \;\; \theta = c_{\theta[i]}^{(0)}q + c_{\theta[i]}^{(1)}\dot{q}, \end{gathered} \tag{1.86}$$

где i , $(\overline{i = 1, N})$ – номер интервала стационарности обьекта (номер режима его работы), в течении которого его коэффициенты постоянны. Длительность этих интервалов достаточно велика так, что модули компонент вектор-функции $q(t)$, возбужденные начальными условиями при $f(t) = u(t) = 0$, в конце $i-$ того интервала не превышают заданных достаточно малых чисел. При такой длительности говорят, что объект удовлетворяет гипотезе квазистационарности.Если внешнее возмущение $f(t)$ -кусочно-постоянная функция, длительность интервалов постоянства которой велика в описанном выше смысле, то будем говорить, что внешнее возмущение удовлетворяет гипотезе *квазистациорности.*

С физической точки зрения, основанием для замены уравнений (1.84) уравнениями (1.86) служит тот факт, что программное движение является несоизмеримо более "медленным по сравнению с собственное движением объекта, описываемым уравнениями (1.84) на каждом интервале. Точность этой замены можно проверить, сравнивая результаты численного решения уравнений (1.84) и (1.86) при одинаковых начальных условиях и типовых функциях $u(t)$ и $f(t)$.

Допустимая область применимости уравнений (1.86) (как и (1.84)) ограничена условиями

$$|q_i(t)| \leq \varepsilon_i^q, \ \ |\dot{q}_i(t)| \leq \bar{\varepsilon}_i^q, \ \ (i = 1, n_\nu), \tag{1.87}$$

в которых ε_i^q и $\bar{\varepsilon}_i^q$ $(i = 1, n_\nu)$ – положительные числа, такие, что решения уравнений (1.86) и (1.82) достаточно близки при заданных начальных условиях и заданных функциях $u(t)$ и $f(t)$.

Для простоты, далее рассматривается лишь один режим работы объекта и поэтому опуская в уравнениях (1.86) нижний индекс $[i]$ запишем их как

$$\begin{gathered} N^{(2)}\ddot{q} + N^{(1)}\dot{q} + N^{(0)}q = lu + mf, \\ y = c_y^{(0)}q + c_y^{(1)}\dot{q}, \ \ \theta = c_\theta^{(0)}q + c_\theta^{(1)}\dot{q}, \end{gathered} \tag{1.88}$$

и приводя эти уравнения к форме Коши, получим уравнения (1.1).

Уравнения (1.88) будем называть *уравнениями в физических переменных*, так как переменные $q(t)$ имеют ясный физический смысл: это обобщенные координаты в механике, ток и напряжение в электротехнике и т.д.

Уравнения (1.1) обычно называют *уравнениями в пространстве состояний*. Переменные состояния лишь в редких случаях имеют содержательный смысл , так как они являются линейной комбинацией физических переменных. Вид этой комбинации зависит от способа приведения уравнений в физических переменных к уравнениям в пространстве состояний (форме Коши) и этих способов– множество [1.9].

Функции регулятора.

Функция $\eta_{pr}(t)$ соответствует целям (выражает цели) управления. Однако, она может быть реализована лишь в "идеальных"условиях, когда начальные условия, внешнее возмущение и параметры известны $(\nu(t_0) = \nu_{pr}^*$, $\dot{\nu}(t_0) = \bar{\nu}_{pr}^*$, $f(t) = 0$, $p = p_{pr})$.

Реальная функция $\eta(t)$ отличается от "идеальной" $\eta_{pr}(t)$ из-за того, что условия (1.78) не выполняются и поэтому необходимо дополнительное управление, которое зависит от реализовавшихся значений $\nu(t_0)$, $\dot{\nu}(t_0)$, $f(t)$ и p . Сведения об этих значений неявно содержатся в измеряемой переменной $y(t)$, которая используется в регуляторе, формирующем дополнительное управление.

Для описания регулятора обозначим u_0^t функцию $u(t)$, определенную на интервале $[t_0, t]$. Аналогичное обозначение будем использовать для переменной $y(t)$.

Опишем регулятор уравнением

$$\varphi_c(u_0^t, y_0^t, p_c, \ t) = 0, \tag{1.89}$$

которое однозначно разрешимо относительно u_0^t , и где p_c – n_p -мерный вектор параметров регулятора.

Построение оператора φ_c и вектора параметров p_c при известном векторе p_{pr} называется *синтезом регулятора.* Если оператор φ_c задан, то синтез описывается как

$$p_c = \mu(p_{pr}) \tag{1.90}$$

где μ - n_p -мерная вектор-функция.

Важным частным случаем регулятора является случай, когда он описывается уравнениями (1.2)

Для этого случая в уравнении (1.90) $p_{pr} = [d_{n-1}, ..., d_0, k_\gamma, ..., k_0]$ Цель регулятора состоит в том, чтобы регулируемая переменная $\theta(t) = \eta(t) - \eta_{pr}(t)$ не превышало заданной величины θ^* :

$$|\theta(t)| \leq \theta^*, \qquad t \geq t_0. \tag{1.91}$$

1.4.2 Особенности модели системы

Особенности модели системы.

А). Линейная модель (1.1) объекта (1.82) носит вспомогательный характер: она служит для синтеза регулятора (1.2), который обеспечивает достижение целей управления системой (1.1),(1.2). После того как такой регулятор найден осуществляется численное моделирование системы (1.82),(1.2) для того, чтобы, для некоторого набора значений векторов p и p_f , проверить выполнение неравенства (1.87), определяющие область применимости уравнений (1.1), ограничений

(1.42) и (1.43), а также достижение целей управления. Другими словами, *линейная модель (1.1) объекта–это некая вспомогательная математическая конструкция*, аналогичная строительным лесам, используемым при постройке здания, которым является регулятор.

Более того, линейная модель (1.1) часто является промежуточным этапом построения модели объекта, предназначенной для синтеза регулятора. Окончательная модель может иметь существенно меньшую размерность вектора состояния $(n < 2n_\nu)$ и иную структуру. Эта модель зависит от целей управления и внешних возмущений. Так, в следящих системах , в случаях, когда внешнее возмущение отсутствует (либо граница f^* –достаточно мала) и задающее воздействие –кусочно–постоянная функция с достаточно большими интервалами постоянства, то объект управления описывается уравнением второго порядка $(n = 2)$ с запаздыванием. В этом случае цель управления достигается *ПИД–регулятором.*

Б).Неравенства (1.87), определяющие область применимости уравнений (1.1), и ограничения (1.42) и (1.43) будем называть *линейной зоной* системы , так как при их выполнении регулятор (1.2) обеспечивает, по построению, достижение цели управления.

Очевидно, что всегда возможен вектор начальных условий $x(t_0)$, при котором система окажется вне линейной зоны (нарушено одно из неравенств (1.87), (1.42), (1.43)) и при этом цели управления не достигаются и, более того, может нарушаться устойчивость системы (1.82),(1.2). В этих случаях используют начальный регулятор, который обеспечивает движение системы к линейной зоне и после ее попадания в эту зону объект замыкается регулятором (1.2). Предполагается, что такой начальный регулятор имеется и поэтому далее часто будем полагать начальные условия нулевыми: $x(t_0) = 0$.

В) Окончательное заключение о пригодности регулятора (1.2) для достижения целей управления может быть сделано лишь в результате экспериментальных исследований этого регулятора с реальным объектом, и следовательно, *цели управления должны допускать их экспериментальную проверку.*

Внешнее возмущение и задающее воздействия

Исторически, стремление уменьшить влияние внешнего возмущения привело к системам автоматического регулирования и их теории. Действительно, регулятор Уатта [1.2] был разработан для уменьшения зависимости скорости паровой машины от нагрузки (нагрузкой являлась шахтная клеть, для подъема которой предназначалась паровая машина, и загрузка клети могла быть различной). Этот регулятор широко применялся. Однако, его усовершенствование привело к "странному"поведению паровой машины (к ее "раскачке"). Работы Максвела J.C.[1.32] и Вышнеградского А.И.[1.33] по исследованию этого явления стали началом теории автоматического регулирования.

Приведем виды внешних возмущений и задающих воздействий в различных направлениях теории, которые доминировали в различные периоды ее развития

В период 1935–1960 гг. сложилось направление, часто называемое *классической теорией управления* [1.1] , [1.2], в нем внешнее возмущение и задающее воздействие - ступенчатые либо гармонические функции (с заданными границами их амплитуд). Они были названы типовыми функциями и соответствовали средам того времени (порывы ветра, действующие на летательные аппараты, волнение моря для морских судов и т.п.).

В последующие 20 лет доминировала *стохастическая теория управления* [1.3]– [1.6] , где внешнее возмущение и задающее воздействия - случайные процессы с известными статистическими свойствами.

Последние 20 лет доминирует *минимаксная теория управления* [1.7]– [1.9] , развиваемая в рамках H_∞ и l_1 оптимального управления. В l_1 оптимальном управлении внешнее возмущение-неизвестная ограниченная функция. При таком привлекательном предположении может не существовать управления, при котором достигается цель управления, либо это управление оказывается неоправданно сложным, так как оно учитывает ситуации, которые не возможны для заданной области применения системы управления. Такие ситуации исключаются с помощью типовых внешних возмущений и задающих воздействий введенных в п.1.1.4.

Особое место занимает теория инвариантности [1.28]–[1.30], цель которой состоит в том, чтобы добиться независимости (инвариантности) динамики объекта от внешнего возмущения.

1.4.3 Проблема параметрических возмущений

.

Запасы устойчивости

Многие объекты управления являются устойчивыми и это свойство не зависит от их параметров: устойчивость физического маятника не зависит от его длинны и массы, устойчивость электрической и электронной схем не зависит от значений емкостей и индуктивностей, входящих в них. Эта независимость исчезает, когда объект охватывается (замыкается) отрицательной обратной связью (регулятором) и его выход, после преобразования регулятором, поступает на его вход. Если регулятор- усилительное звено, то устойчивость нарушается при сравнительно малом коэффициенте усиления. Чтобы увеличить эту величину в регулятор вводятся динамические звенья, коэффициенты которых зависят от коэффициентов объекта. Однако, коэффициенты реализовавшегося объекта отличаются от его расчетных значений и поэтому регулятор не соответствует реальному объекту и может нарушить его устойчивость.

Эта трудность преодолеватся с помощью критерия Найквиста [1.15], который использует получаемые экспериментально частотные характеристики реализованных объекта и регулятора; по этим характеристикам делается заключение будет ли система устойчива после ее замыкания. Заметим, что критерий Найквиста явился поворотным пунктом в развитии теории автоматического управления.Он стал началом частотной теории управления, которая исходит из представления об объекте как о некотором "сером"ящике (о котором известно лишь, что он линейно преобразует входной сигнал в выходной) и использует экспериментально полученные частотные характеристики, а не дифференциальные уравнения (1.1),(1.2) Роли и значению этого критерия посвящена статья Макферайна [1.14].

Однако, может случиться так, что полученный экспериментально годограф амплитудно–фазовой характеристики подходит близко к критической точке $(-1; 0j)$ и тогда заключение об устойчивости системы после ее замыкания может оказаться ошибочным из-за погрешностей эксперимента. Кроме того, параметры системы могут несколько изменяться из-за износа системы в процессе ее эксплуатации и тогда указанная близость может привести к потере ее устойчивости. В связи с этим Боде [1.13] были введены понятия запасов устойчивости по фазе и модулю. Минимально допустимые значения этих запасов вошли в стандарт по проектированию систем автоматического управления [1.16].

Независимое определение каждого из запасов может привести к ситуации, показанной на рис.1.1. Чтобы избежать этого было предложено[1.24] использовать радиус запасов устойчивости , который является минимальным значением частотной функции возвратной разности. введенной Боде [1.13].

Робастная устойчивость

Приведем некоторые результаты по робастной устойчивости.

Пусть известен характеристический полином системы (1.46), (1.48),

$$D(s) = D_{n_1}s^n + D_{n_1-1}s^{n-1} + \cdots + D_1 s + D_0, \quad n_1 = n + n_p. \qquad (1.92)$$

Его коэффициенты находятся в известных интервалах:

$$\underline{D_i} \le D_i \le \overline{D_i}, \quad (i = \overline{0, n_1}). \qquad (1.93)$$

Рассмотрим четыре полинома, составленных из крайних значений коэффициентов этого полинома.

$$D_1(s) = \underline{D_0} + \underline{D_1}s + \overline{D_2}s^2 + \overline{D_3}s^3, D_2(s) = \overline{D_0} + \underline{D_1}s + \underline{D_2}s^2 + \overline{D_3}s^3,$$
$$D_3(s) = \overline{D_0} + \overline{D_1}s + \underline{D_2}s^2 + \underline{D_3}s^3, D_4(s) = \underline{D_0} + \overline{D_1}s + \overline{D_2}s^2 + \underline{D_3}s^3. \qquad (1.94)$$

Эти полиномы называются *полиномами Харитонова* по имени автора следующей теоремы [1.20] : для робастной устойчивости интервального полинома (1.92) необходимо и достаточно, чтобы все полиномы (1.94) были устойчивы.

Используя эту теорему, получен критерий Цыпкина- Поляка [1.21], который позволяет найти максимальный размах параметрических возмущений, при которых сохраняется устойчивость.

Если система описывается уравнением

$$\dot{x}_s = A_s x_s, \qquad (1.95)$$

где A_s –интервальная матрица: $\underline{a_{sij}} \le a_{sij} \le \overline{a_{sij}}$, $i, j = \overline{1, n_s}$, то для нее нельзя [1.18] сформулировать аналог теоремы Харитонова и для анализа робастной устойчивости этой системы используют методы теории возмущений[1.25] и функции Ляпунова, построенные с использованием линейных матричных неравенств[1.26].

Для системы (1.95) можно построить интервальный характеристический полином 1.92), используя интервальный анализ [1.27], и затем применить теорему Харитонова. Однако, границы интервалов этого полинома оказываются существенно завышенными и поэтому условия этой теоремы могут нарушаться, а система (1.95) робастноустойчива.

Параметрические возмущения обычно задаются как интервалы коэффициентов уравнений объекта в физических переменных так как коэффициенты этих уравнений имеют ясный физический смысл. Если лишь один коэффициент этих уравнений находится в заданном интервале, а остальные коэффициенты известны точно, то в результате преобразования этих уравнений к форме Коши, возмущенными могут оказаться все коэффициенты уравнения в пространстве состояний.

В связи с этим в работах [1.23] рассматриваются системы, объект управления которых описывается уравнением (1.88) в физических переменных, а регулятор записан в форме вход-выход (1.8). Существо подхода к нахождению интервала одного из коэффициентов объекта, при которых система сохраняет устойчивость состоит в следующем. Строится эквивалентная система, состоящая из "объекта замкнутого обратной связью с коэффициентом усиления равным возмущенному коэффициенту исходной системы. Используя критерий Найквиста, находится интервал допустимых значений этого коэффициента, в котором система устойчива. Аналогичным образом находятся допустимые интервалы в случае нескольких возмущенных коэффициентов. Однако, в отличие от случая одного коэффициента эти интервалы могут оказаться завышенными.

1.4.4 О целях управления

Содержательные и постулируемые (формальные) цели управления.

Показатели точности и качества описанные выше будем называть *содержательными целями управления.* В месте с эти в теории управления широко используют *постулируемые (формальные) цели управления.* В качестве последних используются:

a) квадратичные функционалы вида

$$I = \int_0^\infty (q\theta^2 + u^2)dt, \qquad (1.96)$$

где q -заданное положительное число.При этом предполагается, что внешнее возмущение отсутствует $(f(t) = 0)$,

b) корни характеристического полинома системы (1.1),(1.2)

c) значение H_∞ нормы передаточной функции системы (1.1),(1.2), связывающей регулируемую переменную и внешнее возмущение.

В ряде случаев они служат для оценки содержательных целей. Так, корни характеристического полинома системы характеризуют

время регулирования, H_∞ норма-амплитуду регулируемой переменной при гармоническом внешнем возмущении.

Недостатком постулируемых целей является то, что они не могут быть определены экспериментально.Кроме того, показатели b) и c) относятся к линейной модели системы и поэтому они не могут быть определены при численном моделировании системы (1.82),(1.2) и ее экспериментальном исследовании.

Связь с классическими методами

Определяя место методов, которые излагаются далее, отметим, что они является развитием классических методов (и, в частности, метода ЛАЧХ) в следующих направлениях.

1.Расширение класса объектов, для которых синтезируется регулятор. Дело в том, что основным методом синтеза классической теории является метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик (метод ЛАЧХ), который охватывает устойчивые, минимально-фазовые,одномерные объекты.

2.Расширение класса внешних возмущений и задающих воздействий, в качестве которых в классической теории используются ,в основном, ступенчатые либо гармонические функции.

3.В методах адаптивного управления– расширение класса внешних возмущений.

2 Методы оптимизации

В своем развитии теория автоматического управления использует все большее и большее число разделов математики. В течении почти века ее развития она использовала математический аппарат своих прародителей (теоретической механики и электротехники): теорию дифференциальных уравнений и теорию устойчивости, преобразование Фурье и Лапласа. В последующие полвека проблемы управления усложнились многомерными объектами и стремлением строить оптимальные регуляторы.Это привело к активному использованию таких разделов математики как матричная алгебра и вариационное исчисление.

В этой главе приводятся известные методы вариационного исчисления: LQ – и H_∞ – оптимизации, разработаные в связи с проблемами автоматического управления.

Ниже наряду с термином LQ – оптимизация (L -линейный объект, Q -квадратичный функционал) используется термин АКОР (аналитическое конструирование регуляторов). Различие состоит в том, что АКОР, основанный на методе динамического программирования Р.Беллмана, применим как для линейных так и нелинейных объектов, а LQ – и H_∞ – оптимизации, позволяет найти управление только для линейных объектов.

Методы LQ –и H_∞ оптимизаций используются в последующих главах для разработки методов построения систем.

2.1 LQ-оптимизация и АКОР

2.1.1 Одномерный объект. Метод Эйлера -Пуассона

Пусть имеется объект управления, описываемый уравнением

$$(s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0)y = (k_m s^m + \ldots + k_1 s + k_0)u, \quad m < n. \tag{2.1}$$

(Здесь и далее буква s используется как символ дифференцирования и как символ преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях).

Требуется определить такие параметры регулятора

$$(d_{p,n}s^{(n)} + d_{p,n-1}s^{(n-1)} + \cdots + d_{p,1}s + d_{p,0})u = (k_{p,m}s^{(m)} + \cdots + k_{p,1}s + k_{p,0})y, \tag{2.2}$$

чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (2.1), (2.2), возбужденных произвольными начальными отклонениями , минимизировался функционал

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n q_{ii} y^{(i-1)^2} + u^2 + \varepsilon_1 \dot{u}^2 + \ldots + \varepsilon_\rho u^{(\rho)^2} \right) dt, \tag{2.3}$$

в котором q_{ii}, $i = \overline{1,n}$ и ε_j, $j = \overline{1,\rho}$ –заданные положительные числа.

Опишем решение этой задачи на основе уравнений Эйлера–Пуассона классического вариационного исчисления [2.1].

Введем функцию Лангранжа

$$L = \sum_{i=1}^n q_{ii} y^{(i-1)^2} + u^2 + \varepsilon_1 \dot{u}^2 + \ldots + \varepsilon_\rho u^{(\rho)^2} + \lambda(t)[d(s)y - k(s)u].$$

Тогда уравнения Эйлера–Пуассона примут вид

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \ldots + (-1)^n \frac{d}{dt^n}\frac{\partial L}{\partial y^n} = d(-s)\lambda + 2q(s^2)y = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \ldots + (-1)^\rho \frac{d}{dt^\rho}\frac{\partial L}{\partial u^{(\rho)}} = 2\varepsilon(s^2)u - k(-s)\lambda = 0,$$

где $q(s^2) = \sum_{i=1}^n q_{ii} s^{2(i-1)} (-1)^{i-1}$; $\varepsilon(s^2) = 1 + \sum_{i=1}^\rho \varepsilon_i s^{2i} (-1)^i$.

Исключая из этих уравнений переменные u и λ, получаем уравнение для экстремалей вариационной задачи $[d(s)d(-s)\varepsilon(s^2) + k(s)k(-s)q(s^2)]y = 0$. Его характеристический полином

$$\Delta(s) = d(s)d(-s)\varepsilon(s^2) + k(s)k(-s)q(s^2) \tag{2.4}$$

Это полином четных степеней s , и его можно представить в форме $\Delta(s) = \delta(s)\delta(-s)$, где $\delta(s)$ – полином степени $n + \rho$, содержащий корни полинома $\Delta(s)$ с отрицательными вещественными частями.

С другой стороны, характеристический полином замкнутой системы (2.1), (2.2) имеет вид

$$D(s) = d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s). \tag{2.5}$$

Составляя тождество $\delta(s) = D(s)$ и сравнивая в этом тождестве коэффициенты при одинаковых степенях s , получаем уравнения для определения искомых параметров регулятора (2.2).

Пример Рассмотрим систему

$$\dddot{y} + d_2\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y = k_2\ddot{u} + k_1\dot{u} + k_0 u; \tag{2.6}$$

$$d_{p,2}\ddot{u} + d_{p,1}\dot{u} + d_{p,0}u = k_{p,2}\ddot{y} + k_{p,1}\dot{y} + k_{p,0}y, \tag{2.7}$$

оптимальную в смысле функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \left(q_{11}y^2 + q_{22}\dot{y}^2 + u^2 + \varepsilon_1\dot{u}^2 + \varepsilon_2\ddot{u}^2\right) dt.$$

полином ее уравнений Эйлера -Пуассона

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= (s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0)(-s^3 + d_2s^2 - d_1s + d_0)(1 - \varepsilon_1s^2 + \varepsilon_2s^4)+\\ &+(k_2s^2 + k_1s + k_0)(k_2s^2 - k_1s + k_0)(q_{11} - q_{22}s^2) = \delta(s)\delta(-s),\end{aligned}$$

где $\delta(s) = \delta_5s^5 + \delta_4s^4 + \delta_3s^3 + \delta_2s^2 + \delta_1s + \delta_0$. С другой стороны характеристический полином системы (2.6),(2.7) имеет вид

$$\begin{aligned}D(s) &= d_{p,2}s^5 + (d_{p,2}d_2 + d_{p,1} - k_{p,2}k_2)s^4 + (d_{p,0} + d_{p,1}d_2 + d_{p,2}d_1 - k_{p,1}k_2\\ &-k_{p,2}k_1)s^3 + (d_{p,0}d_2 + d_{p,1}d_1 + d_{p,2}d_0 - k_{p,1}k_1 - k_{p,0}k_2\\ &-k_{p,2}k_0)s^2 + (d_{p,0}d_1 + d_{p,1}d_0 - k_{p,0}k_1 - k_{p,1}k_0)s + (d_{p,0}d_0 - k_{p,0}k_0),\end{aligned}$$

Сравнивая последний полином с полиномом $\delta(s)$, получаем уравнения, которым удовлетворяют параметры регулятора (2.7).

2.1.2 Многомерный объект. Уравнения Риккати

Объекты с постоянными коэффициентами

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \;\; x(t_0) = x^{(0)}, \;\; t_0 = 0, \tag{2.8}$$

где A и B – заданные матрицы чисел размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Требуется найти матрицу чисел C' (размеров $m \times n$, штрих-символ транспонирования) уравнения регуляторов

$$u = C'x, \tag{2.9}$$

такую, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (2.8), (2.9), возбужденных произвольными начальными отклонениями $x^{(0)}$, минимизировался функционал

$$J = \int\limits_0^\infty (x'Qx + u'u)\, dt, \tag{2.10}$$

где Q – заданная положительно-определенная матрица размеров $n \times n$.

Матрицу C' закона управления (2.9) иногда называют *матрицей коэффициентов усиления регулятора.*

Переходя к решению этой задачи на основе метода динамического программирования, приведенного в приложении к этой главе, ограничимся вначале случаем $n = m = 1$. В этом случае уравнения системы и функционал примут вид

$$\dot{x} = ax + bu, \tag{2.11}$$

$$u = cx, \tag{2.12}$$

$$J = \int\limits_0^\infty (qx^2 + u^2)\, dt. \tag{2.13}$$

Тогда уравнения (2.239), (2.240) метода динамического программирования запишутся как

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = qx^2 + u^2 + \frac{\partial v}{\partial x}(ax + bu), \tag{2.14}$$

$$2u + \frac{\partial v}{\partial x}b = 0 \quad u = -\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}b. \tag{2.15}$$

Предпоследнее равенство выражает необходимое условие экстремума правой части (2.14). Нетрудно проверить, что при этом управлении достигается ее минимум. Действительно,

$$\frac{d^2\left[qx^2 + u^2 + \dfrac{\partial v}{\partial x}(ax + bu)\right]}{du^2} = 2 > 0.$$

Этот минимум - единственный и поэтому единственно управление вида (2.15). Правда, как будет показано ниже, уравнению (2.14) удовлетворяет не единственная функция v. Эта функция доопределяется из условия устойчивости системы (2.8), (2.9).

Исключая u из (2.14) с помощью (2.15), получим нелинейное уравнение в частных производных:

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}ax - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}b\right)^2 + qx^2. \qquad (2.16)$$

Решение этого уравнения при краевом условии

$$v[x(t_1)] = 0 \ \ (t_1 \to \infty)$$

будем искать в виде

$$v = px^2, \ \ p = \text{const}. \qquad (2.17)$$

Подставляя это выражение в (2.16), получим

$$0 = 2pax^2 - (pb)^2x^2 + qx^2. \qquad (2.18)$$

Отсюда следует алгебраическое уравнение для определения неизвестного коэффициента p в (2.17):

$$2pa - p^2b^2 + q = 0 \qquad (2.19)$$

Из двух решений

$$p^{(1)} = \frac{a}{b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}, \ \ p^{(2)} = \frac{a}{b^2} - \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}$$

этого уравнения выбираем первое исходя из условия положительности функции v, обеспечивающего асимптотическую устойчивость синтезируемой системы, а следовательно, и выполнение краевого условия $v[x(\infty)] = 0$.

На основе (2.15) получаем

$$u = (-p^{(1)}b)x, \qquad (2.20)$$

и, таким образом, искомое число

$$c = -p^{(1)}b. \qquad (2.21)$$

В общем случае $(n > 1, \ m \geq 1)$ уравнения (2.19), (2.21) имеют вид

$$PA + A'P - PBB'P + Q = 0; \qquad (2.22)$$

$$C = -PB, \qquad (2.23)$$

где P – симметричная матрица чисел размеров $n \times n$.

Уравнение (2.22) называется *матричным уравнением Риккати* .

Процедура *аналитического конструирования регуляторов (процедура АКОР)* состоит из трех операций:
1) решение уравнения Риккати,
2) выделение из всего множества этих решений матрицы $P^0 > 0$ (численный метод нахождения P^0 приведен ниже),
3) вычисление искомой матрицы коэффициентов усиления регулятора по формуле

$$C = -P^0B. \qquad (2.24)$$

Убедимся непосредственно, что матрица C, определяемая соотношением (2.24), обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.8), (2.9). Для исследования устойчивости системы $\dot{x} = (A+BC')x$ воспользуемся прямым методом Ляпунова. Примем в качестве функции Ляпунова $v = x'P^0x > 0$ и вычислим полную производную этой функции:

$$\frac{dv}{dt} = \dot{x}'P^0x + x'P^0\dot{x} = x'(A + BC')'P^0x + x'P^0(A + BC')x = \\ = x'[P^0A + A'P^0 + P^0BC' + CB'P^0]x.$$

Учитывая, что матрица C определяется выражением (2.24), получим, с учетом того, что P^0 удовлетворяет (2.22),

$$\frac{dv}{dt} = x'[P^0A + A'P^0 - P^0BB'P^0 - P^0BB'P^0]x = \\ = -x'Qx - x'P^0BB'P^0x = -x'Qx - u'u < 0.$$

Если обьект (2.8) полностью управляем и $Q > 0$, то среди решений системы (2.22) всегда найдется, и при том единственная, положительно-определенная матрица P^0. Если матрица Q – неотрицательно-определенная матрица $(Q \geq 0)$, то ее всегда можно представить в виде

$$Q = H'H,$$

где H – матрица размеров $\chi \times n$ (χ – ранг матрицы Q). Среди решений (2.22) по-прежнему существует единственная матрица P^0, если Q в функционале (2.10) неотрицательно - определенная матрица, удовлетворяющая условию полной управляемости пары (A', H') :

$$[H',\ A'H', \ldots, A^{(n-1)'}H'] = n.$$

Требование полной управляемости пар (A, B), (A', H') для существования и единственности $P^0 > 0$ можно ослабить, заменив его условием стабилизируемости этих пар .

Пример. Аналитическое конструирование регулятора гирорамы. Осуществим первый этап (составление уравнений (2.22), (2.23)) аналитического конструирования регулятора гирорамы.

Опишем вначале физическое содержание задачи стабилизации гирорамы [2.3], поскольку на примере решения этой задачи будут иллюстрироваться результаты, приведенные в этой и следующих главах.

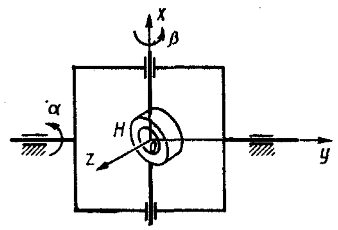

Рис. 2.1

Рассмотрим трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе (рис. 2.1). Его уравнения имеют вид [2.7]:

$$(J_e+J_{be})\ddot{\beta}+(J_e+J_{be}-J_b)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta+n_\beta\dot{\beta}+H\dot{\alpha}\cos\beta = M_x; \quad (2.25)$$

$$[(J_e + J_{be})\cos^2\beta + J_b\sin^2\beta + J_h]\ddot{\alpha} + 2(J_b - J_e - J_{be})\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta + n_\alpha\dot{\alpha}$$
$$-H\dot{\beta}\cos\beta = -M_y; \quad (2.26)$$

α – угол поворота наружной рамы относительно оси OY; β - угол поворота внутреннего кольца карданова подвеса относительно оси OX (угол прецессии); J_h – момент инерции наружной рамы (кольца) относительно оси OY; J_e – экваториальный момент инерции гироскопа; J_b, J_{bx}, J_{by} – моменты инерции внутреннего кольца карданова подвеса относительно осей OZ, OX, OY соответственно, при этом $J_{bx} = J_{by} = J_{be}$; H – кинетический момент гироскопа; M_x и M_y – моменты относительно осей OX и OY соответственно; n_α, n_β – коэффициенты демпфирования. Гироскоп в кардановом подвесе используется (если установить на оси OY датчик угла) для измерения углов поворота движущегося объекта (например, ракеты) относительно оси OY. Однако из-за вредных моментов по этой оси (трения, дисбаланса и т. п.) гироскоп начинает "прецессировать" относительно оси OX, т. е. ось OZ начинает поворачиваться в направлении оси OY, и гироскоп теряет свойство быть индикатором поворота летательного аппарата. Явление прецессии следует непосредственно из уравнения (2.26), если в нем пренебречь всеми слагаемыми в левой части, кроме последнего слагаемого (так как $H \gg J_e$, J_{be}, J_b, n_α). Прецессию можно измерить, установив на оси OX датчик угла. Усилим этот сигнал и подадим его на двигатель, который развивает полезный момент, равный и противоположный по знаку вредному. Тогда прецессия прекратится и гироскоп будет сохранять свои функции. Гироскоп в кардановом подвесе с системой стабилизации угла прецессии называется *гирорамой*. Ее схема приведена на рис. 2.2, где ДУП – датчик угла прецессии, ДМ – датчик момента (двигатель).

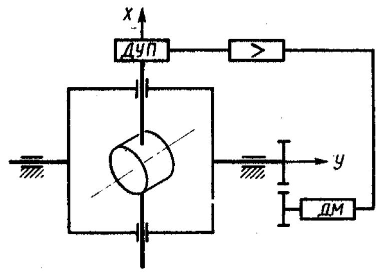

Рис. 2.2

Запишем уравнения (2.25), (2.26) в форме Коши.

Пренебрегая значениями J_e, J_{be}, J_b по сравнению с J_h, полагая $M_x = 0$ и вводя обозначения

$$x_1=\frac{\beta}{\beta_h};\;\; x_2=\frac{\dot\beta}{\beta'_h};\;\; x_3=\frac{\dot\alpha}{\alpha'_h};\;\; (\beta_h=1\text{ рад};\;\; \beta'_h=1\text{ рад/сек};\;\; \alpha'_h=1\text{ рад/сек});$$

$$-\frac{J_e+J_{be}-J_b}{J_e+J_{be}}=R_2;\;\; -\frac{H}{J_e+J_{be}}=a_{23};\;\; -\frac{n_\beta}{J_e+J_{be}}=a_{22};\;\; -\frac{2(J_e-J_{be}-J_b)}{J_h}=R_3;$$

$$\frac{H}{J_h}=a_{32};\;\; -\frac{n_\alpha}{J_h}=a_{33};\;\; -\frac{M_y}{J_h}=b_{31}u+m_{31}f,$$

запишем уравнения (2.25), (2.26) в виде

$$\dot x_1=x_2;\;\; \dot x_2=a_{22}x_2+a_{23}x_3\cos x_1+R_2x_3^2\sin x_1\cos x_1; \tag{2.27}$$

$$\dot x_3=a_{32}x_2\cos x_1+a_{33}x_3+R_3x_3x_2\sin x_1\cos x_1+b_{31}u+m_{31}f. \tag{2.28}$$

Разлагая правые части этих уравнений в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1=x_2=\ x_3=0$, получим уравнения первого приближения

$$\dot x_1=x_2,\;\; \dot x_2=a_{22}x_2+a_{23}x_{31},\;\; \dot x_3=a_{32}x_2+a_{33}x_3+b_{31}u+\psi_{31}f, \tag{2.29}$$

где u пропорционально моменту, развиваемому датчиком моментов, а f пропорционально вредному моменту по оси OY.

Полагая пока $f=0$, будем искать управление

$$u=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3, \tag{2.30}$$

при котором на движениях гирорамы (возбужденных начальными отклонениями) минимизируется функционал

$$J=\int_0^\infty\left(q_{11}x_1^2+q_{22}x_2^2+q_{33}x_3^2+u^2\right)\,dt,\;\; (q_{ii}>0;\; i=1,2,3). \tag{2.31}$$

Переходя к решению этой задачи, запишем уравнения (2.22), (2.23) процедуры АКОР. Первое из этих уравнений имеет вид

$$\left\|\begin{matrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{12}&p_{22}&p_{23}\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}0&1&0\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}0&0&0\\1&a_{22}&a_{23}\\0&a_{23}&a_{33}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{12}&p_{22}&p_{23}\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\end{matrix}\right\|-$$
$$-\left\|\begin{matrix}p_{13}&b_{31}\\p_{23}&b_{31}\\p_{33}&b_{31}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\,p_{13}b_{31},\quad p_{23}b_{31},\quad p_{33}b_{31}\,\right\|+\left\|\begin{matrix}q_{11}&0&0\\0&q_{22}&0\\0&0&q_{33}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right\|. \tag{2.32}$$

Это матричное уравнение можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{gathered}-(p_{13}b_{31})^2+q_{11}=0;\\ p_{11}+p_{12}a_{22}+p_{13}a_{32}-(p_{13}b_{31})(p_{23}b_{31})=0;\\ p_{12}a_{23}+p_{13}a_{33}-(p_{13}b_{31})(p_{33}b_{31})=0;\\ 2p_{12}+2p_{22}a_{22}+2p_{23}a_{23}-(p_{23}b_{31})^2+p_{22}=0;\\ p_{22}a_{23}+p_{23}a_{33}+p_{13}+a_{22}p_{23}+a_{23}p_{33}-(p_{23}b_{31})(p_{33}b_{31})=0;\\ 2p_{23}a_{23}+2p_{33}a_{33}-(p_{33}b_{31})^2+q_{33}=0.\end{gathered} \tag{2.33}$$

(Из-за симметричности матрицы P число этих уравнений не $n^2=9$, а $\dfrac{n(n+1)}{2}=6$).

На основе уравнений (2.23) получим

$$c_1=-p_{13}b_{31},\;\; c_2=-p_{23}b_{31},\;\; c_3=-p_{33}b_{31}. \tag{2.34}$$

Таким образом, аналитическое конструирование регулятора гирорамы (системы стабилизации гирорамы) сводится к решению алгебраических уравнений (2.32) и нахождению искомых параметров регулятора (2.30) по формулам (2.34).

Нестационарные объекты

Рассмотрим нестационарный объект, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf x}=A(t)\mathbf x+B(t)\mathbf u,\;\; \mathbf x(t_0)=\mathbf x^{(0)}, \tag{2.35}$$

в котором $A(t)$ и $B(t)$ известные на интервале $[t_0,\ t_1]$ матрицы функций.

Пусть критерий качества имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}'Q(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{u})\, dt + \mathbf{x}'(t_1)P^{(1)}\mathbf{x}(t_1), \tag{2.36}$$

где $Q(t)$ и $P^{(1)}$ – заданные положительно-определенные матрицы функций и чисел соответственно.

Требуется найти матрицу $C'(t)$ регулятора

$$\mathbf{u} = C'(t)\mathbf{x}, \tag{2.37}$$

при которой на движениях системы (2.35), (2.37), возбужденных произвольными начальными отклонениями, минимизируется функционал (2.36).

Переходя к решению этой задачи, рассмотрим вначале случай $n = m = 1$. Тогда уравнения системы и функционал оптимизации примут вид:

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)u; \tag{2.38}$$

$$u = c(t)x; \tag{2.39}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (q(t)x^2 + u^2)\, dt + p^{(1)}x^2(t_1). \tag{2.40}$$

Функцию v, разрешающую задачу АКОР для нестационарного объекта (2.35), будем искать в виде $v = p(t)x^2$. Подставляя ее в (2.16), получим вместо алгебраического уравнения (2.18) дифференциальное уравнение

$$-\dot{p}(t) = 2p(t)a(t) - p^2(t)b^2(t) + q(t) = 0 \tag{2.41}$$

и краевое условие

$$p(t_1) = p^{(1)}. \tag{2.42}$$

Уравнение (2.41) является специальным видом дифференциального уравнения, решение которого изучалось еще в XVIII в. итальянским математиком Я. Риккати, именем которого оно и названо.

В общем случае $(n > 1, m \geq 1)$ уравнение (2.41) и краевое условие (2.44) имеют вид:

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A'(t)P(t) - P(t)B(t)B'(t)P(t) + Q(t). \tag{2.43}$$

$$P(t_1) = P^{(1)}. \tag{2.44}$$

Уравнение (2.43) называется *матричным дифференциальным уравнением Риккати.* Переходя к его решению уравнения , введем "новое время" $\tau = t_1 - t$ и обозначим $(t) = (t_1 - \tau) = \bar{P}(\tau)$. Тогда (2.43) и (2.44) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{P}(\tau)}{d\tau} = \bar{P}(\tau)A(t_1-\tau) + A'(t_1-\tau)\bar{P}(\tau) - \bar{P}(\tau)B(t_1-\tau)B'(t_1-\tau)\bar{P}(\tau) \\ +Q(t_1-\tau);\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\bar{P}(0) = P^{(1)}. \tag{2.46}$$

Таким образом, краевая задача для уравнения (2.43) свелась, путем введения нового (обратного) времени, к задаче решения уравнения (2.45) с известным начальным условием (2.46). Для его численного решения можно использовать любой из известных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге-Кутта, Эйлера и т. п.).

Решив уравнение (2.46), найдем искомую матрицу

$$C(t) = \bar{P}(t_1 - t)B(t). \tag{2.47}$$

2.1.3 Решение уравнения Риккати

.

Возвращаясь к матричному алгебраическому уравнению Риккати, разрешающему задачу АКОР для стационарных объектов, отметим, что численное решение нелинейных алгебраических уравнений является не менее трудной проблемой, чем решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений а частных производных. Однако специфический характер уравнения (2.22) и его природа позволили разработать ряд эффективных численных методов его решения: Репина-Третьякова [2.8], Ньютона-Рафсона [2.9], диагонализации [2.10].

Опишем первый из этих методов. В связи с этим положим, что верхний предел в функционале (2.10) конечен, и тогда функционал оптимизации имеет вид

$$J = \int_0^{t_1} (x'Qx + u'u)\, dt \ \ (t_1 \neq \infty). \tag{2.48}$$

Конечный верхний предел приводит к тому, что при $n = m = 1$ функцию (2.17) следует искать в виде $v = p(t)x^2$. При этом должно выполняться краевое условие $v(x(t_1)) = 0$ (или $p(t_1) = 0$). Тогда, повторяя изложенное выше, получим дифференциальное уравнение и краевое условие

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A'P(t) - P(t)BB'P(t) + Q, \ \ P(t_1) = 0 \tag{2.49}$$

Вводя, как и в нестационарном случае, $\tau = t_1 - t$ и обозначая $P(t) = P(t_1 - \tau) = \bar{P}(\tau)$, запишем (2.49) как

$$\frac{d\bar{P}(\tau)}{d\tau} = \bar{P}(\tau)A + A'\bar{P}(\tau) - \bar{P}(\tau)BB'\bar{P}(\tau) + Q, \quad 0 \le \tau \le t_1; \tag{2.50}$$

$$\bar{P}(0) = 0. \tag{2.51}$$

Переходя к методу Репина-Третьякова, отметим, что он опирается на соотношение

$$\lim_{\tau\to\infty} \bar{P}(\tau) = P^0 \tag{2.52}$$

[так как τ изменяется в пределах от 0 до t_1 , то (2.52) имеет смысл, если t_1 может принимать различные фиксированные значения, в частности $t_1 = \infty$].

Из предельного соотношения (2.52) следует, что для нахождения положительно - определенной матрицы P^0 , удовлетворяющей алгебраическому уравнению Риккати (2.22), достаточно решать систему дифференциальных уравнений (2.50) до тех пор, пока его решение не установится (элементы матрицы $\bar{P}(\tau)$, не перестанут изменяться во времени τ), и это установившееся решение и есть искомая матрица P^0 .

Пример. Численное решение задачи об аналитическом конструировании оптимального регулятора гирорамы. Пусть заданы значения параметров гирорамы (2.29) и функционала оптимизации (2.31):

$$a_{22} = -300; a_{23} = 10^3; a_{32} = -3; a_{33} = -1; b_{31} = 10^{-3}; \tag{2.53}$$

$$q_{11} = 1,6 \cdot 10^{12}; q_{22} = 3 \cdot 10^8; q_{33} = 5 \cdot 10^9. \tag{2.54}$$

Подставляя в правые части уравнений (2.32) вместо нулей соответствующие производные (так, в первом уравнении нужно подставить $\dot{p}_{11}$, во втором – $\dot{p}_{12}$, в третьем – $\dot{p}_{13}$ и т. д.) и решая полученную систему из шести дифференциальных уравнений с помощью метода Рунге-Кутта, получим:

$$p^0_{11} = 53,4 \cdot 10^9; p^0_{12} = 147 \cdot 10^6; p^0_{13} = 12,6 \cdot 10^8; p^0_{22} = 29 \cdot 10^4; \tag{2.55}$$

$$p^0_{23} = 44 \cdot 10^5; p^0_{33} = 116 \cdot 10^6. \tag{2.56}$$

Искомые параметры регулятора вычисляются на основе чисел (2.56):

$$c_1 = -0,126 \cdot 10^7; c_2 = 0,44 \cdot 10^4; c_3 = -116 \cdot 10^3. \tag{2.57}$$

Метод диагонализации

Этот метод основан на вычислении корней характеристического полинома следующей матрицы, которая формируется из матриц, входящих в уравнение Риккати

$$G = \begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -Q & A^T \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Эта матрица размеров $2n \times 2n$ называется *гамильтонианом*, T - символ транспонирования.

Ее характеристический полином $g(s) = \det(Es - G)$ является полиномом четных степеней s . Это означает, что если λ – корень этого полинома (собственное число матрицы G , то $-\lambda$ также является его корнем. Таким образом, матрица G имеет $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ собственных чисел с отрицательными вещественными частями и

$-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$ собственных чисел с положительными вещественными частями.

Искомая матрица P^0 вычисляется по формуле

$$P^{(0)} = P_2 \cdot P_1^{-1}, \tag{2.59}$$

где P_1 и P_2 – квадратные матрицы, формируемые следующим образом:

а). Вычислить собственные числа матрицы G .

б). Решить уравнения

$$(E\lambda_i - G)\mathbf{c}_i = 0 \ \ (i = \overline{1,n})$$

и сформулировать из собственных векторов $\mathbf{c}_i$ $(i = \overline{1,n})$ $2n \times 2n$ матрицу $\overline{C}$.

в). Обозначить первые n строк матрицы $\overline{C}$ как P_1 , а последующие n -строк – P_2 .

2.1.4 Нелинейные объекты

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k \quad (i = \overline{1,n}). \tag{2.60}$$

Пусть правые части этих уравнений разложимы в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = u_1 = \ldots = u_m = 0$. Тогда (2.60) имеет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + \sum_{j,k=1}^{n} a_{ijk} x_j x_k + \sum_{j,k,\mu=1}^{n} a_{ijk\mu} x_j x_k x_\mu + \ldots + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k \ \ (i = \overline{1,n}). \tag{2.61}$$

Требуется найти управления

$$u_k = r_k(x_1, \ldots, x_n) \ (k = \overline{1,m}), \tag{2.62}$$

при которых на движениях системы (2.61), (2.62), возбужденных произвольными начальными отклонениями, минимизируется функционал (2.10). Решение этой задачи получено в [2.11].

Приведем это решение, ограничиваясь для простоты случаем $n = m = 1$. В этом случае уравнения (2.61) запишем (обозначая $a_{111} = a^{(2)}$, $a_{1111} = a^{(3)}$ и т.д.) так:

$$\dot{x} = ax + a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3 + \ldots + bu.$$

Уравнение (2.239), (2.240) метода динамического программирования имеют в рассматриваемом случае вид

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = qx^2 + u^2 + \frac{\partial v}{\partial x}(ax + a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3 + \ldots + bu); \tag{2.63}$$

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} b. \tag{2.64}$$

Исключая u из (2.63) с помощью (2.64), получим

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}(ax + a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3 + \ldots) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x} b\right)^2 + qx^2. \tag{2.65}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$v = px^2 + p^{(3)}x^3 + p^{(4)}x^4 + \ldots \ . \tag{2.66}$$

Подставляя (2.66) в (2.65), получим

$$\begin{gathered}(2px + 3p^{(3)}x^2 + 4p^{(4)}x^3 + \ldots)(ax + a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3 + \ldots) \\ -\tfrac{1}{4}b^2(2px + 3p^{(3)}x^2 + 4p^{(4)}x^3 + \ldots)^2 + qx^2 = 0.\end{gathered} \tag{2.67}$$

Приравнивая нулю совокупность коэффициентов при одинаковых степенях x , получим уравнения для определения неизвестных параметров p , $p^{(3)}$, $p^{(4)}, \ldots$ формы (2.66). Так, для совокупности коэффициентов при x^2 имеем

$$2pa - (pb)^2 + q = 0 \tag{2.68}$$

для совокупности коэффициентов при x^3 получим

$$2pa^{(2)} + 2p^{(3)}a - \frac{1}{2}b^2(2p)(3p^{(3)}) = 0 \tag{2.69}$$

и т. д.

Уравнение (2.68) совпадает с уравнением (2.19) и его решение имеет вид

$$p^{(1)} = \frac{a}{b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}.$$

Это уравнение в отличие от (2.68) является линейным уравнением для определения коэффициента $p^{(3)}$ формы (2.66). Решение этого уравнения существует, если $a + bc \neq 0$. Последнее выполняется в силу асимптотической устойчивости уравнения $\dot{x} = (a + bc)x$, описывающего замкнутую оптимальную в смысле функционала (2.10) систему с линейным объектом (2.8).

Приравнивая нулю совокупность коэффициентов при x^4 , получим

$$4p^{(4)}(a + bc) = -2p^{(1)}a^{(3)} - 3p^{(3)}a^{(2)} + \frac{1}{4}b^2(3p^{(3)})^2. \qquad (2.70)$$

Это уравнение, как и предыдущее, является линейным относительно неизвестного параметра $p^{(4)}$ и т. д.

В соответствии с (2.64) искомое управление имеет вид

$$u = cx + c^{(2)}x^2 + c^{(3)}x^3 + \ldots, \qquad (2.71)$$

где

$$c = -p^{(1)}b;\;\; c^{(2)} = -\frac{3}{2}p^{(3)}b;\;\; c^{(3)} = -\frac{4}{2}p^{(4)}b, \ldots \qquad (2.72)$$

В общем случае $(n > 1,\ m \geq 1)$ функция

$$v = \sum_{(i,j=1)}^{n} p_{ij}x_ix_j + \sum_{(i,j,k=1)}^{n} p_{ijk}x_ix_jx_k + \sum_{(i,j,k,\mu=1)}^{n} p_{i,j,k,\mu}x_ix_jx_kx_\mu + \ldots. \qquad (2.73)$$

Ее коэффициенты p_{ij} $(i,\ j = \overline{1,n})$ находятся в результате решения алгебраического уравнения Риккати (2.22), а коэффициенты p_{ijk} $(i,\ j,\ k = \overline{1,n}$ кубичной и последующих форм являются решениями линейных алгебраических уравнений Ляпунова.

2.1.5 Дискретные объекты

Пусть задан объект управления, описываемый разностными уравнениями

$$x(k+1) = \Phi x(k) + Ru(k) \;\; (k = 0,1,2,\ldots) \;\; x(0) = x^{(0)}, \qquad (2.74)$$

где Φ и R - заданные матрицы чисел размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Качество переходных процессов для этого объекта оценивается суммой

$$J = \sum_{k=1}^{N} x'(k)Qx(k) + u'(k-1)u(k-1), \qquad (2.75)$$

где Q - заданная положительно-определенная матрица. Требуется найти матрицы $C(k)$ управления

$$u(k) = C'(k)x(k) \;\; (k = 0,1,2,\ldots), \qquad (2.76)$$

при котором функционал (2.75) принимает наименьшее значение при любых $x^{(0)}$.

Аналитическое конструирование регуляторов для дискретных объектов состоит [2.12] , [2.13] из операций:

1) вычисления матриц $P(N-j)$ $j = \overline{1,N}$ на основе рекуррентного соотношения

$$P(N-j) = \Phi'[Q + P(N-j+1)]\Phi - \Phi'[Q + P(N-j+1)]R\times$$
$$\times[R'(Q + P(N-j+1))R + E]^{-1}R'[Q + P(N-j+1)]\Phi \;\; (j = \overline{1,N}); \qquad (2.77)$$

$$P(N) = 0; \qquad (2.78)$$

2) нахождения

$$C'(N-j) = -\{R'[Q + P(N-j+1)]R + E\}^{-1} \times R'[Q+P(N-j+1)]\Phi \;\; (j = \overline{1,N}); \qquad (2.79)$$

3) определения матрицы коэффициентов усиления регулятора

$$C'(k) = C'(N-j) \;\; (j = \overline{1,N}). \qquad (2.80)$$

Докажем эти соотношения при $n = m = 1$. В этом случае объект (2.74) и функционал (2.75) принимают вид

$$x(k+1) = fx(k) + ru(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \tag{2.81}$$

$$J = \sum_{k=1}^{N} qx^2(k) + u^2(k). \tag{2.82}$$

Для нахождения оптимального управления

$$u(k) = c(k)x(k) \tag{2.83}$$

применим принцип оптимальности Р.Беллмана.

В соответствии с этим принципом независимо от того, как двигалась система до последнего шага (интервала $[(N-1),\ N]$), управление $(u(N-1))$ на последнем шаге должно быть оптимальным (относительно состояния, возникшего в результате первых $N-1$ шагов).

Частичная сумма, которую необходимо минимизировать на последнем шаге, имеет вид

$$J^{(N-1)} = qx^2(N) + u^2(N-1) = q[fx(N-1) + ru(N-1)]^2 + u^2(N-1). \tag{2.84}$$

Используя необходимое условие экстремума этой суммы

$$\frac{\partial J^{(N-1)}}{\partial u(N-1)} = 2q[fx(N-1) + ru(N-1)]r + 2u(N-1) = 0, \tag{2.85}$$

получим оптимальное управление на последнем участке

$$u(N-1) = -\frac{qfr}{1+qr^2}x(N-1). \tag{2.86}$$

При оптимальном управлении

$$\min\ J^{(N-1)} = \upsilon^{(N-1)} = \left[qf^2 - \frac{q^2f^2r^2}{1+qr^2}\right]x^2(N-1) = p(N-1)x^2(N-1), \tag{2.87}$$

где

$$p(N-1) = qf^2 - \frac{q^2f^2r^2}{1+r^2q}. \tag{2.88}$$

Переходя к нахождению управления на предпоследнем шаге (интервале $[N-2,\ N-1]$), запишем частичную сумму, которую должно минимизировать это управление:

$$\begin{aligned} J^{(N-1)} &= qx^2(N-2) + u^2(N-2) + \upsilon^{(N-1)} = \\ &= [q + p(N-1)]x^2(N-1) + u^2(N-2) = \\ &= [q + p(N-1)][fx(N-2) + ru(N-2)]^2 + u^2(N-2). \end{aligned} \tag{2.89}$$

Используя необходимое условие минимума $\dfrac{\partial J^{(N-2)}}{\partial u(N-2)} = 0$, получим оптимальное управление на предпоследнем участке

$$u(N-2) = -\frac{[q+p(N-1)]fr}{1+[q+p(N-1)]r^2}x(N-2). \tag{2.90}$$

При этом управлении частичная сумма (2.89) примет значение

$$\begin{aligned} \min J^{(N-2)} = \upsilon^{(N-2)} &= \left\{[q+p(N-1)]f^2 - \frac{[q+p(N-1)]^2f^2r^2}{1+[q+p(N-1)]r^2}\right\} \times \\ &\times x^2(N-2) = p(N-2)x^2(N-2), \end{aligned} \tag{2.91}$$

где

$$p(N-2) = [q+p(N-1)]f^2 - \frac{[q+p(N-1)]^2f^2r^2}{1+[q+p(N-1)]r^2} \tag{2.92}$$

Продолжая этот процесс, дойдем до j-го (от конца) участка (интервала $[N-j,\ N-j+1]$). Частичная сумма, которую нужно минимизировать управлением $u(N-j)$, имеет вид

$$\begin{aligned} J^{(N-j)} &= qx^2(N-j+1) + u^2(N-j) + \upsilon^{(N-j+1)} = \\ &= [q + p(N-j+1)]x^2(N-j+1) + u^2(N-j) = \\ &= [q + p(N-j+1)][fx(N-j) + ru(N-j)]^2 + u^2(N-j). \end{aligned} \tag{2.93}$$

Оптимальное управление

$$u(N-j) = -\frac{[q+p(N-j+1)]fr}{1+[q+p(N-j+1)]r^2}x(N-j) = \\ = c(N-j)x(N-j), \tag{2.94}$$

где

$$c(N-j) = -\frac{[q+p(N-j+1)]fr}{1+[q+p(N-j+1)]r^2}. \tag{2.95}$$

Значение частичной суммы (2.93) при этом управлении

$$\min J^{(N-j)} = \upsilon^{(N-j)} = p(N-j)x^2(N-j), \tag{2.96}$$

где

$$p(N-j) = [q+p(N-j+1)]f^2 - \frac{[q+p(N-j+1)]^2 f^2 r^2}{1+[q+p(N-j+1)]r^2}. \tag{2.97}$$

Полагая в (2.79), (2.77) $n = m = 1$, убеждаемся, что они совпадают с (2.95), (2.97) соответственно.

Если в функционале (2.75) верхний предел $N \to \infty$, то оптимальное управление (2.76) принимает вид

$$u(k) = C'x(k) \;\; (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.98}$$

где C' – матрица чисел, определяемая из уравнений

$$\bar{P} - \Phi'\bar{P}\Phi - \Phi'\bar{P}R[R'\bar{P}R + E]^{-1}R'\bar{P}\Phi + Q = 0 \tag{2.99}$$

и

$$C' = -\left[R'\bar{P}R + E\right]^{-1} R'\bar{P}\Phi \tag{2.100}$$

Эти уравнения следуют из (2.77),(2.79),если положить $P(N-j) = P(N-j+1) = P$ и обозначить $Q + P = \bar{P}$.

Пример. Аналитическое конструирование дискретного (цифрового) регулятора гирорамы.

Пусть требуется найти цифровой регулятор

$$u(k) = c_1x_1(k) + c_2x_2(k) + c_3x_3(k) \;\; (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.101}$$

при котором на движениях гирорамы, описываемой уравнениями (2.29) (при $f = 0$), минимизируется функционал

$$J = \sum_{k=1}^{N\to\infty} q_{11}x_1^2(k) + q_{22}x_2^2(k) + q_{33}x_3^2(k) + u^2(k). \tag{2.102}$$

Переходя к численному решению этой задачи, сформируем вначале дискретную модель гирорамы. Для этого воспользуемся формулами (1.19), (1.20), с помощью которых вычислим матрицу Φ и вектор R . При значениях параметров гирорамы $a_{22} = -400$, $a_{23} = 10^3$, $a_{32} = -10$, $b_{31} = 10^{-2}$ получим при $T = 0,015$

$$\Phi = \left\| \begin{array}{lll} 1 & 0,192\cdot 10^{-2} & 0,279\cdot 10^{-1} \\ 0 & -0,477\cdot 10^{-1} & 0,192\cdot 10 \\ 0 & -0,192\cdot 10^{-1} & 0,72 \end{array} \right\|; \; R = \left\| \begin{array}{l} 0,19\cdot 10^{-15} \\ 0,279\cdot 10^{-3} \\ 0,131\cdot 10^{-3} \end{array} \right\|. \tag{2.103}$$

Используя эти матрицы, а также значения параметров функционала (2.102), $q_{11} = 10^{10}$, $q_{22} = q_{33} = 0$, получим на основе (2.77), (2.79), (**??**) искомые числа:

$$c_1 = -0,686\cdot 10^5; \;\; c_2 = -0,728\cdot 10^2; \;\; c_3 = -0,414\cdot 10^4. \tag{2.104}$$

2.1.6 Программное обеспечение

Система ГАММА: директива D411 (Аналитическое конструирование регуляторов (АКоР).

Система MATLAB: m -функции:

1) $[C', P, \lambda] = lqr(A, B, Q, \bar{L}, L)$ -синтез оптимального регулятора непрывной системы (LQ-оптимизация)

2) $[C', \bar{P}, \lambda] = dlqr(Phi, R, Q, \bar{L}, L)$ -синтез оптимального регулятора дискретной системы.

3) $[P, \lambda, C', rr] = care(A, B, Q)$ -решение уравнения Риккати .

4) $[\bar{P}, \lambda, C', rr] = care(A, B, Q)$ -решение уравнения Риккати для дискретных систем .

2.2 Модальное управление и множество стабилизирующих регуляторов

2.2.1 Модальное управление по состоянию

Пусть задан объект, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.105}$$

Требуется найти матрицу C управления

$$u = C'x \tag{2.106}$$

такую, чтобы характеристический полином системы

$$D(s) = \det(Es - A - BC') \tag{2.107}$$

имел заданные корни (моды) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Эта задача называется *задачей модального управления*. Опишем ее решение [2.4] для скалярного управления.

В этом случае в (2.105) и (2.106) $B = b$, $C = c$, где b и c – n -мерные векторы.

Процедура построения модального управления.

1. Приведем уравнение (2.105) к форме Фробениуса

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{b}u, \tag{2.108}$$

где

$$\check{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \ldots & -d_{n-1} \end{array} \right\|, \quad \check{b} = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\|, \tag{2.109}$$

где d_0 , d_1 , ... d_{n-1} – коэффициенты характеристического уравнения объекта (2.105):

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0. \tag{2.110}$$

Переход от уравнения (2.105) к уравнению (2.108) осуществляется с помощью преобразования

$$x = \Psi_y^{-1}\check{x}, \tag{2.111}$$

где

$$\Psi_y = \left|\left|\check{b}, \check{A}\check{b}, \ldots, \check{A}^{n-1}\check{b}\right|\right| \ \left|\left|b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\right|\right|^{-1}. \tag{2.112}$$

Нетрудно видеть, что для полностью управляемого объекта (2.105)

$$\det \Psi_y \neq 0. \tag{2.113}$$

2. Из структуры матрицы $\check{A}$ следует, что уравнение (2.108), разрешенное относительно переменной $\check{x}_1$, имеет, после преобразования его по Лапласу, вид

$$d(s)\check{x}_1 = u. \tag{2.114}$$

Сравнивая это уравнение и заданный полином $D^*(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i^*) = s^n + d_{n-1}^* s^{n-1} + \ldots \ + d_1^* s + d_0^*$ получим

$$u(s) = -\left(\check{c}_n s^{n-1} + \ldots + \check{c}_2 s + \check{c}_1\right)\check{x}_1, \tag{2.115}$$

где

$$\check{c}_{(i+1)} = d_i^* - d_i \ \ (i = \overline{0, n-1}). \tag{2.116}$$

Принимая во внимание, что $s\check{x}_i = \check{x}_{i+1}$ $(i = 1, \overline{n-1})$ имеем

$$u = -\sum_{i=1}^{n} \check{c}_i \check{x}_i = -\check{c}'\check{x} \tag{2.117}$$

(где $\check{c}'$ – n -мерный вектор чисел).

3. Возвращаясь к прежним переменным, получим искомый вектор

$$\check{c}' = -\check{c}'\Psi_y \tag{2.118}$$

обеспечивающий заданные корни характеристического полинома системы (2.105), (2.106).

2.2.2 Модальное управление по выходу и множество стабилизирующих регуляторов

Рассмотрим теперь случай, когда переменные состояния объекта не доступны измерению, а измеряется переменная у.В этом случае будем использовать описание объекта в форме "вход - выход":

$$\left(s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0\right) y = \left(k_m s^m + \cdots + k_1 s + k_0\right) u. \tag{2.119}$$

и будем искать коэффициенты регулятора

$$(d_{p,n_p}s^{(n)}+d_{p,n_p-1}s^{(n-1)}+\cdots+d_{p,1}s+d_{p,0})u = (k_{p,m_p}s^{(m_p)}+\cdots+k_{p,1}s+k_{p,0})y, \tag{2.120}$$

так, чтобы характеристический полином системы (2.119), (2.120) имел заданные корни.

Для общности будем полагать, что число этих корней равно n_s и оно не обязательно совпадает с n .

Сформируем желаемый полином:

$$D^*(s) = \prod_{i=1}^{n_s}(s-\lambda_i^*) = s^{n_s} + d^*_{n_s-1}s^{n_s-1} + \cdots + d_1^* s + d_0^*. \tag{2.121}$$

Характеристический полином рассматриваемой системы

$$D(s) = d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s). \tag{2.122}$$

Сформируем *тождество Безу*:

$$d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s) = D^*(s). \tag{2.123}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в правой и левой частях этого тождества, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$N(d,\ k)\nu = d^*, \tag{2.124}$$

где $\nu = \left[d_{p,0},\ldots,d_{p,n_p},\ k_{p,0},\ldots,k_{p,m_p}\right]^T$ – $n_p + m_p + 2 = n_s$ - мерный вектор искомых коэффициентов регулятора (2.120), $d^* = \left[d_0^*, d_1^*, \ldots, d_{n_s}^*\right]^T$ – вектор коэффициентов желаемого полинома, $N(d,\ k)$ – квадратная матрица, составленная из известных коэффициентов объекта (2.119).

Известно, что

$$\det N(d,\ k) \neq 0, \tag{2.125}$$

если объект полностью управляем, а степени полиномов регулятора удовлетворяют одному из следующих двух условий

$$n_p < m, \quad m_p < n. \tag{2.126}$$

Пример. Рассмотрим случай $n = 2$, $m = 1$, $n_s = 3$.

В этом случае объект описывается уравнением

$$\left(s^2 + d_1 s + d_0\right) y = \left(k_1 s + k_0\right) u, \tag{2.127}$$

а желаемый полиномом имеет вид

$$D^*(s) = s^3 + d_2^* s^2 + d_1^* s + d_0^*. \tag{2.128}$$

Будем искать регулятор как

$$(d_{p1}s + d_{p0})u = (k_{p1}s + k_{p0})y.$$

Тождество Безу имеет вид

$$(s^2+d_1s+d_0)(d_{p1}s+d_{p0})-(k_1s+k_0)(k_{p1}s+k_{p0}) = s^3+d_2^*s^2+d_1^*s+d_0^*.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s , получим систему уравнений

$$\begin{matrix} d_0d_{p0} - k_0k_{p0} = d_0^*, & d_0d_{p_1} + d_1d_{p_0} - k_0k_{p_1} - k_1k_{p_0} = d_1^*, \\ d_1d_{p1} + d_{p0} - k_1k_{p1} = d_2^*, & d_{p1} = d_3^*. \end{matrix}.$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$N(d,\ k) = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & -k_0 & 0 \\ d_1 & d_0 & -k_1 & -k_0 \\ 1 & d_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \nu = \begin{bmatrix} d_{p_0} \\ d_{p_1} \\ k_{p_0} \\ k_{p_1} \end{bmatrix};\ d^* = \begin{bmatrix} d_0^* \\ d_1^* \\ d_2^* \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Все регуляторы, обеспечивающике устойчивость системы (2.119), (2.120) (стабилизирующие регуляторы) описываются передаточной функцией

$$w_p(s) = \frac{k_p(s)}{d_p(s)} = \frac{\tilde{k}_p^0(s) - \tilde{d}(s)\tilde{q}(s)}{\tilde{d}_p^0(s) - \tilde{k}(s)\tilde{q}(s)}, \tag{2.129}$$

где $\tilde{d}(s) = \dfrac{d(s)}{\psi^{(1)}(s)}$, $\tilde{k}(s) = \dfrac{k(s)}{\psi^{(1)}(s)}$, $\tilde{k}_p^0(s) = \dfrac{k_p^0(s)}{\psi^{(2)}(s)}$, $\tilde{d}_p^0(s) = \dfrac{d_p^0(s)}{\psi^{(2)}(s)}$, $\tilde{q}(s) = \dfrac{q(s)}{\psi^{(3)}(s)}$, $\psi^{(i)}(s)$ $(i = 1,2,3)$ – любые заданные гурвицевы полиномы (полиномы, все корни которых имеют отрицательные вещественные части) степеней n , $n{-}1$, n_q – соответственно, $q(s)$ – произвольный полином. Дробно-рациональные функции $\tilde{k}_p^0(s)$ и $\tilde{d}_p^0(s)$ находим из тождества

$$\tilde{d}(s)\tilde{d}_p^0(s) - \tilde{k}(s)\tilde{k}_p^0(s) = 1, \tag{2.130}$$

которое можно записать как

$$d(s)d_p^0(s) - k(s)k_p^0(s) = \psi^{(1)}(s)\psi^{(2)}(s), \tag{2.131}$$

и тогда передаточная функция (2.129) принимает вид

$$w_p(s) = \frac{k_p^0(s)\psi^{(1)}(s)\psi^{(3)}(s) - d(s)q(s)\psi^{(2)}(s)\psi^{(3)}(s)}{d_p^0(s)\psi^{(1)}(s)\psi^{(3)}(s) - k(s)q(s)\psi^{(2)}(s)\psi^{(3)}(s)} = \frac{k_p(s)}{d_p(s)}. \tag{2.132}$$

Выражения (2.129) и (2.132) описывают общий вид стабилизирующих регуляторов.

2.3 H_∞ -оптимизация

2.3.1 Одномерные системы.Спектральный метод

Постановка задачи

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$d(s)y = k(s)u + f, \tag{2.133}$$

$$d_p(s)u = k_p(s)y. \tag{2.134}$$

Передаточная функция, связывающая измеряемый выход $y(t)$ с внешним возмущением $f(t)$ имеет вид

$$t_{yf}(s) = \frac{d_p(s)}{d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)}. \tag{2.135}$$

Пусть внешнее возмущение является гармонической функцией

$$f(t) = a\sin\omega t, \quad 0 \le \omega \le \infty \tag{2.136}$$

с неизвестной частотой ω , которая может принимать значения от 0 до ∞ , a – заданное число.

В установившемся режиме (когда $t \to \infty$) выход системы имеет вид

$$y(t) = a_y(\omega)\sin(\omega t + \varphi_y(\omega)). \tag{2.137}$$

Максимальное значение амплитуды выхода

$$\sup_{0\le\omega\le\infty} |a_y(\omega)| = \sup_{0\le\omega\le\infty} |t_{yf}(j\omega)|. \tag{2.138}$$

Последняя величина называется H_∞ *нормой передаточной функции* $t_{yf}(s)$ и обозначается как

$$||t_{yf}(s)||_\infty = \sup_{0\le\omega\le\infty} |t_{yf}(j\omega)|. \tag{2.139}$$

Задача оптимизации состоит в том, чтобы найти полиномы регулятора (2.134), при которых H_∞ норма передаточной функции системы принимала наименьшее значение, или, другими словами, функционал

$$J = ||t_{yf}(s)||_\infty \tag{2.140}$$

принимал наименьшее значение. Приведем метод решения этой задачи.

Спектральный метод

Запишем общий вид (2.129) стабилизирующих регуляторов

$$w_p(s) = \frac{k_p(s)}{d_p(s)} = \frac{\tilde{k}_p^0(s) - \tilde{d}(s)\tilde{q}(s)}{\tilde{d}_p^0(s) - \tilde{k}(s)\tilde{q}(s)}, \tag{2.141}$$

где дробно-рациональные функции $\tilde{k}_p^0(s) = \dfrac{k_p^0(s)}{\psi^{(2)}(s)}$, $\tilde{d}_p^0(s) = \dfrac{d_p^0(s)}{\psi^{(2)}(s)}$ являются решением уравнения (2.130)

$$\tilde{d}(s)\tilde{d}_p^0(s) - \tilde{k}(s)\tilde{k}_p^0(s) = 1. \tag{2.142}$$

Передаточная функция системы с регулятором (2.141) имеет вид

$$t_{yf}(s) = \frac{d_p(s)}{d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)} = \frac{\dfrac{1}{\psi^{(1)}(s)}}{\tilde{d}(s) - \tilde{k}(s)w_p(s)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\psi^{(1)}(s)}}{\tilde{d}(s) - \tilde{k}(s)\dfrac{\tilde{k}_p^0(s) - \tilde{d}(s)\tilde{q}(s)}{\tilde{d}_p^0(s) - \tilde{k}(s)\tilde{q}(s)}} = \frac{\dfrac{1}{\psi(1)(s)}\left[\tilde{d}_p^0(s) - \tilde{k}(s)\tilde{q}(s)\right]}{1} =$$

$$= \tilde{\tilde{d}}_p^0(s) - \tilde{\tilde{k}}(s)\tilde{q}(s)\ , \tag{2.143}$$

где

$$\tilde{\tilde{d}}_p^0(s) = \frac{\tilde{d}_p^0(s)}{\psi^{(1)}(s)}, \quad \tilde{\tilde{k}}(s) = \frac{\tilde{k}(s)}{\psi^{(1)}(s)}. \tag{2.144}$$

Таким образом

$$||t_{yf}(s)|\,|_\infty = \left|\left|\tilde{\tilde{d}}_p^0(s) - \tilde{\tilde{k}}(s)\tilde{q}(s)\right|\right|_\infty = \sup_{0\le\omega\infty}\left|\tilde{\tilde{d}}_p^0(j\omega) - \tilde{\tilde{k}}(j\omega)\tilde{q}(j\omega)\right|, \tag{2.145}$$

и задача H_∞ оптимизации сведена к задаче определения дробно-рациональной функции $\tilde{q}(s)$ (с гурвицевым знаменателем) минимизирующей функционал

$$J = \sup_{0\le\omega\le\infty}\left|\tilde{\tilde{d}}_p^0(j\omega) - \tilde{\tilde{k}}(j\omega)\tilde{q}(j\omega)\right|. \tag{2.146}$$

Если такая функция найдена, то искомый регулятор находится по формуле (2.141).

Если объект (2.133) – минимально-фазовый ($k(s)$ – гурвицев полином), то очевидно, что искомая функция

$$\tilde{q}(s) = \frac{\tilde{d}_p^0(s)}{\tilde{k}(s)} \tag{2.147}$$

и при этом

$$||t_{yf}(s)|\,|_\infty = 0. \tag{2.148}$$

Если полином $k(s)$ имеет один положительный корень $s = s_T > 0$, то минимизирующая функция

$$\tilde{q}(s) = \frac{\tilde{d}_p^0(s) - \tilde{d}_p^0(s_T)}{\tilde{k}(s)} \tag{2.149}$$

Она имеет гурвицев полином в знаменателе так как положительный корень в полиномах $k(s)$ и $d_p^0(s) - d_p^0(s_T)$ сокращается.

В общем случае, когда число корней полинома $k(s)$ с положительной вещественной частью превышает 1, задача о минимуме функционала (2.146) решается [1.18] на основе теоремы Неванлина-Пика.

Заметим, что в сформулированной задаче H_∞ оптимизации не учитывалось ограничение на управление, и поэтому в случае, когда полином $k(s)$ – гурвицев, оптимальный регулятор имеет неограниченный коэффициент усиления.

Чтобы избежать этого, используется передаточная функция $t_{uf}(s)$, связывающее внешнее возмущение с выходом регулятора.

$$t_{uf}(s) = \frac{d(s)}{d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)}, \tag{2.150}$$

и функционал оптимизации принимает вид

$$J = \sup_{0\le\omega\le\infty}\left(|t_{yf}(j\omega)|^2 + |t_{uf}(j\omega)|^2\right) \tag{2.151}$$

Алгоритм решения задачи о минимуме функционала (2.151) приведен в [2.15].

2.3.2 Многомерные системы

Частотная передаточная матрица системы

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями (1.11), (1.12):

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Psi f, \ \ y = Dx + \chi, \ \ \theta = Nx, \tag{2.152}$$

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p y, \ \ u = D_p x_p + F_p y. \tag{2.153}$$

Пусть эта система асимптотически устойчива при $f = 0$ и $\chi = 0$.

Построим матрицу $T_{\theta\bar{f}}(s)$, связывающую вектор регулируемых переменных $\theta(t)$ с вектором возмущений $\bar{f}(t) = \left[f^T(t),\ \chi^T(t)\right]^T$, составленным из внешних воздействий и помех.

Уравнения объекта (2.152) можно записать как

$$\theta(s) = P_{11}(s)\bar{f} + P_{12}(s)u, \quad y = P_{21}(s)\bar{f} + P_{22}(s)u, \tag{2.154}$$

где

$$\begin{aligned} &P_{11}(s) = N\,(Es-A)^{-1}\,\bar{\Psi}, && P_{12}(s) = N\,(Es-A)^{-1}\,B, \\ &P_{21}(s) = \Big[D\,(Es-A)^{-1}\,\Psi,\ E_r\Big], && P_{22}(s) = D\,(Es-A)^{-1}\,B, \\ & && \bar{\Psi} = [\Psi,\ O_{n\times æ}] \end{aligned} \tag{2.155}$$

(квадратные скобки здесь означают объединение матриц: Ψ и нулевой матрицы размеров $n \times æ$ и матрицы $D\,(Es-A)^{-1}\,\Psi$ с единичной матрицей размеров $r \times r$).

Уравнение регулятора (2.153) запишем в виде

$$u = K(s)y \tag{2.156}$$

где $K(s) = D_p\,(Es-A_p)^{-1}\,B_p + F_p$.

Подставим в (2.156) выражение (2.154) для измеряемого вектора и получим
$u = K(s)P_{21}(s)\bar{f} + K(s)P_{22}(s)u$ или

$$u = T_{u\bar{f}}(s)\bar{f}, \tag{2.157}$$

где

$$T_{u\bar{f}}(s) = [E - K(s)P_{22}(s)]^{-1}\,K(s)P_{21}(s) \tag{2.158}$$

Используя (2.157) запишем выражение (2.154) для регулируемого вектора как

$$\theta(s) = T_{\theta\bar{f}}(s)\bar{f},$$

где искомая матрица $T_{\theta\bar{f}}(s)$ имеет вид

$$T_{\theta\bar{f}}(s) = P_{11}(s) + P_{12}\,[E - K(s)P_{22}(s)]^{-1}\,K(s)P_{21}(s) \tag{2.159}$$

Пусть $s = j\omega$, тогда $T_{\theta\bar{f}}(j\omega)$ – частотная передаточная матрица системы (2.152), (2.153)

Для выяснения физического смысла этой передаточной матрицы рассмотрим реакцию системы (2.152), (2.153) на гармоническое возмущение

$$\bar{f}(t) = \bar{f}^s \sin\omega^f t, \tag{2.160}$$

где f^s – заданный $\bar{\mu}$ -мерный вектор чисел $(\bar{\mu} = \mu + r)$, ω^f – частота возмущения.

В установившемся режиме $(t \to \infty)$ регулируемые переменные имеют вид

$$\theta_i(t) = a_i(\omega^f)\sin(\omega^f t + \varphi_i) \ \ (i = \overline{1,m}). \tag{2.161}$$

Найдем связь амплитуд $a_i(\omega^f)$ $(i = \overline{1,m})$ вынужденных колебаний с элементами матрицы $T_{\theta\bar{f}}(j\omega^f)$.

Учитывая, что $\sin\omega^f t = \dfrac{e^{j\omega^f t} - e^{-j\omega^f t}}{2j}$, обозначим реакции рассмативаемой системы на $e^{j\omega^f t}$ и $e^{-j\omega^f t}$ как

$$\theta^+ = T_{\theta\bar{f}}(j\omega^f)\bar{f}^s e^{j\omega^f t}, \quad \theta^- = T_{\theta\bar{f}}(-j\omega^f)\bar{f}^s e^{-j\omega^f t}. \tag{2.162}$$

Нетрудно показать, что $\theta(t) = \dfrac{\theta^+ - \theta^-}{2j}$.

Вводя вектор $q(\omega^f) + jp(\omega^f) = T_{\theta\bar{f}}(j\omega^f)\bar{f}^s$ запишем

$$\theta^+ = \left[q(\omega^f) + jp(\omega^f)\right]e^{j\omega^f t}, \quad \theta^- = \left[q(\omega^f) - jp(\omega^f)\right]e^{-j\omega^f t}. \tag{2.163}$$

Используя эти выражения, получим после несложных преобразований

$$\theta_i(t) = \sqrt{q_i^2(\omega^t) + p_i^2(\omega^t)}\,\sin(\omega^f t + \varphi_i) \ \ (i = \overline{1,m}).$$

и таким образом, амплитуды вынужденных колебаний (2.161) связаны с элементами частотной передаточной матрицы как

$$a_i(\omega^f) = \sqrt{q_i^2(\omega^f) + p_i^2(\omega^f)} \ \ (i = \overline{1,m}). \tag{2.164}$$

Заметим также, что из (2.163) и (2.164) следует

$$a_i^2(\omega^f) = \theta_i^+\theta_i^- \ \ (i = \overline{1,m}). \tag{2.165}$$

Понятие H_∞ -нормы частотной передаточной матрицы

Вначале рассмотрим заданную матрицу чисел T размеров $m\times\bar\mu$. Если эта матрица квадратная $(\bar\mu = m)$, то ее собственные числа $\lambda_i[T]$ $(i=\overline{1,m})$ находятся как корни полинома $d(s)=\det(Es-T)$. Если $(\bar\mu \neq m)$ (далее для простоты $(m \geq \bar\mu)$, то такой полином построить нельзя, и поэтому находят сингулярные числа $\sigma_i[T]$ $(i=\overline{1,\bar\mu})$, определяемые, в общем случае комплексной матрицы, как

$$\sigma_i[T] = \sqrt{\lambda_i[T^*T]} \ (i=\overline{1,\mu}). \tag{2.166}$$

где T^* – комплексно-сопряженная с T и транспонированная матрица. (Если $T=T_1+jT_2$, то $T^*=[T_1-jT_2]^T = T_1^T - jT_2^T$).

Пусть матрица T является функцией $j\omega$: $T(j\omega) = T_1(\omega) + jT_2(\omega)$, тогда сингулярные числа зависят от ω: $\sigma_i[T(j\omega)] = \sqrt{\lambda_i\left[T^T(-j\omega)T(j\omega)\right]}$ $(i=\overline{1,\mu})$

Возвращаясь к передаточной матрице системы, запишем

$$\sigma_i\left[T_{\theta\bar f}(j\omega)\right] = \sqrt{\lambda_i\left[T^T_{\theta\bar f}(-j\omega)T_{\theta\bar f}(j\omega)\right]} \ (i=\overline{1,\mu}) \tag{2.167}$$

Определение . H_∞ нормой передаточной матрицы $T_{\theta\bar f}(j\omega)$, обозначаемой как $\left\|T_{\theta\bar f}(j\omega)\right\|_\infty$, либо более просто как $\left\|T_{\theta\bar f}\right\|_\infty$, называется число

$$\left\|T_{\theta\bar f}(j\omega)\right\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\sup_{0\leq\omega\leq\infty}\left[\sigma_1\left[T_{\theta\bar f}(j\omega)\right],\ldots,\sigma_m\left[T_{\theta\bar f}(j\omega)\right]\right]. \tag{2.168}$$

Физический смысл этого числа заключается в следующем. Пусть система имеет скалярную регулируемую переменную $(m=1)$. В этом случае $\lambda_1\left(T_{\theta\bar f}(-j\omega)T_{\theta\bar f}(j\omega)\right) = \left|T_{\theta\bar f}(j\omega)\right|^2 = a_1^2(\omega)$, где $a_1(\omega)$ – амплитуда колебаний регулируемой переменной системы, возбужденной возмущением $\bar f_1 = 1\cdot\sin\omega t$, и H_∞ норма передаточной функции системы $\left\|T_{\theta\bar f}\right\|_\infty = \sup_{0\leq\omega\leq\infty}|a_1(\omega)|$ является установившемся максимальным значением амплитуды колебаний при различных значениях частоты ω.

В общем случае физический смысл H_∞ нормы раскрывается следующим ее свойством.

Свойство. Если система (2.152), (2.153) возбуждена гармоническим возмущением (2.160), то отношение суммы квадратов амплитуд

выхода и суммы квадратов амплитуд входа удовлетворяет неравенству

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^2(\omega^f)}{\sum\limits_{k=1}^{\bar\mu}(\bar f_k^s)^2} \leq \left\|T_{\theta f}(j\omega^f)\right\|_\infty \tag{2.169}$$

для всех частот возмущения $(0\leq\omega^f<\infty)$.

Вычисление H_∞ -нормы

Рассмотрим некую, асимптотически устойчивую (при $\tilde f = 0$) систему

$$\dot{\tilde x} = \tilde A\tilde x + \tilde\Psi\tilde f, \ \ \theta = \tilde N\tilde x. \tag{2.170}$$

Ее передаточная матрица

$$\tilde T(s) = \tilde N(Es-\tilde A)^{-1}\tilde\Psi. \tag{2.171}$$

Утверждение. H_∞ норма передаточной матрицы $\tilde T(s)$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|\tilde T\right\|_\infty < \gamma, \ \ (\gamma>0), \tag{2.172}$$

если и только если гамильтонова матрица

$$G = \begin{bmatrix} \tilde A & \gamma^{-2}\tilde\Psi\tilde\Psi^T \\ -\tilde N^T\tilde N & -\tilde A^T \end{bmatrix} \tag{2.173}$$

не имеет собственных чисел на мнимой оси: $\mathrm{Re}\lambda_i[G]=0$ $(i=\overline{1,2\tilde n})$.

Следствие. Чтобы найти минимальное значение $\gamma=\gamma_{\min}$ выбираем некоторое число $\gamma>0$ и проверяем, нет ли среди собственных чисел G чисто мнимых, если нет, то уменьшаем γ ,вновь вычисляем собственные числа матрицы G и так далее до тех пор, пока при некотором $\gamma_{\min}$ не приблизимся, с заданным допуском, к значению $\mathrm{Re}\,\lambda_i[G]=0$ $(i=\overline{1,2n})$, и тогда

$$\|T\|_\infty = \gamma_{\min}, \ \ (\gamma>0), \tag{2.174}$$

Таким образом, H_∞ норма может быть вычислена посредством иттеративной процедуры вычисления $\gamma_{\min}$ вместо нахождения максимумов функции $\sigma_i[T(j\omega)]$ $(i=\overline{1,n})$ для всех частот ω.

2.3.3 2–Риккати метод

Постановка задачи H_∞ оптимизации в многомерном случае

Рассмотрим объект (2.152), в котором внешние возмущения и помехи являются неизмеряемыми, неизвестными сигналами с ограниченной энергией. Последнее означает, что

$$\int_0^\infty \bar{f}^T(t)\bar{f}(t)\,dt < \infty. \tag{2.175}$$

В этом случае говорят также, что L_2 норма функции $\bar{f}(t)$ ограничена.

Введем также вектор $z = \left[\theta^T,\ u^T\right]^T$ и тогда передаточная матрица $T_{z\bar{f}}(s)$, связывающая вектора z и $\bar{f}$, имеет вид

$$T_{z\bar{f}}(s) = \left[T^T_{\theta\bar{f}}(s)\ T^T_{u\bar{f}}(s)\right]^T \tag{2.176}$$

Задача . Для заданного объекта (2.152) найти регулятор (2.153) такой, чтобы H_∞ норма передаточной матрицы $T_{z\bar{f}}(j\omega)$ этой системы принимала наименьшее значение

$$\left\|T_{z\bar{f}}\right\|_\infty = \min. \tag{2.177}$$

Отличие этой задачи от задач АКОР состоит прежде всего в том, что теперь $\bar{f}(t)$ – неизвестный, неизмеряемый вектор. В задаче АКОР внешние возмущения отсутствуют.

Неравенство (2.175) означает, что $\bar{f}(t)$ – исчезающая функция ($\lim\limits_{t\to\infty} \bar{f}(t) = 0$) . Однако она неизвестна. Это обстоятельство и более содержательный критерий оптимизации (в виде H_∞ нормы передаточной матрицы системы) делают эту задачу более трудной для ее решения, чем задача LQ –оптимизации. Однако, оказывается, что ее решение сводится к LQ -минимаксному управлению

Минимаксное управление по состоянию

Усложним задачу АКОР неизвестным возмущением с ограниченной энергией. Уравнение объекта (2.8) примет в этом случае вид

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Psi f. \tag{2.178}$$

Так как $f(t)$ неизвестная функция, то будем искать наихудшее возмущение в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T u - \gamma^2 f^T f\right)\,dt, \tag{2.179}$$

в котором γ – заданное число, а Q – заданая положительно - определенная матрица.

Задача минимаксного управления состоит в том, чтобы найти управление $u(t)$, которое минимизирует этот функционал и возмущение $f(t)$, максимизирующее его.

Искомое оптимальное управление имеет вид

$$u = C^T x,\ \ C^T = -B^T P, \tag{2.180}$$

а наихудшее возмущение

$$f = K_f x,\ \ K_f = \gamma^{-2}\Psi^T P, \tag{2.181}$$

где положительно-определеная матрица P является решением следующего уравнения Риккати

$$PA + A^T P - PBB^T P + \gamma^{-2} P\Psi\Psi^T P + Q = 0. \tag{2.182}$$

Вывод соотношений (2.180) – (2.182) повторяет вывод уравнений (2.22), (2.23).

При $\gamma \to \infty$ уравнение (2.182) совпадает с уравнением Риккати (2.22) процедуры АКОР.

Принципиальное различие этих уравнений Риккати состоит в том, что не для любого числа γ существует положительно- определенная матрица P , являющаяся решением уравнения (2.182). Существует некоторое минимальное число $\gamma = \gamma_{\min}$, при котором $P > 0$ и при $\gamma < \gamma_{\min}$ матрица P становится знакопеременной и поэтому для существования $P > 0$ число γ должно принадлежать интервалу $\gamma_{\min} \le \gamma \le \infty$.

Нетрудно показать, что система (2.178), (2.180), (2.181) асимптотически устойчива: матрица $A_c = A + BC^T + \Psi K_f$ – гурвицева (имеет собственые числа с отрицательными вещественными частями) и поэтому наихудшее возмущение – затухающая функция с ограниченной энергией.

Управление по выходу, обеспечивающее ограниченную H_∞ -норму

Рассмотрим регулятор, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_p = Ax_p + Bu + \Psi f_p + K(y - Dx_p), \quad f_p = K_f x_p \tag{2.183}$$

$$u = C^T x_p, \tag{2.184}$$

где

$$C^T = -B^T P, \quad K = \left(E - \gamma^{-2} P_e P\right) P_e D^T, \quad K_f = \gamma^{-2} \Psi^T P. \tag{2.185}$$

Утверждение Если при некотором γ существуют неотрицательно - определенные матрицы P и P_e , удовлетворяющие следующим уравнениям Риккати

$$PA + A^T P - PBB^T P + \gamma^{-2} P\Psi\Psi^T P + N^T N = 0, \tag{2.186}$$

$$AP_e + P_e A^T - P_e D^T D P_e + \gamma^{-2} P_e N^T N P_e + \Psi\Psi^T = 0 \tag{2.187}$$

и выполняется условие

$$\lambda_{\max}\left[PP_e\right] < \gamma^2, \tag{2.188}$$

где $\lambda_{\max}[M]$ – максимально собственное число матрицы M , то H_∞ норма передаточной матрицы системы (2.152), (2.183) – (2.185) удовлетворяет неравенству

$$\left\|T_{z\bar{f}}\right\|_\infty < \gamma. \tag{2.189}$$

Доказательство утверждения приведено в [2.18].

Если вектор состояния x объекта (2.152) измеряется , то регулятор описывается как

$$u = C^T x, \quad C^T = -B^T P, \tag{2.190}$$

где матрица $P \geq 0$ удовлетворяет уравнению (2.186), которое совпадает с уравнением для минимаксного управления (2.182).

Запишем уравнения регулятора (2.183) – (2.185) в форме уравнения (2.153). Исключая из (2.183) переменные u и f_p , описываемые уравнениями (2.183), (2.185), получим матрицы

$$A_p = A - BB^T P + \gamma^{-2} \Psi\Psi^T P - KD, \tag{2.191}$$

$$B_p = K, \quad D_p = -B^T P, \quad F_p = 0. \tag{2.192}$$

Пример Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_{11} u_1 + \psi_{11} f_1, \quad \dot{x}_2 = b_{21} u_1 + \psi_{21} f_1, \quad y_1 = x_1 + \chi_1 \quad \theta_1 = x_1, \tag{2.193}$$

$$\dot{x}_{p1} = a_{p11} x_1 + a_{p12} x_2 + b_{p11} y_1, \quad \dot{x}_2 = a_{p21} x_1 + a_{p22} x_2 + b_{p21} y_1, \tag{2.194}$$

$$u_1 = d_{p11} x_{p1} + d_{p12} x_2 + f_p y_1. \tag{2.195}$$

Передаточная матрица этой системы, состоящая из объекта (2.193) и регулятора (2.194), (2.195), $T_{z\bar{f}}(j\omega)$, связывающая вектор $z = [\theta_1,\ u_1]$ с вектором возмущения $\bar{f} = [f_1,\ \chi_1]$ является матрицей размеров 2×2 .

Задача состоит в том, чтобы для объекта (2.193) с известными коэффициентами найти коэффициенты регулятора (2.194), (2.195) такие, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|T_{z\bar{f}}\right\|_\infty < \gamma. \tag{2.196}$$

В соответствии с (2.183) – (2.185) решение этой задачи описывается соотношениями

$$\left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \end{matrix} \right\| = -\left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{21} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} k_{f11} & k_{f12} \end{matrix} \right\| = -\gamma^{-2} \left\| \begin{matrix} \psi_{11} & \psi_{21} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} k_{11} \\ k_{12} \end{matrix} \right\| = \left[\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| - \gamma^{-2} \left\| \begin{matrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{matrix} \right\| \right] \left\| \begin{matrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

в котором числа p_{ij} , p_{eij} $(ij = 1,2)$ являются решениями уравнения Риккати вида (2.186), (2.187).

Искомые коэффициенты находятся в соответствии с (2.190) как

$$A_p = \left[\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} b_{11}c_{11} & b_{11}c_{12} \\ b_{21}c_{11} & b_{21}c_{12} \end{matrix} \right\| - \gamma^{-2} \left\| \begin{matrix} \psi_{11}k_{f11} & \psi_{11}k_{f12} \\ \psi_{21}k_{f11} & \psi_{21}k_{f12} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} k_{11} & 0 \\ k_{12} & 0 \end{matrix} \right\| \right]$$

$$b_{p11} = k_{11};\ \ b_{p21} = k_{21};\ \ d_{p11} = c_{21};\ \ d_{12} = c_{12};\ \ f_1 = 0.$$

Сформулированное выше утверждение дает возможность построить оптимальное управление, решающее задачу путем нахождения наименьших значений γ на основе следующего алгоритма.

Процедура построения H_∞ оптимального управления

1.Задаться некоторым числом $\gamma = \gamma^{(0)}$.

2. Решить уравнение Риккати (2.186) и проверить неотрицательность матрицы P . Если $P \geq 0$, то переходим к следующей операции, в противном случае возвращаемся к операции 1 и увеличиваем γ .

3. Решаем уравнение Риккати (2.187) при $\gamma = \gamma^{(0)}$. Если $P_e \geq 0$, то переходим к следующей операции, в противном случае возвращаемся к операции 1 и полагаем $\gamma > \gamma^{(0)}$.

4. Проверяем выполнение условия (2.188). Если оно выполняется, то возвращаемся к операции 1 и уменьшаем γ $(\gamma < \gamma^{(0)})$. В противном случае возвращаемся к операции 2 и увеличиваем γ $(\gamma > \gamma^{(0)})$ и т.д.

Решение уравнения Риккати в операциях 2 и 3 осуществляется на основе метода диагонализации. Для этого строятся гамильтонианы

$$G_i = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}\Psi\Psi^T - BB^T \\ -N^T N & -A^T \end{bmatrix} \tag{2.197}$$

$$G_k = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}N^T N - D^T D \\ \Psi\Psi^T & -A \end{bmatrix} \tag{2.198}$$

и вычисляются их собственые числа.

2.3.4 Програмное обеспечение

Система ГАММА: директива 431 (H_∞ -субоптимальное управление).

Система MATLAB: m -функции hinf, linf, hinfopt.

2.4 l_1 – оптимизация

2.4.1 Постановка задачи и подход к ее решению

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$\begin{gathered} y(k) + \varphi_1 y(k-1) + \dots + \varphi_n y(k-n) = r_1 u(k-1) + \dots + r_n u(k-n) \\ +f(k), \quad k = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{2.199}$$

где $y(k)$ – измеряемый выход объекта, $f(k)$ – внешнее возмущение, являющееся неизвестной функцией, о которой известно лишь, что она ограничена известным числом f^* :

$$|f(k)| \leq f^*, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{2.200}$$

Цель управления $u(k)$ состоит в минимизации функционала (критерия)

$$J = \sup_{0 \leq k \leq \infty} |y(k)|. \tag{2.201}$$

Искомое управление формируется регулятором

$$\begin{gathered} u(k) + \varphi_{p,1} u(k-1) + \dots + \varphi_{p,n_p} u(k-n_p) = \\ r_{p,0} y(k-1) + \dots + r_{p,\mu_p} u(k-\mu_p), \quad k = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{2.202}$$

Запишем уравнения (2.199), (2.202) в виде

$$\varphi(\lambda) y = r(\lambda) u + f, \quad \varphi_p(\lambda) u = r_p(\lambda) y, \tag{2.203}$$

где λ – оператор сдвига назад $(y(k-1) = \lambda y(k)$.

Передаточная функция системы (2.203), связывающая ее выход y с внешним возмущением f записывается как

$$h(\lambda) = \frac{\varphi_p(s)}{\varphi(\lambda)\varphi_p(\lambda) - r(\lambda) r_p(\lambda)}. \tag{2.204}$$

Регулятор (2.202) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.203) и поэтому эту передаточную функцию можно представить как

$$h(\lambda) = h_0 + h_1 \lambda + h_2 \lambda^2 + \dots . \tag{2.205}$$

Процедура определения коэффициентов h_i $(i = 0, 1, \dots)$ из тождества

$$\frac{\varphi_p(s)}{\varphi(\lambda)\varphi_p(\lambda) - r(\lambda) r_p(\lambda)} = h_0 + h_1 \lambda + h_2 \lambda^2 + \dots \tag{2.206}$$

называется *операцией длинного деления.*

Используя выражение (2.205), получаем

$$y(k) = h_0 f(k) + h_1 f(k-1) + h_2 f(k-2) + \dots \quad k = 1, 2, \dots . \qquad (2.207)$$

Учитывая ограничение (2.200) заключаем, что

$$y(k) \le \sum_{i=0}^{\infty} |h_i||f(k-i)| \le f^* \sum_{i=0}^{\infty} |h_i|. \qquad (2.208)$$

Это означает, что минимизируя функционал

$$J_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |h_i|, \qquad (2.209)$$

минимизируется критерий (2.199).

Таким образом, задача определения коэффициентов регулятора (2.200) из условия минимума функционала (2.201) сведена к определению этих коэффициентов, минимизирующих функционал (2.209). Функционал (2.209) называется l_1 нормой функции (2.205), и поэтому минимизация (2.209) называется l_1 -оптимизацией.

2.4.2 Минимально-фазовый объект

Если модули корней λ_i $(i = 1, n-1)$ полинома $\lambda^{-1} r(\lambda)$ больше 1 $(|\lambda_i| > 1, \ \ i = \overline{1, n-1})$, то решение задачи о минимуме функционала (2.201) достаточно просто и оно может быть осуществлено без использования l_1 -оптимизации.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда $r_1 = 1$, $r_2 = \dots r_n = 0$.

В этом случае уравнение (2.199) имеет вид

$$y(k) + \varphi_1 y(k-1) + \dots + \varphi_n y(k-n) = u(k-1) + f(k), \quad k = 1, 2, \dots . \qquad (2.210)$$

Если принять управление

$$u(k) = \varphi_1 y(k) + \dots + \varphi_n y(k-n+1), \quad k = 1, 2, \dots , \qquad (2.211)$$

то, подставляя его в (2.208), получим

$$y(k) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots . \qquad (2.212)$$

Это означает, что

$$|y(k)| \le |f(k)| \le f^*, \quad k = 1, 2, \dots . \qquad (2.213)$$

Этот результат не может быть улучшен. $\varepsilon(k) =$

Аналогичное простое решение имеет место для общего случая $r(\lambda)$. Искомое управление имеет вид

$$r_1 u(k) + \dots + r_n u(k-n+1) = \varphi_1 y(k) + \dots + \varphi_n y(k-n+1). \quad (2.214)$$

2.4.3 Неминимально-фазовый объект

Рассмотрим множество стабилизирующих регуляторов, описываемых передаточной функцией (2.129):

$$w_p(\lambda) = \frac{r_p^0(\lambda) - \varphi(\lambda)\tilde{q}(\lambda)}{\varphi_p^0(\lambda) - r(\lambda)\tilde{q}(\lambda)}, \qquad (2.215)$$

где $r_p^0(\lambda)$ и $\varphi_p^0(\lambda)$ – полиномы минимальной степени, и находятся они как решение тождества Безу

$$\varphi(\lambda)\varphi_p(\lambda) - r(\lambda) r_p(\lambda) = 1, \qquad (2.216)$$

а $\tilde{q}(\lambda) = \dfrac{q(\lambda)}{\psi(\lambda)}$, где $q(\lambda)$ – произвольный полином, $\psi(\lambda)$ – любой гурвицев полином (полином, чьи модули корней больше 1) – корни вне единичного круга. При условиях (2.215), (2.216) передаточная функция (2.204) принимает вид

$$h(\lambda) = \varphi_p^0(\lambda) - r(\lambda)\tilde{q}(\lambda). \qquad (2.217)$$

Пусть полином $r(\lambda)$ не имеет корней: $|\lambda_i| = 1$, $i \in \overline{1, n}$. Тогда его можно представить в виде

$$r(\lambda) = r^+(\lambda) r^-(\lambda), \qquad (2.218)$$

где $r^+(\lambda)$ – полином с корнями $r(\lambda)$, лежащими вне единичного круга, $r^-(\lambda)$ – полином с корнями $r(\lambda)$, лежащими внутри единичного круга.

Сформируем дробно-рациональную функцию

$$p(\lambda) = \tilde{q}(\lambda) r^+(\lambda). \qquad (2.219)$$

Так как корни знаменателей этой функции лежат вне единичного круга, то ее можно представить как

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \dots . \tag{2.220}$$

Передаточная функция (2.217) теперь принимает вид

$$h(\lambda) = \varphi_p^0(\lambda) - p(\lambda)r^-(\lambda), \tag{2.221}$$

или более подробно

$$\begin{array}{l} h(\lambda) = \varphi_{p,0}^0 + \varphi_{p,1}^0\lambda + \varphi_{p,2}^0\lambda^2 + \dots + \varphi_{p,n}^0\lambda^n \times \\ -(p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \dots)(r_0^- + r_1^-\lambda + r_2^-\lambda^2 + \dots + r_m^-\lambda^n) = \\ = \varphi_{p,0}^0 + \varphi_{p,1}^0\lambda + \varphi_{p,2}^0\lambda^2 + \dots + \varphi_{p,n}^0\lambda^n \\ - \left[r_0^- p_0 + (r_1^- p_0 + r_0^- p_1)\lambda + (r_2^- p_0 + r_1^- p_1 + r_0^- p_2)\lambda^2 + \dots\right] \end{array} . \tag{2.222}$$

Из этого равенства следует, что компоненты h_i $(i = \overline{0,\infty}$ бесконечномерного вектора $h = [h_0, h_1, \dots]$ связаны с компонентами p_i $(i = \overline{0,\infty}$ вектора $p = [p_0, p_1, \dots]$ уравнением

$$h_i = \varphi_{p,i}^0(\lambda) - M_{[i]}p, \tag{2.223}$$

где $M_{[i]}$ $(i = \overline{0,\infty})$ – i -тая строка-матрица

$$\begin{bmatrix} r_0^- & 0 & \dots & 0 & \dots \\ r_1^- & r_0^- & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \\ r_m^- & r_{m-1}^- & \dots & r_1^- & \dots \\ 0 & r_m^- & \dots & r_2^- & \dots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} . \tag{2.224}$$

Эта матрица имеет бесконечное число строк и столбцов.

Функционал (2.209) принимает вид

$$J_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \left|\varphi_{P,i}^0 - M_{[i]}p\right| , \tag{2.225}$$

где $\varphi_{p,i}^0$ $(i = 0, n)$ и матрица M известны, и этот функционал минимизируется вектором p .

Рассмотрим конечно-мерный вариант этой задачи $(i = \overline{1,N})$, где p – N -мерный вектор, а $M_{[i]}$ – первые $N+1$ элементы i -той строки матрицы M .

Тогда $\min \sum_{i=0}^{N} \left|\varphi_{p,i}^0 - M_{[i]}p\right|$ находится с помощью метода линейного программирования, который решает задачу

$$\min \sum_{i=0}^{N} a_i, \tag{2.226}$$

где $-a_i \le \varphi_{p,i}^0 - M_{[i]}p \le a_i$.

Пусть задача линейного программирования решена для некоторого N и получен вектор p^N . Обозначим J_1^N значение функционала $J_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \left|\varphi_{p,i}^0 - M_{[i]}p\right|$ при $p = p^N$. Ясно, что $J^i \ge J^{i+1}$ для любого i . Однако, существует такое N , что $J^i \ge J^N$ для всех i . Это означает, что минимизация функционала (2.225) достигается на конечно-мерном векторе p^N .

Подитожим изложенное.

Процедура l_1 -оптимизации

1. Решим полиномолиальное уравнение (2.216) и найдем полиномы $\varphi_p^0(\lambda)$ и $r_p^0(\lambda)$.

2. Представим полином $r(\lambda)$ в виде (2.218).

3. Решим задачу линейного программирования (2.227) и для достаточно большого N и убедимся, что ее решение $p^N = \left[p_0^N, p_1^N, \dots, p_N^N\right]$ не изменяется при увеличении N .

4. Построим полином

$$p^N(\lambda) = p_0^N, p_1^N\lambda, \dots, p_N^N\lambda^N$$

и сформируем дробно-рациональную функцию

$$\tilde{q}(\lambda) = \frac{p^N(\lambda)}{r^+(\lambda)}. \tag{2.227}$$

5. Передаточная функция оптимального регулятора:

$$w_p(\lambda) = \frac{r_p^0(\lambda) + \varphi(\lambda)\tilde{q}(\lambda)}{\varphi_p^0(\lambda) - r(\lambda)\tilde{q}(\lambda)}. \tag{2.228}$$

2.5 Комментарии

LQ –**оптимизация и АКОР**.

Развитие систем управления, ужесточение требований к их точности при ограниченных габаритах и ресурсах привело в 40-50-х годах к использованию вариационного исчисления для построения оптимальных систем управления. Вначале использовались методы классического вариационного исчисления (к классическим методам относятся методы, основанные на уравнениях Эйлера, Лагранжа, Якоби, Вейерштрасса), однако, вскоре стало ясно, что для построения систем новой техники (в частности, систем запуска ракет [2.23]), систем, оптимальных по быстродействию [2.24], и т. п., необходимо дальнейшее развитие вариационного исчисления. Дело в том, что из-за ограничений на управления (например, ограниченным количеством топлива ракеты, наличием упоров рулей управления и т. п.) оптимальные управления оказались кусочно-непрерывными функциями с точками разрыва первого рода, число которых неизвестно. Это противоречило предположению классического вариационного исчисления о непрерывности экстремалей.

В связи с этим появилось современное вариационное исчисление, основными результатами которого стали принцип максимума Л,С.Понтрягина [2.25] и метод динамического программирования Р.Беллмана [2.21]. Они несут большой объем информации о структуре оптимального управления, однако, процесс его построения сводится, как и в классическом вариационном исчислении, к решению краевой задачи для дифференциальных уравнений (обыкновенных-в принципе максимума Л,С.Понтрягина, и в частных производных-в методе динамического программирования Р.Беллмана).

Это обстоятельство побудило к отысканию классов объектов, для которых краевая задача легко решается численно. Такими объектами оказались объекты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями. Метод оптимизации для них был разработан в 1960 г. независимо А.М.Летовым [2.4] и Р.Калманом [2.5].

А.М.Летов дал этому методу название Аналитическое КОнструирование Регуляторов (АКОР). Одним из поводов для такого названия явилось следующее. В то время наиболее распространенным методом синтеза (конструирования) был метод ЛАЧХ. Этот метод, который и сегодня играет важную роль в проектировании систем автоматического управления, является графо-аналитическим методом проб и ошибок и поэтому свойства системы часто зависят от интуиции и опыта инженера-проектировщика. В связи с этим назрела потребность в методе синтеза, который позволял находить коэффициенты регулятора по формулам (аналитически) так, чтобы исходным данным соответствовал один набор коэффициентов регулятора. АКОР отвечал этому требованию (коэффициенты регулятора однозначно определяются матрицами A , B и Q).

Несмотря на это, название АКОР вызвало недоумение. Во-первых, конструирование (синтез) регуляторов исходит из векторного критерия (требования к установившимся ошибкам, времени регулирования, перерегулированию и т.д.), а критерий в АКОР -скаляр. Во-вторых, было показано [2.22], что любая, сколь угодно "плохая"по этому векторному критерию, система является оптимальной в смысле некоторого квадратичного функционала . А.М.Летов пояснял [1.17] свою позицию следующим образом: в задаче АКОР функционал фигурирует как постулат и задача окажется практически полезной, если удачно будет выбран этот функционал. При этом он добавлял известное высказывание Бертрана Рассела о том, что метод постулирования имеет много преимуществ, совпадающими с теми, которые присущи воровству по сравнению с честным трудом.

В связи с этим А.М.Летов формулирует проблему выбора оптимизирующего функционала. При этом рассматриваются функционалы, являющиеся определенными интегралами функции общего вида (а не только квадратичные формы), а уравнения объекта- нелинейны. Проблема выбора состоит в том, чтобы среди подинтегральных функций из заданного множества указать те, для которых задача АКОР разрешима и удовлетворяются требования к времени регулирования, перерегулированию, монотонности и т.п. либо к части из этих критериев. Эта проблема решается в последующих двух главах для квадратичного функционала и линейных объектов.

АКОР, благодаря ясной постановке задачи и завершенным результатам, явилась источником большого числа публикаций по синтезу регуляторов для различных классов объектов (дискретных [2.12], [2.13], с запаздыванием, нелинейных [2.11]), в которых при решении задачи об оптимальной стабилизации были преодолены трудности решения краевой задачи метода динамического программирования.

H_∞ **-оптимизация**.

Использование H_∞ нормы передаточной матрицы системы связано с работой Дж. Зеймса [2.16]. Задача ее минимизации была вначале решена [2.17] на основе методов теории функций комплексного переменного (теорема Нехари,интерполяция Неванлины-Пика). Изложенное в п.2.3.1 следует книге [1.18].Позже был предложен [2.18] метод построения H_∞ -субоптимального управления , называемый 2-Риккати подходом, описанный в п.2.3.3.

Рассмотрим содержательный смысл H_∞ нормы.

Для одномерных систем она имеет ясный физический смысл, который следует из выражений (2.139) и (2.140): максимум амплитуды выхода системы при гармоническом внешнем возмущении.

В многомерном случае этот смысл не сохраняется и эта норма выражаются через сингулярные числа передаточной матрицы, которые не имеют явной связи с амплитудами выходов системы. Задача H_∞ -оптимизации интерпретируется как хорошо известная минимаксная задача с функционалом (2.179) и, как и при LQ –оптимизации, возникает проблема выбора его коэффициентов для решения задачи А синтеза регулятора.

Вместе с этим, H_∞ -оптимизация одномерных систем на основе спектрального метода имеет важное значение так как позволяет найти наивысшую точность, которая может быть достигнута для заданного объекта при гармоническом внешнем возмущении. При этом система может быть негрубой, управление неограниченным, а время регулирования сколь угодно велико.

l_1 **-оптимизация**.

Метод l_1 -оптимизации был разработан в [2.19] , [2.20]. Изложенное в п.2.4 следует книге [1.18], где имеются более подробная библиография относящаяся к этому методу.

l_1 -оптимизация имеет важное значение так как позволяет найти наивысшую точность, которая может быть достигнута для заданного объекта при произвольном ограниченном внешнем возмущении. При этом система может быть негрубой, управление неограниченным, а время регулирования сколь угодно велико.

2.6 Приложение. Метод динамического программирования

В пятидесятых годах наряду с задачами оптимального управления в технике возникли задачи об оптимальном управлении в экономике, управлении войсками и т.д. (задачи об управлении запасами, ресурсами, составление расписаний, организация тыла). Они не допускали эффективного численного решения на основе существующих методов. Это привлекло внимание математиков к этим задачам. При этом

обнаружилось, что процесс решения многих из них может быть представлен как некоторый многоплановый процесс принятия решений. Эта концепция получила название *метода динамического программирования*, что означает принятие решений во времени.

Основу метода динамического программирования, разработанного американским математиком Р. Беллманом [2.21], составляет *принцип оптимальности*, используя который выводят функциональное уравнение метода. Решение этого уравнения приводит к синтезу оптимального управления.

2.6.1 Принцип оптимальности

Рассмотрим задачу об оптимальном управлении. Пусть дан объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{x} = \varphi(x,\ u,\ t). \tag{2.229}$$

Требуется найти закон управления

$$u = r(x,\ t), \tag{2.230}$$

чтобы на движениях системы (2.229), (2.230), возбужденных произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x,\ u,\ t)\, dt. \tag{2.231}$$

При этом на управления (2.230) наложены ограничения $u \in U$. Для определенности часто будем полагать, что

$$-u_k^* \le u_k(t) \le u_k^*, \tag{2.232}$$

где u_k^* $(k = \overline{1,m})$ – заданные числа.

Отметим, что эта задача является вариационной задачей со свободным правым концом и фиксированным t_1.

Для простоты изложения принципа оптимальности ограничимся частным случаем этой задачи, когда $n = 2$, а $m = 1$. В этом случае уравнения (2.229) и (2.230) примут вид:

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1,\ x_2,\ u,\ t);\ \ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1,\ x_2,\ u,\ t); \tag{2.233}$$

$$u = r(x_1,\ x_2,\ t), \tag{2.234}$$

а функционал (2.231) запишется, если опустить для простоты t в φ_0, как

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1,\ x_2,\ u)\,dt. \tag{2.235}$$

Переходя к принципу оптимальности, допустим, что оптимальное управление (2.230) найдено. Этому управлению соответствует оптимальная траектория $x_1(t)$, $x_2(t)$, которую можно вычислить, подставляя в уравнения (2.229) функцию (2.230) и интегрируя (2.229) при некотором начальном условии $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$. Эта траектория приведена на рис. 2.3.1.

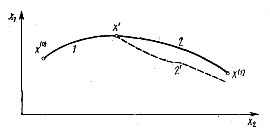

Рис. 2.3.1.

Отметим какую-либо точку x' на оптимальной траектории и назовем участок между точкой $x^{(0)} = \{x_1(t_0),\ x_2(t_0)\}$ и точкой $x' = \{x_1(t'),\ x_2(t')\}$ первым (траектория 1), а участок между точками $x' = \{x_1(t'),\ x_2(t')\}$ и $x^{(1)} = \{x_1(t_1),\ x_2(t_2)\}$ назовем вторым участком траектории (траектория 2).

Принцип оптимальности: независимо от того, каким путем система (2.233) достигла в момент времени t' точки $\{x_1(t'),\ x_2(t')\}$, ее оптимальным последующим движением будет траектория 2.

Другими словами, второй участок оптимальной траектории является оптимальной траекторией. Это означает, что если система, начав движение из точки $x^{(0)}$, оказалась в момент времени t' в

точке x', то оптимальное движение из этой точки будет совпадать с траекторией 2.

Обоснование принципа почти очевидно. Действительно, пусть движение из точки x' продолжается не по траектории 2, а по траектории $2'$ и при этом движении функционал

$$J = \int\limits_{t'}^{t_1} \varphi_0(x_1,\ x_2,\ u)\,dt.$$

принимает меньшее значение, чем на траектории 2. Тогда значение функционала (2.235) на траектории $1 - 2'$ будет меньшим, чем на траектории $1 - 2$. Это противоречит предположению об оптимальности u.

2.6.2 Функциональное уравнение метода динамического программирования

Несмотря на почти очевидный, эвристический характер принципа оптимальности, он имеет своим следствием далеко не очевидное функциональное уравнение. Переходя к его выводу, введем обозначения для значений функционала на оптимальных траекториях:

$$\upsilon[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ t_0] = \min_{|u(t)|\le u^*} \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_0[x_1(t),\ x_2(t),\ u(t)]\,dt;$$

$$\upsilon[x_1(t'),\ x_2(t'),\ t_0'] = \min_{|u(t)|\le u^*} \int\limits_{t'}^{t_1} \varphi_0[x_1(t),\ x_2(t),\ u(t)]\,dt;$$

Представим (полагая $t' = t_0 + \tau$; τ – достаточно малое число) функционал (2.235) в форме

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \varphi_0[x_1(t),\ x_2(t),\ u(t)]\,dt + \int\limits_{t_0+\tau}^{t_1} \varphi_0[x_1(t),\ x_2(t),\ u(t)]\,dt.$$

Допустим, что оптимальное управление на втором участке известно. Значение, которое принимает функционал оптимизации при движении по этому участку, определяется выражением $\upsilon[x_1(t'),\ x_2(t')]$.

На основе принципа оптимальности можно записать функциональное уравнение

$$v[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ t_0] =$$
$$\min_{|u(t_0)|\le u^*}\left\{\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\varphi_0[x_1(t),\ x_2(t),\ u(t)]\,dt + v[x_1(t_0+\tau),\ x_2(t_0+\tau),\ t_0+\tau]\right\}.$$

Учитывая малость τ, получим

$$v[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ t_0] = \min_{|u(t_0)|\le u^*}\{\varphi_0[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0)]\tau +$$
$$v[x_1(t_0+\tau),\ x_2(t_0+\tau),\ t_0+\tau]\}\,. \tag{2.236}$$

Минимизируя выражение в фигурных скобках по $u(t_0)$, получим оптимальное управление на первом участке. Однако в этом выражении функция v неизвестна. В связи с этим преобразуем (2.236).

Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$x_i(t_0+\tau) = x_i(t_0) + \tfrac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_{t=t_0}\tau + o_{1i}(\tau) =$$
$$x_i(t_0) + \varphi_i[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0),\ t_0]\tau + o_{1i}(\tau)\ \ (i=\overline{1,2}).$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{o_{1i}(\varphi)}{\tau}\longrightarrow 0;$$

$$v[x_1(t_0+\tau),\ x_2(t_0+\tau),\ t_0+\tau] = v\{x_1(t_0)+$$
$$\varphi_1[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0),\ t_0]\tau + o_{1i}(\tau),\ x_2(t_0)+$$

$$+\varphi_2[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0),\ t_0]\tau + o_{12}(\tau),\ t_0+\tau\} =$$
$$v[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ t_0]+$$

$$+\frac{\partial v}{\partial x_1}\Bigg|_{\substack{t=t_0\\ x_1=x_1(t_0)\\ x_2=x_2(t_0)}}\varphi_1[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0),\ t_0]\tau+$$
$$+\frac{\partial v}{\partial x_2}\Bigg|_{\substack{t=t_0\\ x_1=x_1(t_0)\\ x_2=x_2(t_0)}}\varphi_2[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0),\ t_0]\tau + \frac{\partial v}{\partial t}\Bigg|_{\substack{t=t_0\\ x_1=x_1(t_0)\\ x_2=x_2(t_0)}}\tau + o_3(\tau),$$

где $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{o_3(\tau)}{\tau}\longrightarrow 0$. Подставляя эти выражения в (2.236), получим

$$v[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ t_0] = \min_{|u(t_0)|\le u^*}\{\varphi_0[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0)]\tau + v[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ t_0]+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Bigg|_{\substack{x_i=x_i(t_0)\\ t=t_0}}\varphi_i[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0),\ t_0]\tau + \frac{\partial v}{\partial t}\Bigg|_{\substack{t=t_0\\ x_1=x_1(t_0)\\ x_2=x_2(t_0)}}\tau + o_3(\tau)\Bigg\}.$$

Сокращая $v[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ t_0]$ в обеих частях равенства и поделив результат на τ, получим при $\tau\to\infty$

$$-\frac{\partial v}{\partial t}\Bigg|_{\substack{t=t_0\\ x_1=x_1(t_0)\\ x_2=x_2(t_0)}} = \min_{|u(t_0)|\le u^*}\Bigg\{\varphi_0[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Bigg|_{\substack{t=t_0\\ x_1=x_1(t_0)\\ x_2=x_2(t_0)}}\varphi_i[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0),\ t_0]\Bigg\}.$$

Учитывая, что полученный результат справедлив для любых $x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ t_0$, опустим индекс "0"и запишем

$$-\frac{\partial v[x_1(t),\ x_2(t),\ t]}{\partial t} =$$

$$= \min_{|u(t_0)|\le u^*}\left\{\varphi_0[x_1(t),\ x_2(t),\ u] + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v[x_1(t),\ x_2(t),\ t]}{\partial x_i}\varphi_i[x_1(t),\ x_2(t),\ u,\ t]\right\}. \tag{2.237}$$

В общем случае, когда $n>2$, $m>1$, это уравнение имеет вид

$$-\frac{\partial v[x_1,\ldots,x_n,\ t]}{\partial t} =$$
$$\min_{u_1,u_2,\ldots,u_n\in U}\{\varphi_0[x_1,\ldots,x_n,\ u_1,\ldots,u_m,t]+ \tag{2.238}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v[x_1,\ldots,x_n,\ t]}{\partial x_i}\ \varphi_i[x_1,\ldots,x_n,\ u_1,\ldots,u_m,t]\}\,.$$

Если известно, что оптимальные управления находятся внутри множества U, либо если ограничения подобного рода вообще отсутствуют, то уравнение (2.238) можно представить как совокупность уравнений в частных производных:

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \varphi_0[x_1,\dots,x_n,\ u_1,\dots,u_m] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \varphi_i[x_1,\dots,x_n,\ u_1,\dots,u_m,\ t]; \tag{2.239}$$

$$\frac{\partial \varphi_0[x_1,\dots,x_n,\ u_1,\dots,u_m]}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i[x_1,\dots,x_n,\ u_1,\dots,u_m,\ t]}{\partial u_k} = 0\ (k = \overline{1,m}). \tag{2.240}$$

Таким образом, для решения задачи об оптимальной стабилизации необходимо решить, при краевых условиях

$$\upsilon[x_1(t_1),\dots,x_n(t_1),t_1] = 0, \tag{2.241}$$

специфическое уравнение в частных производных (2.238) либо систему из $m+1$ уравнений в частных производных (2.239), (2.240). В результате решения этих уравнений получим искомые оптимальные управления $u_k = u_k(x_1,\dots,x_n,t)$, где $(k=\overline{1,m})$, и функцию $\upsilon(x_1,\dots,x_n,t)$, которая при $x_i = x_{i0}$, $t = t_0$ является наименьшим значением функционала оптимизации

$$\upsilon(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0},t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m)\, dt, \tag{2.242}$$

если выполняются краевые условия (2.241). Действительно, пусть оптимальные управления определены. Тогда, вдоль оптимальных траекторий и управлений, уравнение (2.238) примет вид

$$-\frac{\partial \upsilon(x_1,\dots,x_n,t)}{\partial t} = \varphi_0(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon(x_1,\dots,x_n,t)}{\partial x_i} \varphi_i(x_1,\dots,x_n,\ u_1,\dots,u_m,\ t)$$

или

$$\frac{\partial \upsilon(x_1,\dots,x_n,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon(x_1,\dots,x_n,t)}{\partial x_i} \varphi_i(x_1,\dots,x_n,\ u_1,\dots,u_m,\ t) = -\varphi_0(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m). \tag{2.243}$$

Очевидно, что это уравнение можно записать в более компактной форме

$$\frac{d\upsilon(x_1,\dots,x_n,t)}{dt} = -\varphi_0(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m). \tag{2.244}$$

Интегрируя его в пределах от t_0 до t_1, заключаем, что

$$\upsilon[x_1(t_1),\dots,x_n(t_1),t_1] = -\int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m)\, dt. \tag{2.245}$$

Учитывая краевые условия (2.241), получим (2.242).

При $t \to \infty$ на оптимальные управления накладывается дополнительное требование асимптотической устойчивости. Если функции $\varphi_0 > 0$ и $\upsilon[x_1,\dots,x_n]$ для всех $x_1,\dots,x_n$, то система (2.229), (2.230) асимптотически устойчива.

Действительно, уравнение (2.243) является уравнением второго метода А. М. Ляпунова и поэтому для асимптотической устойчивости оптимальной системы достаточно положительно - определенной функции $\upsilon(x_1,\dots,x_n)$, полная производная которой в силу дифференциальных уравнений (2.229) отрицательно-определенна.

Таким образом, если $\varphi_0(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m) > 0$ и $t_1 \to \infty$, то функция $\upsilon(x_1,\dots,x_n,\ u_1,\dots,u_m,\ t)$ в уравнениях метода динамического программирования оказывается функцией Ляпунова, поэтому этот метод иногда называют *методом Ляпунова - Беллмана.* Заметим также, что для асимптотически устойчивой оптимальной системы краевое условие (2.241) выполняется автоматически.

Отметим в заключение, что если функционал оптимизации (2.231) имеет более общий вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m,\ t)\, dt + \nu_0[x_1(t_1),\dots,x_n(t_1),\ t_1], \tag{2.246}$$

то краевое условие (2.241) записывается как

$$\upsilon[x_1(t_1),\dots,x_n(t_1),\ t_1] = \nu_0[x_1(t_1),\dots,x_n(t_1),\ t_1]. \tag{2.247}$$

3 Аналитический синтез регуляторов по состоянию

Рассматривается частный случай задачи синтеза, когда переменные состояния объекта доступны для измерения.

Для синтеза регулятора используются методы LQ и H_∞ – оптимизации. Для их применения необходимо решить следующие вопросы:

1. Каковы должны быть структура и коэффициенты функционалов оптимизации, при которых оптимальный регулятор обеспечивает запасы устойчивости системы (обеспечивает грубость системы)?

2. При каких значениях этих коэффициентов выполняются требования к границам установившихся ошибок регулирования и времени регулирования?

В первой части главы дается (путем исследования частотных свойств оптимальных систем) ответ на первый вопрос и получены структуры функционала при которых оптимальная система будет грубой.

Во второй части главы получены выражения для его коэффициентов, которые обеспечивают установившиеся ошибки меньше допустимых (заданных).

3.1 Частотные свойства оптимальных систем

3.1.1 Условие оптимальности в частотной форме

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.1}$$

$$u = C'x, \tag{3.2}$$

оптимальную в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + u'u)\, dt, \tag{3.3}$$

в котором Q – положительно-определенная матрица. Оптимальность системы (3.1), (3.2) означает, что матрица

$$C = -PB, \tag{3.4}$$

где определенно-положительная матрица P является решением алгебраического уравнения Риккати:

$$PA + A'P - PBB'P + Q = 0, \tag{3.5}$$

в котором A , B и Q – заданные матрицы.

Преобразуя (3.1), (3.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, запишем передаточную матрицу этой системы

$$W(s) = -C'(Es - A)^{-1}B. \tag{3.6}$$

Прибавим и вычтем из левой части (3.5) произведение sP и умножим полученное равенство слева на $B'(Es - A)^{-1}$, а справа на $(Es - A)^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned} &B'(-Es - A)^{-1'}[-PA + Ps - A'P - sP + PBB'P - Q](Es - A)^{-1}B = \\ &= B'(-Es - A)^{-1'}PB + B'P(Es - A)^{-1}B + \\ &B'(-Es - A)^{-1'}PBB'P(Es - A)^{-1}B - \\ &-B'(-Es - A)^{-1'}Q(Es - A)^{-1}B = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Вводя обозначение $H(s) = H(Es - A)^{-1}B$, где $H'H = Q$, и учитывая (3.4), запишем (3.7) в виде

$$-B'(Es-A)^{-1'}C - C'(Es-A)^{-1}B + B'(-Es-A)^{-1'}CC'(Es-A)^{-1}B =$$

$$= H'(-s)H(s).$$

Прибавляя к обеим частям единичную матрицу и учитывая выражение (3.6) для передаточной матрицы системы, запишем

$$[E_m + W(-s)'][E_m + W(s)] = E_m + H'(-s)H(s). \tag{3.8}$$

Полагая $s = j\omega$, получим *условие оптимальности в частотной форме*

$$[E_m + W(-j\omega)]'[E_m + W(j\omega)] = E_m + H'(-j\omega)H(j\omega). \tag{3.9}$$

Это условие выполняется для всех вещественных ω и связывает частотную передаточную матрицу $W(j\omega)$ оптимальной системы с параметрами функционала оптимизации.

В случае скалярного управления $(m = 1)$ уравнения (3.1), (3.2) имеют вид

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{3.10}$$

$$u = c'x, \tag{3.11}$$

где u – скаляр, b и c – n-мерные векторы-столбцы.

Передаточная функция этой системы

$$w(s) = -c'(Es - A)^{-1}b. \tag{3.12}$$

Условие оптимальности (3.9) принимает вид

$$[1 + w(-j\omega)][1 + w(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \tag{3.13}$$

где $h_i(j\omega)$, $(i = \overline{1,n})$ – дробно-рациональные функции, являющиеся компонентами вектора $H(Ej\omega - A)^{-1}b$.

3.1.2 Коэффициент передачи и частота среза

Найдем связь между коэффициентами функционала

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} q_{ii}x_i^2 + u^2 \right) dt, \tag{3.14}$$

(где для простоты $Q = \mathrm{diag}[q_{11}, \ldots, q_{nn}]$, $q_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$), в смысле которого оптимальна система (3.10), (3.11), с одной стороны, и коэффициентом передачи k_p и частотой среза $\omega_{\text{ср}}$ этой системы - с другой.

Напомним, что для систем без астатизма

$$k_p = w(0), \tag{3.15}$$

для астатических

$$k_p = \lim_{s \to 0} s^r w(s), \tag{3.16}$$

где r – порядок астатизма, а частота среза определяется равенством

$$\left| w(j\omega_{\text{ср}}) \right| = 1. \tag{3.17}$$

Положим в (3.13) $\omega = 0$, и учитывая, что обычно $k_p \gg 1$ получим для систем без астатизма

$$k_p^2 \approx \sum_{i=1}^{n} h_i^2(0). \tag{3.18}$$

Преобразуем это выражение. Поскольку в рассматриваемом случае

$$H = \mathrm{diag}\,[\sqrt{q_{11}}, \ldots, \sqrt{q_{nn}}]\,,$$

учитывая, что компоненты вектора $(Es - A)^{-1}b$ имеют вид $\dfrac{\rho_i(s)}{D(s)}$, где $\rho_i(s)$ – составляющие вектора $\rho(s) = \overline{(Es - A)}b$, а

$$D(s) = \det(Es - A) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0,$$

($\overline{(Es - A)}$ – присоединенная матрица), получим

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(s)h_i(-s) = \left[\sum_{i=1}^{n} q_{ii}\rho_i(s)\rho_i(-s) \right] \frac{1}{D(s)D(-s)}. \tag{3.19}$$

Таким образом, соотношение (3.18) принимает вид

$$k_p^2 \approx \sum_{i=1}^{n} q_{ii}\frac{\rho_i^2(0)}{d_0^2}. \tag{3.20}$$

Для астатических систем аналогичное, но уже точное соотношение следует из (3.19) после его умножения на s^{2r} при $s \to 0$:

$$k_p^2 = \sum_{i=1}^{n} q_{ii}\frac{\rho_i^2(0)}{d_r^2}. \tag{3.21}$$

Часто по соображениям точности работы системы число k_p задано. Тогда для обеспечения заданного коэффициента передачи разомкнутой системы необходимо определять коэффициенты функционала (3.14) из равенств (3.20), (3.21), в которых $\rho_i(0)$ $(i = \overline{1,n})$ и d_0 (либо d_r) – известные числа, определяемые параметрами объекта управления.

Для установления зависимости частоты среза системы (3.10), (3.11) от параметров функционала (3.14) введем в рассмотрение некоторую частоту $\omega^*_{\text{ср}}$, определяемую равенством

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{ii}\rho_i(-j\omega^*)\,\rho_i(j\omega^*_{\text{ср}})}{D(-j\omega^*_{\text{ср}})\,D(j\omega^*_{\text{ср}})} = 1, \tag{3.22}$$

которое эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega^*_{\text{ср}})h_i(j\omega^*_{\text{ср}}) = 1. \tag{3.23}$$

Кроме того, запишем тождество (3.13) как

$$2\mathrm{Re}\,w(j\omega) + w(-j\omega)w(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \tag{3.24}$$

либо

$$2a(\omega)\cos\varphi(\omega) + a^2(\omega) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \tag{3.25}$$

где

$$a(\omega) = |w(j\omega)|;\;\; \varphi(\omega) = \arg w(j\omega).$$

При $\omega = \omega^*$ тождество (3.25) принимает, с учетом (3.23), вид $2a(\omega^*_{\text{ср}})\cos\varphi(\omega^*_{\text{ср}}) +$ $a^2(\omega^*_{\text{ср}}) = 1$, откуда следует

$$a(\omega^*_{\text{ср}}) = -\cos\varphi(\omega^*_{\text{ср}}) + \sqrt{\cos^2\varphi(\omega^*_{\text{ср}}) + 1}. \tag{3.26}$$

Учитывая, что $-1 \le \cos\varphi(\omega) \le 1$, получим границы для значений амплитудно-частотной характеристики $a(\omega)$ оптимальной системы в точке ω^* :

$$0,4 \le a(\omega^*_{\text{ср}}) \le 2,4 \quad \left|20\lg(\omega^*_{\text{ср}})\right| \le 8\,. \tag{3.27}$$

Если полагать наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) в окрестности $\omega^*_{\text{ср}}$ не менее 20 дБ/дек, то нетрудно заключить, что истинная частота среза ω отличается от $\omega^*_{\text{ср}}$ не более чем на 0,4 декады (в 2,5 раза).

Таким образом, если коэффициенты q_{ii} $(i = \overline{1,n})$ функционала (3.14) выбрать так, чтобы при заданном $\omega^*_{\text{ср}}$ выполнялось равенство (3.22), то частота среза оптимальной в смысле такого функционала системы (3.10), (3.11) будет отличаться от заданной не более чем в 2,5 раза.

Пример. Рассмотрим гирораму, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2;\;\; \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3;\;\; \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u, \tag{3.28}$$

и пусть требуется найти закон управления

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \tag{3.29}$$

при котором система (3.28), (3.29) имеет коэффициент передачи разомкнутой гирорамы и частоту среза, близкие к заданным $-k^*_p$, ω^* .

Для решения этой задачи будем определять параметры c_i $(i = \overline{1,3})$ из условия минимума функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \left(q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + u^2\right)\,dt, \tag{3.30}$$

коэффициенты которого определяются из соотношений (3.21), (3.22).

Для нахождения функций $\rho_i(s)$ $(i = \overline{1,3})$ вычислим

$$(Es{-}A)^{-1}b = \left\|\begin{matrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s-a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & s-a_{33} \end{matrix}\right\|^{-1} \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{D(s)}\left\|\begin{matrix} a_{23} \\ a_{23}s \\ s(s-a_{22}) \end{matrix}\right\| b_{31}, \tag{3.31}$$

где $D(s) = s^3 - (a_{22} + a_{33})s^2 + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})s$.

Таким образом,

$$\rho_1(s) = a_{23}b_{31};\;\; \rho_2(s) = a_{23}b_{31}s;\;\; \rho_3(s) = s(s - a_{22})b_{31}.$$

Подставляя эти выражения в (3.21), (3.22), получим

$$\frac{q_{11}a_{23}^2b_{31}^2}{(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})^2} = k^*_p; \tag{3.32}$$

$$\frac{q_{11}a_{23}^2b_{31}^2 + q_{22}\omega^{*2}a_{23}^2b_{31}^2 + q_{33}\omega^{*2}\left(\omega^{*2}+a_{22}^2\right)b_{31}^2}{D(-j\omega^*)\,D(j\omega^*)} = 1. \qquad (3.33)$$

Пусть параметры гирорамы имеют значения (2.52), а $k_p^* = 4 \cdot 10^2$, $\omega^* = 100\, c^{-1}$. Задаваясь значением $q_{33} = 5 \cdot 10^9$, вычислим по формулам (3.32), (3.33) $q_{11} = 1,6 \cdot 10^{12}$, $q_{22} = 3 \cdot 10^8$.

Решая задачу АКОР гирорамы при этих значениях коэффициентов функционала оптимизации (3.30), найдем

$$c_1 = -0,126 \cdot 10^7; \;\; c_2 = -0,44 \cdot 10^4; \;\; c_3 = -166 \cdot 10^3.$$

Передаточная функция разомкнутой гирорамы

$$w(s) = -\frac{\sum_{i=1}^{3} c_i\rho_i(s)}{D(s)} = -\frac{a_{23}b_{31}\left[c_1 + \left(c_2 - c_3\frac{a_{22}}{a_{23}}\right)s + \frac{c_3}{a_{23}}s^2\right]}{s^3 - (a_{22}+a_{33})s^2 + (a_{22}a_{23} - a_{32}a_{23})s} =$$

$$= \frac{0,126 \cdot 10^7(0,92 \cdot 10^{-4}s^2 + 3,1 \cdot 10^{-2}s + 1)}{s(s^2 + 301s + 3,3 \cdot 10^3)}. \qquad (3.34)$$

На рис. 3.1 приведена амплитудно-частотная характеристика разомкнутой гирорамы, из которой следует, что требования к k_p и ω выполняются.

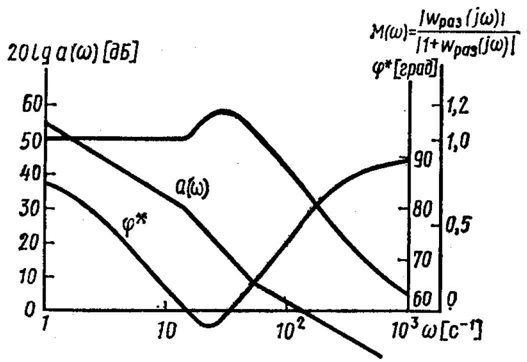

Рис. 3.1

3.1.3 Запасы устойчивости систем со скалярным управлением

Исследуем частотные свойства системы (3.10), (3.11) со скалярным управлением оптимальной в смысле функционала (3.14). Для общности будем полагать, что в этом функционале часть коэффициентов q_{ii} равна нулю, однако, требование полной управляемости пары (A' , H') выполняется.

Оказывается, для частотных показателей качества (запаса устойчивости по фазе φ_3 , запаса устойчивости по модулю L и показателя колебательности M) оптимальных систем можно указать их границы, не зависящие от выбора коэффициентов функционала (3.14).

Утверждение . Запасы устойчивости и показатель колебательности оптимальной, в смысле функционала (3.3), системы (3.10), (3.11) со скалярным управлением удовлетворяют неравенствам

$$\varphi_3 \geq 60^\circ, \;\; L \geq 2, \;\; M \leq 2, \qquad (3.35)$$

а ее радиус запасов устойчивости

$$r = 1. \qquad (3.36)$$

Доказательство утверждения опирается на тождество (3.13). Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega) \geq 0, \qquad (3.37)$$

запишем на основе (3.13)

$$[1 + \mathrm{Re}\, w(j\omega)]^2 + \mathrm{Im}^2\, w(j\omega) \geq 1. \qquad (3.38)$$

Из этого неравенства следует выражение (3.36)утверждения.

Равенству $[1 + \mathrm{Re}\, w(j\omega)]^2 + \mathrm{Im}^2\, w(j\omega) = 1$ соответствует в плоскости годографа амплитудно-фазовой характеристики (АФЧХ) окружность единичного радиуса с центром в точке $\mathrm{Re}\, w(j\omega) = -1$, $\mathrm{Im}\, w(j\omega) = 0$. Эта окружность показана на рис. 3.2. Неравенство

(3.38) означает, что годограф АФЧХ оптимальной системы не пересекает зоны (это запретная зона на рис. 3.2 заштрихована), ограниченной окружностью единичного радиуса с центром в точке $(-1, j0)$.

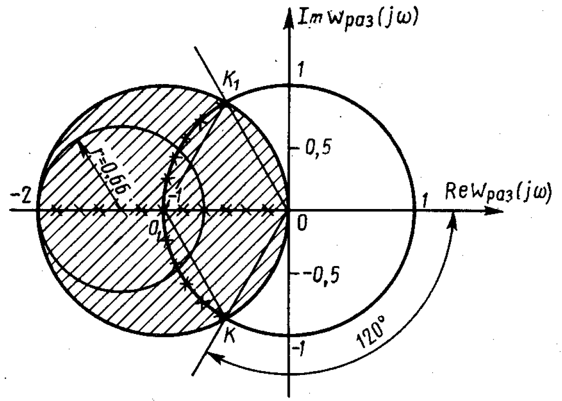

Рис. 3.2

Опираясь на такую геометрическую интерпретацию условия оптимальности в частотной форме (3.13) и неравенства (3.37), нетрудно доказать соотношения (3.35) для границ частотных показателей качества.

Действительно, пересечение запретной зоны с кругом единичного радиуса с центром в начале координат образует сегмент, в который вписываются два равносторонних треугольника O_1OK_1 , O_1OK (сторонами этих треугольников являются радиусы пересекающихся окружностей), которые опираются на дугу, отмеченную на рисунке крестиками, а поэтому угол OKK_1 равен $120°$. Это означает, что запас по фазе $\varphi_З \geq 60°$.

Переходя ко второму из неравенств (**??**), отметим, что отрезок вещественной оси $[-2,\, 0]$, отмеченный на рисунке крестиками, находится внутри запретной зоны. Это означает, что запас устойчивости по модулю для оптимальных систем с АФЧХ второго рода не менее двух, а с АФЧХ первого рода - бесконечно велик. Последнее следует из того, что участок $[-1,\, 0]$ вещественной оси не может пересекаться АФЧХ оптимальной системы.

Граница показателя колебательности оптимальных систем находится следующим образом. На рис. 3.2 штрих-пунктирной линией

нанесена окружность радиуса $r = \dfrac{M}{(M^2-1)} = 0,66$ с центром в точке $(-a, j0)$, где $a = \dfrac{M^2}{(M^2-1)} = 1,3$. Эта окружность составляет геометрическое место точек, запретных для АФЧХ с показателем колебательности $M = 2$. Так как эта окружность находится внутри запретной зоны, касаясь границы этой зоны изнутри, то $M \leq 2$ и, таким образом, утверждение доказано.

Отметим, что доказательство опиралось на неравенство (3.38), которое не содержит коэффициентов функционала оптимизации. Правда, при этом требуется, чтобы $q_{ii} \geq 0 \quad (i = \overline{1,n})$, так как в этом случае выполняется (3.37), поэтому границы (**??**) не зависят от выбора этих коэффициентов , и таким образом,утверждение доказано.

Пример(продолжение). Определим запасы устойчивости и показатель колебательности гирорамы с законом управления, полученным выше. Передаточная функция гирорамы в разомкнутом состоянии определяется выражением (3.34). На рис. 3.1 приведены логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $-20\lg a(\omega)$ и функция $\varphi^*(\omega) = 180 + \varphi(\omega)$ (где $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика), соответствующие передаточной функции (3.34). Нетрудно видеть, что $\varphi_З = 80°$, $L \to \infty$. На этом же рисунке приведен график

$$M(\omega) = \frac{|w(j\omega)|}{|1 + w(j\omega)|},$$

из которого следует, что показатель колебательности

$$M = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} M(\omega) = 1,1.$$

Примечание. В более общем случае функционал (3.14) содержит произведения переменных x_i и u :

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n q_{ii} x_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n l_i x_i \right) u + u^2 \right) dt.$$

В матричной форме он принимает вид

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + 2(l'x)u + u^2)\, dt, \qquad (3.39)$$

где l – n-мерный вектор.

Пусть выполнено условие неотрицательности подынтегральной квадратичной формы $n+1$ переменного $Q - ll' \geq 0$. Вводя новые переменные $\overline{u} = u + l'x$, $\overline{Q} = Q + ll'$ нетрудно привести функционал (3.39) к форме (3.14) и использовать процедуру АКОР. Однако для частотных показателей качества систем, оптимальных в смысле функционала (3.39), уже нельзя указать границ (??). Более того, в [2.22] показано, что для любой (в том числе и сколь угодно "плохой"по частотным показателям) системы (3.10), (3.11) можно построить неотрицательный функционал вида (3.39), в смысле которого эта система является оптимальной.

3.1.4 Запасы устойчивости оптимальных систем с векторным управлением

Рассмотрим приведенную на рис.3.3 структурную схему системы (3.1), (3.2), разомкнутую по ν-му входу объекта.

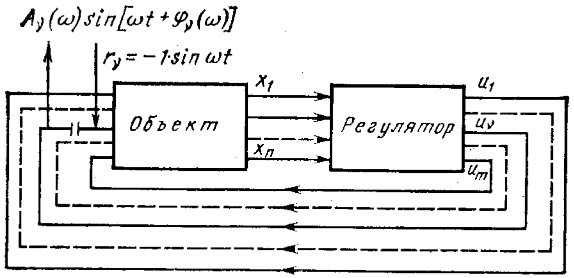

Рис.3.3

После размыкания системы по ν-му входу объекта подадим на этот вход воздействие $v_\nu = -1 \cdot \sin \omega t$. При изменении частоты этого воздействия выходная координата ν-го регулятора будет изменяться по закону

$$u_\nu = a_\nu(\omega) \sin[\omega t + \varphi_\nu(\omega)]\,. \qquad (3.40)$$

Функции $a_\nu(\omega)$ и $\varphi_\nu(\omega)$ называются амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками многомерной системы, разомкнутой по ν-му входу объекта.

Описанную операцию можно повторить для каждого из входов объекта, и таким образом рассматриваемая многомерная система будет характеризоваться $2m$ частотными характеристиками $a_i(\omega)$ $\varphi_i(\omega)$, $(i = \overline{1,m})$.

Используя эти характеристики, запасы устойчивости многомерной системы (3.1), (3.2), определяются следующим образом

$$\begin{aligned} &\varphi_З = \min\{\varphi_{З1}, \dots, \varphi_{Зm}\}\,; \quad L = \min\{L_1, \dots, L_m\}\,; \\ &M = \max\{M_1, \dots, M_m\}\,, \end{aligned} \qquad (3.41)$$

где $\varphi_{Зi}$, L_i, M_i $(i = 1, m)$ определяются, как и в случае скалярного управления, выражениями

$$\begin{aligned} &\varphi_{Зi} = \pi + \varphi_i(\omega_{i\text{ср}}); \quad L_i = \min\left\{a_{i1}(\omega_{j1})\frac{1}{a(\omega_{j2})}\right\}; \\ &M = \max_{0\leq\omega\leq\infty} \frac{a_i(\omega)}{\left|1 + a_i(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\right|}, \end{aligned} \qquad (3.42)$$

а $\omega_{i\text{ср}}$, ω_{i1}, ω_{i2} находятся из соотношений

$$\begin{aligned} &a_i(\omega_{i\text{ср}}) = 1; \quad \omega_{i1} = \{\omega_{i1} : \varphi(\omega_{i1}) = -\pi;\ a_i(\omega_{i1} > 1\}\,; \\ &\omega_{i2} = \{\omega_{i2} : \varphi(\omega_{i2}) = -\pi;\ a_i(\omega_{i2} < 1\} \quad (i = 1, m). \end{aligned}$$

Отметим, что введенное понятие об амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристиках разомкнутой системы по ν-му входу объекта многомерной системы базировалось на мыслимом физическом эксперименте, который, может быть, и нельзя осуществить в действительности в силу, например, неустойчивости "объекта замкнутого $m-1$ регуляторами.

Радиус запасов устойчивости определяется как наибольшее значение числа r, при котором выполняется неравенство

$$[E_m + W(-j\omega)'][E_m + W(-j\omega)] \geq E_m r. \qquad (3.43)$$

Утверждение Запасы устойчивости и показатель колебательности оптимальной, в смысле функционала (3.3), многомерной системы (3.1), (3.2) удовлетворяют неравенствам

$$\varphi_З \geq 60^\circ, \quad L \geq 2, \quad M \leq 2, \tag{3.44}$$

а ее радиус ее запасов устойчивости

$$r = 1. \tag{3.45}$$

Доказательство неравенств (3.44) получено в работах [3.4],[3.5], а равенство (3.45) следует из условия (3.8) оптимальности в частотной форме и определения (3.43).

Заметим, что в [3.6] построен пример,показывающий, что это утверждение несправедливо, если определять запасы устойчивости, размыкая систему по входам регулятора.Метод построения регулятора, обеспечивающего запасы устойчивости при размыкании как по входам объекта так и регулятора, предложен в работах [3.7], [3.8]

3.2 Синтез регулятора

3.2.1 Объект с возмущением, суммируемым с управлением

Постановка задачи

Пусть имеется объект, описываемый уравнением, которое называется уравнением с возмущением, суммируемым с управлением.

$$\dot{x} = Ax + B(u + f), \quad \theta = Nx \tag{3.46}$$

Компоненты m -мерного вектора возмущений $f(t)$ являются следующими полигармоническими функциями

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^{p} f_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}) \ \ (i = \overline{1, m}) \tag{3.47}$$

Амплитуды f_{ik} и фазы ψ_{ik} $(i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p})$, а также частоты ω_k $(k = \overline{1, p})$ гармоник неизвестны. Однако известно, что амплитуды гармоник подчинены условию

$$\sum_{k=1}^{p} f_{ik}^2 \leq f_i^{*2} \ \ (i = \overline{1, m}), \tag{3.48}$$

где p – известное число гармоник, f_i^* $(i = \overline{1, \mu})$ – заданные числа.

Требуется найти матрицу C регулятора

$$u = C'x. \tag{3.49}$$

такую, чтобы система (3.46), (3.49) удовлетворяла требованиям: к точности

$$\theta_{i,\text{уст}} \leq \theta_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3.50}$$

времени регулирования

$$t_{tr} \leq t_{tr}^* \tag{3.51}$$

и запасам устойчивости.

Здесь $\theta_{i,\text{уст}}$ –установившиеся ошибки по регулируемым переменным, определяемые как

$$\theta_{i,\text{уст}} = \lim_{t \to \infty} \sup |\theta_i(t)| \,, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3.52}$$

а θ_i^* $(i = \overline{1, m})$ и t_{tr}^* – заданные числа.

Обеспечение точности и грубости Для решения задачи применим процедуру АКОР, в которой в качестве функционала оптимизации примем следующий

$$J = \int_0^\infty (\theta' Q_0 \theta + u'u) \ dt, \tag{3.53}$$

где $Q_0 = \text{diag}\|q_{11}^0, \ldots, q_{mm}^0\|$ – диагональная матрица с положительными коэффициентами $(q_{ii}^0 > 0, \quad (i = \overline{1, m})$.

В этом случае матрица Q в уравнениях Риккати (2.22) имеет вид $Q = N'Q_0N$.

Утверждение. Для построения регулятора (3.49), обеспечивающее выполнение требований к точности (3.50) при полигармоническом возмущении (3.47) достаточно использовать процедуру 2.1.2 АКОР для объекта (3.1) и функционала (3.53), с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам

$$q_{ii}^0 \geq \frac{p\sum\limits_{k=1}^{m} f_k^{*2}}{\theta_i^{*2}} \quad (i = \overline{1,m}) \tag{3.54}$$

Доказательство утверждения приведено в [3.13].

Запасы устойчивости удовлетворяют по построению системы неравенствам (3.44) (3.45) по свойству процедуры АКОР.

В связи с требованием (4.83) к времени регулирования рассмотрим передаточную матрицу объекта по регулируемой переменной

$$W_0(s) = N\,(Es - A)^{-1}\,B,$$

определитель которой записывается [2.10] как :

$$\det\left[W_0(s)\right] = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{\beta}(s-\nu_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}, \quad \alpha \neq 0. \tag{3.55}$$

Если для корней ν_i $(i = \overline{1,\beta})$ выполняется условие

$$\min_{1\leq i\leq\beta} |\mathrm{Re}\,\nu_i| \geq (t_{tr}^*)^{-1}, \tag{3.56}$$

то, в соответствии с [2.10], всегда найдутся достаточно большие числа q_{ii}^0 $\quad i = \overline{1,m}$, при которых система удовлетворяет требованию к времени регулирования.

3.2.2 Объект общего вида

Рассмотрим объект, описываемый уравнениями общего вида

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Psi f, \;\; \theta = Nx, \tag{3.57}$$

в которых, как и ранее, компоненты внешнего возмущения $f(t)$ являются полигармоническими функциями (3.47),(3.48), число которых mu может не совпадать с m , а размерность вектора регулируемых переменных θ , обозначаемая как m_1 , может не совпадать

с размерностью m вектора управлений. Пусть объект замкнут регулятором

$$u = C'x. \tag{3.58}$$

Радиусом установившихся состояний системы (3.57),(3.58)будем называть величину

$$r_{st}^2 = \sum_{i=1}^{m_1}\left(\frac{\theta_{i,\text{уст}}}{\theta_i^*}\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{u_{i,\text{уст}}}{u_i^*}\right), \tag{3.59}$$

где

$$\begin{gathered} u_{i,\text{уст}} = \lim_{t\to\infty}\sup|u_i(t)|\,,\; i = \overline{1,m}, \\ \theta_{i,\text{уст}} = \lim_{t\to\infty}\sup|\theta_i(t)|\,,\quad i = \overline{1,m_1}, \end{gathered} \tag{3.60}$$

θ_i^* , $(i = \overline{1,m_1})$ и u_i^* , $(i = \overline{1,m})$ – заданные числа.

Задача состоит в том, чтобы для заданного числа ν найти регулятор (3.58) такой, чтобы выполнялось условие

$$r_{st}^2 \leq \nu^2. \tag{3.61}$$

Если такого регулятора не существует, тогда ищется регулятор, обеспечивающий минимально возможное число $\nu = \nu^*$, для которого требование (4.81) выполняется.

Для решения задачи используем H_∞ –оптимизацию, в которой в качестве функционала примем следующий

$$J = \int_0^\infty \left(\theta^T Q_0 \theta + u^T R u - \gamma^2 f^T f\right)\,dt, \tag{3.62}$$

где $Q_0 = \mathrm{diag}\|q_{11}^0, \ldots, q_{m_1m_1}^0\|$ $\quad R = \mathrm{diag}\|r_{11}^0, \ldots, r_{m_1m_1}^0\|$ – диагональные матрицы с положительными коэффициентами.

Искомое управление имеет вид, аналогичный (2.180) (2.182):

$$u = C^T x, \;\; C^T = -R^{-1}B^T P, \tag{3.63}$$

где положительно-определеная матрица P является решением следующего уравнения Риккати

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + \gamma^{-2} P\Psi\Psi^T P + N^T Q_0 N = 0. \tag{3.64}$$

Утверждение. Если коэффициенты функционала (3.62) удовлетворяют условиям

$$q^0_{ii} \geq \frac{p||f^*||^2}{(\theta^*_i)^2}, \quad i=\overline{1,m_1}, \quad r_{ii} \geq \frac{p||f^*||^2}{(u^*_i)^2}, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (3.65)$$

(где $||f^*|| = \sqrt{f^{*2}_1+,\dots,+f^{*2}_\mu}$), то радиус установившегося состояния

$$r^2_{st} \leq \gamma^2$$

.
Это означает, что число $\nu^* = \gamma^*$–минимальному значению γ, при котором существует решение $P \geq 0$.

Доказательство утверждения приведено в [4.10].

3.2.3 Програмное обеспечение

Система ГАММА: директива D441 (Точное управление объектом первого вида).

3.3 Комментарии

С момента появления, LQ-оптимизация привлекла внимание специалистов по автоматическому управлению как средство синтеза стабилизирующих регуляторов (регуляторов, обеспечивающих лишь устойчивость системы). Это было вызвано тем, что, несмотря на ряд работ по развитию метода ЛАЧХ для многомерного случая, он оставался пригодным лишь для одномерных объектов, а в практике все больший и больший интерес представляло управление многомерными объектами.

Для возможности применения LQ-оптимизации для синтеза по показателям точности и качества появились работы по исследованию свойств LQ-оптимальных систем и решению проблемы выбора коэффициентов функционала по заданным требованиям к установившейся ошибке и времени регулирования.

В начале была исследована грубость LQ-оптимальных систем. В работах [3.2], [3.3] было показано, что LQ-оптимальная система со скалярным управлением является грубой (утверждение 3.1.3). Аналогичный результат был получен в [3.4], [3.5] для векторного

управления (утверждение 3.1.4). Следует отметить, в [3.5] запасы устойчивости определяются, в отличие от выражений (3.41), (3.42), с помощью возмущенных передаточных матриц,аналогичных (1.54) в одномерном случае, и такое определение в ряде случаев является более содержательным.

Затем решалась проблема выбора коэффициентов функционала оптимизации по заданным допускам на установившиеся ошибки для объекта (3.46) с возмущением суммируемым с управлением. Для коэффициентов функционала были получены при $p=1$ неравенства (**??**) утверждения 3.2.1 для ступенчатых [3.9] и одночастотных гармонических [**?**] внешних возмущений, а для полигармонических возмущений, когда $p>1$, в [3.13]. Для объектов общего вида (3.65) в [3.15] получены условия, при которых можно построить регулятор по состоянию, обеспечивающий сколь угодно малые установившиеся ошибки при ступенчатом внешнем возмущении. Для этого вида возмущений в [3.16] исследованы предельные возможности регуляторов дискретных объектов.

4 Аналитический синтез регуляторов по выходу

4.1 Наблюдение (восстановление) вектора состояния

4.1.1 Задача наблюдения

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \;\; x(t_0) = x^{(0)}, \tag{4.1}$$

и пусть в результате синтеза получено управление по состоянию

$$u = C'(t)x. \tag{4.2}$$

Реализация этого управления затруднена тем , что не все переменные состояния объекта доступны непосредственному измерению, а можно измерить лишь компоненты некоторого r -мерного вектора y , связанные с переменными состояния соотношением

$$y = D(t)x. \tag{4.3}$$

В связи с этим возникает задача восстановления (наблюдения, оценки) вектора $x(t)$ по результатам измерения $y(t)$ на интервале $[t_0,\, t]$. После того как вектор состояния восстановлен, можно реализовать управление (4.2), заменяя в нем действительное состояние восстановленным вектором состояния.

4.1.2 Уравнение наблюдателя

Будем называть *наблюдателем* физическое устройство, на вход которого подаются вектор управления $u(t)$ и измеряемый вектор $y(t)$, а его выходами служит оценка вектора состояния объекта.

Простейший наблюдатель не использует вектор $y(t)$ и он описывается уравнением модели объекта.

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u, \;\; \hat{x}(t_0) = \hat{x}^{(0)}, \tag{4.4}$$

где $\hat{x}(t)$ – n -мерный вектор состояния (выхода) наблюдателя, $\hat{x}^{(0)}$ – начальное состояние наблюдателя.

Если начальное состояние объекта известно, то принимая $\hat{x}^{(0)} = x^{(0)}$, получим совпадающие решения уравнений (4.4) и (4.1), и следовательно, наблюдатель точно восстанавливает вектор состояния объекта.

Начальное состояние объекта обычно неизвестно, и поэтому $\hat{x}^{(0)} \neq x^{(0)}$. Тогда возникает ошибка восстановления $e = x - \hat{x}$. Она удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = A(t)e, \;\; e(t_0) = x^{(0)} - \hat{x}^{(0)}, \tag{4.5}$$

которое получается, если из уравнения (4.1) вычесть уравнение (4.4).

Если объект управления асимптотически устойчив, то ошибка восстановления обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$ и следовательно, выход наблюдателя будет с течением времени приближаться к вектору состояния объекта.

Если объект управления неустойчив, то применяется наблюдатель, описываемый уравнением

$$\dot{x} = A(t)\hat{x} + K(t)\left[y - D(t)\hat{x}\right] + B(t)u, \;\; \hat{x}(t_0) = \hat{x}^{(0)}, \tag{4.6}$$

где $K(t)$ – некоторая матрица размеров $n \times r$, называемая *матрицей коэффициентов усиления наблюдателя.*

В этом наблюдателе сравнивается измеренное значение вектора y с восстановленным значением $D(t)\hat{x}$. Эта коррекция по ошибке восстановления усиливается матрицей $K(t)$. При $K(t) = 0$ наблюдатель (4.6) совпадает с простейшим.

Запишем уравнение наблюдателя в виде

$$\dot{\hat{x}} = \left[A(t) - K(t)D(t)\right]\hat{x} + K(t)y + B(t)u, \tag{4.7}$$

из которого следует, что входом наблюдателя является вектор управления и вектор измеряемых переменных, а переходные процессы определяются матрицей $[A(t) - K(t)D(t)]$ и поэтому матрица $K(t)$ должна выбираться из условия асимптотической устойчивости наблюдателя.

Вычитая уравнения (4.1) и (4.6), получим следующее уравнение для ошибки восстановления

$$\dot{e} = \left[A(t) - K(t)D(t)\right]e; \;\; e(t_0) = x^{(0)} - \hat{x}^{(0)}. \tag{4.8}$$

Если существует матрица $K(t)$ наблюдателя, такая, что наблюдатель асимптотически устойчив, то ошибка восстановления обладает свойством $\lim\limits_{t\to 0} e(t) = 0$.

Существует несколько методов построения матрицы $K(t)$, при которой наблюдатель асимптотически устойчив.

Рассмотрим два таких метода для стационарного объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Dx, \tag{4.9}$$

с наблюдателем (4.6)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K\,[y - Dx] + Bu, \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}^{(0)}, \tag{4.10}$$

где K – матрица чисел.

4.1.3 Построение наблюдателя на основе уравнения Риккати

Характеристический полином наблюдателя (4.10) имеет вид

$$D_{\text{Н}}(s) = \det\|Es - A + KD\|. \tag{4.11}$$

Задача состоит в том, чтобы построить матрицу K так, чтобы корни этого полинома имели отрицательные вещественные части. Сведем эту задачу к специальным образом построенной задаче АКОР.

В связи с этим запишем полином (4.11) как

$$D_{\text{Н}}(s) = \det||Es - A' + D'K'|| \tag{4.12}$$

и сформируем вспомогательную "систему"управления с этим характеристическим полиномом

$$\dot{\mu} = A'\mu + D'u, \tag{4.13}$$

$$u = -K'\mu, \tag{4.14}$$

где $\mu(t)$ – n-мерный вектор состояния "системы". Эта "система"выражает двойственность задач управления и наблюдения.Она совпадает с системой (2.8), (2.9),если положить $A = A'$, $B = D'$, $C = -K$.

Уравнение Риккати (2.22) для этой системы имеет вид

$$P_cA' + AP_c - P_cD'DP_c + Q_c = 0 \tag{4.15}$$

где Q_c – заданная положительно-определенная матрица, P_c – искомая матрица размеров $n \times n$.

Решая это уравнение, найдем положительно определенную матрицу $P_c^{(0)}$ и в соответствии с (2.23) сформируем искомую матрицу

$$K = P_c^{(0)}D'. \tag{4.16}$$

4.1.4 Построение наблюдателя на основе модального управления

Если при построении матрицы K требуется нечто большее, чем асимптотическая устойчивость, а именно, требуется найти такую матрицу K , чтобы корнями характеристического полинома наблюдателя $D_{\text{Н}}(s)$ являлись заданные числа $\lambda_1^{\text{Н}}, \ldots, \lambda_n^{\text{Н}}$ $(\text{Re}\ \lambda_i^{\text{Н}} < 0$, $i = \overline{1,n})$. Последнее означает, что матрица K должна удовлетворять следующему тождеству по s

$$D_{\text{Н}}(s) = \det||Es - A + KD|| = \prod_{i=1}^{n}\left(s - \lambda_i^{\text{Н}}\right). \tag{4.17}$$

Для построения такой матрицы K воспользуемся двойственностью задач управления и наблюдения, выраженной системой (4.13), (4.14), и применим модальное управление.

Для построения матрицы K , заменим в уравнении (2.105) матрицы A и B матрицами A' и D' и, полагая $\lambda_i = \lambda_i^{\text{Н}}$ $i = \overline{1,n})$, найдем матрицу C' ; тогда искомая матрица наблюдателя

$$K = -C \tag{4.18}$$

Пример. Определение матрицы наблюдателя гирорамы. Уравнения наблюдателя полного порядка для переменных состояния гирорамы, описываемой уравнениями (2.29), имеют в соответствии с (4.10) вид:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 + k_{11}(y - \hat{x}_1); \tag{4.19}$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = a_{22}\hat{x}_2 + a_{23}\hat{x}_3 + k_{21}(y - \hat{x}_1); \tag{4.20}$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = a_{32}\hat{x}_2 + a_{33}\hat{x}_3 + k_{31}(y - \hat{x}_1) + b_{31}u. \qquad (4.21)$$

Неизвестные параметры k_{11} , k_{21} , k_{31} определим так, чтобы корни характеристического уравнения наблюдателя имели наперед заданные значения $\lambda_1^{\text{Н}}$, $\lambda_2^{\text{Н}}$, $\lambda_3^{\text{Н}}$.

В связи с этим сформулируем задачу модального управления: для "объекта"

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| u \qquad (4.22)$$

найти "управление"

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \qquad (4.23)$$

при котором характеристический полином системы (4.22), (4.23) имеет вид

$$D^*(s) = s^3 + d_2^*s^2 + d_1^*s + d_0^*, \qquad (4.24)$$

где

$$d_2^* = -\lambda_1^{\text{Н}}-\lambda_2^{\text{Н}}-\lambda_3^{\text{Н}};\ d_1^* = \lambda_1^{\text{Н}}\lambda_2^{\text{Н}}+\lambda_1^{\text{Н}}\lambda_3^{\text{Н}}+\lambda_2^{\text{Н}}\lambda_3^{\text{Н}};\ d_0^* = -\lambda_1^{\text{Н}}\lambda_2^{\text{Н}}\lambda_3^{\text{Н}}. \qquad (4.25)$$

В соответствии с первой операцией процедуры 2.2.2 построения модального управления формируем матрицу

$$\Psi_y = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -d_2 \\ 1 & -d_2 & -d_1 + d_2^2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{22} \\ 0 & 0 & a_{23} \end{matrix} \right\|^{-1}, \qquad (4.26)$$

где d_0 , d_1 , d_2 – коэффициенты характеристического уравнения объекта

$$D(s) = \det \left\| \begin{matrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s - a_{22} & -a_{32} \\ 0 & -a_{23} & s - a_{33} \end{matrix} \right\| = s[(s-a_{22})(s-a_{33})-a_{32}a_{23}] = s^3+d_2s^2+d_1s, \qquad (4.27)$$

где

$$d_2 = -a_{22} - a_{33};\ \ d_1 = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{33}.$$

Вторая операция приводит к значениям

$$-\check{c}_1 = d_0^*;\ \ -\check{c}_2 = d_1^* - d_1;\ \ -\check{c}_3 = d_2^* - d_2. \qquad (4.28)$$

Используя затем преобразование (2.118) с матрицей (4.26), получим значения c_i $(i = 1, 2, 3)$, тогда искомые

$$k_{i1} = -c_i\ \ (i = 1, 2, 3). \qquad (4.29)$$

4.1.5 Структура системы с наблюдателем

Возвращаясь к рассмотрению системы (4.1), (4.2), реализация закона управления (4.2) которой затруднена тем, что не все переменные состояния доступны непосредственному измерению, отметим, что в этом случае естественно использовать наблюдатель (4.6), а затем воспользоваться законом управления (4.2) применительно к восстановленному состоянию.

Полученная таким образом система описывается уравнениями:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ \ y = D(t)x; \qquad (4.30)$$

$$\dot{\hat{x}} = [A(t) - K(t)D(t)]\,\hat{x} + K(t)y + B(t)u; \qquad (4.31)$$

$$\hat{u} = C'(t)\hat{x}. \qquad (4.32)$$

На рис. 4.1 приведена структурная схема системы с наблюдателем, построенная на основе уравнений (4.30) - (4.32).

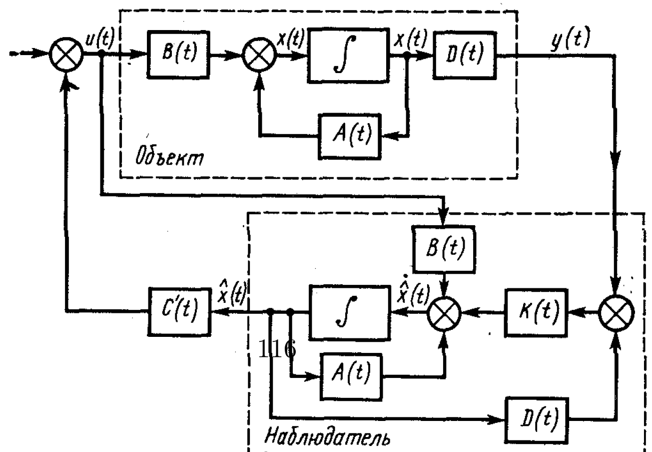

Рис. 4.1

Исследуем устойчивость системы (4.30) - (4.32). Осуществим эквивалентные преобразования этой системы. Вычитая из первого уравнения системы уравнение (4.31) и заменяя $x-\hat{x}=e$, получим после подстановки (4.32) в (4.30) уравнения:

$$\dot{e}=[A(t)+K(t)D(t)]\,e;\;\; e(t_0)=x(t_0)-\hat{x}(t_0); \tag{4.33}$$

$$\dot{x}=[A(t)+B(t)C'(t)]\,x-B(t)C'(t)e;\;\; x(t_0)=x^{(0)}. \tag{4.34}$$

Если матрица коэффициентов усиления наблюдателя $K(t)$ выбрана так, что наблюдатель (4.31) асимптотически устойчив при $y(t)=u(t)=0$, то решение уравнения (4.33) $e(t)\to 0$ при $t_1\to\infty$ независимо от начального состояния $e(t_0)$.

Пусть матрицы $B(t)$ и $C'(t)$, входящие в уравнение (4.34), ограничены и $e(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, тогда $x(t)\to 0$, если асимптотически устойчива система

$$\dot{x}=[A(t)+B(t)C'(t)]\,x. \tag{4.35}$$

В стационарном случае система (4.30) –(4.32) имеет вид

$$\dot{x}=Ax+Bu,\;\; y=Dx; \tag{4.36}$$

$$\dot{\hat{x}}=[A-KD]\,\hat{x}+Ky+Bu; \tag{4.37}$$

$$u=C'\hat{x}. \tag{4.38}$$

Эквивалентная ей система, аналогично (4.33), (4.34), записывается как

$$\dot{e}=[A-KD]\,e;\;\; \dot{x}=[A+BC']\,x-BC'e. \tag{4.39}$$

Характеристический полином системы (4.39)

$$D(s)=\det\left\|\begin{matrix} E(s)-A+KD & 0\\ BC' & Es-A-BC'\end{matrix}\right\|= \tag{4.40}$$

$$=\det(Es-A+KD)\det(Es-A-BC')\,.$$

Из этого выражения следует, что корни характеристического полинома оптимальной системы с наблюдателем состоят из корней характеристического полинома $D_u(s)=\;\det(Es-A-BC')$ оптимальной системы (у которой все переменные состояния доступны непосредственному измерению) и корней характеристического полинома $D_{\text{Н}}(s)=\;\det(E-A+KD)$ наблюдателя. Таким образом, можно производить раздельное построение закона управления и наблюдателя.

Пример. Гирорама с наблюдателем . Рассмотрим при $f_1=0$ гирораму (2.29) с оптимальным в смысле функционала (2.31) управлением (2.30) В связи с тем что непосредственному измерению доступна лишь одна переменная состояния x_1 , воспользуемся для восстановления остальных неизмеряемых переменных состояния наблюдателем (4.19) -(4.21) Тогда гирорама с наблюдателем будет описываться уравнениями

$$\dot{x}_1=x_2;\;\; \dot{x}_2=a_{22}x_2+a_{23}x_3;\;\; \dot{x}_3=a_{32}x_2+a_{33}x_3+b_{31}u, \tag{4.41}$$

$$u=c_1\hat{x}_1+c_2\hat{x}_2+c_3\hat{x}_3; \tag{4.42}$$

$$\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_1+k_{11}(y-\hat{x}_1);\;\;\; \dot{\hat{x}}_2=a_{22}\hat{x}_2+a_{23}\hat{x}_3+k_{21}(y-\hat{x}_1); \tag{4.43}$$

$$\hat{x}_3=a_{32}\hat{x}_2+a_{33}\hat{x}_3+k_{31}(y-\hat{x}_1)b_{31}u; \tag{4.44}$$

в которых (4.42) – уравнение регулятора, параметры которого c_1 , c_2 , c_3 определяются решением задачи об оптимальном управлении, описанным в примере 2.1.2, а параметры k_{11} , k_{21} , k_{31} находятся в результате построения наблюдателя, рассмотренного в примере 4.1.4.

Характеристический полином системы (4.41), (4.42), если положить в (2.30) $\check{x}_i=x_i\quad(i=1,2,3)$ имеет вид

$$d_u(s)=\det\left\|\begin{matrix} s & -1 & 0\\ 0 & s-a_{22} & -a_{23}\\ -b_{31}c_1 & -a_{32}-b_{31}c_2 & s-a_{33}-b_{31}c_3\end{matrix}\right\|= \tag{4.45}$$

$$=s[(s-a_{22})(s-a_{33}-b_{31}c_3)-a_{23}(a_{32}+b_{31}c_2)]-b_{31}c_1a_{23}.$$

В соответствии с (4.24) характеристический полином наблюдателя

$$d_{\text{H}}(s) = s^3 + d_2^* s^2 + d_1^* s + d_0^*, \tag{4.46}$$

а характеристический полином системы (4.41) ... (4.44)

$$D(s) = d_u(s) d_{\text{H}}(s). \tag{4.47}$$

4.1.6 Возможная негрубость системы с наблюдателем

Исследуем запасы устойчивости системы (4.36) – (4.38) и покажем, что они могут быть недопустимо малыми

Исключая вектор состояния регулятора $\hat{x}$, запишем его уравнения как

$$u = C' \left(Es - A + KD\right)^{-1} \left[Ky + Bu\right]$$

или

$$\left[E - C' \left(Es - A + KD\right)^{-1} B\right] u = C' \left(Es - A + KD\right)^{-1} Ky. \tag{4.48}$$

Сформируем передаточную матрицу $-W_{\text{H}}(s)$ системы (4.36), (4.48) в разомкнутом (на входе объекта) состоянии. Для этого заменим вектор входа объекта на некоторый вектор $-r$ $(u = -r$, что означает размыкание системы на входе объекта, и запишем матрицу, связывающую выход регулятора u с вектором r . Тогда получим

$$\begin{gathered} W_{\text{H}}(s) = -\left[E - C' \left(Es - A + KD\right)^{-1} B\right]^{-1} \cdot \\ C' \left(Es - A + KD\right)^{-1} KD \left(Es - A\right)^{-1} B. \end{gathered} \tag{4.49}$$

Ограничиваясь далее, для простоты, случаем скалярного управления $(m = 1)$, запишем передаточную функцию

$$w_{\text{H}}(s) = -\frac{c' \left(Es - A + KD\right)^{-1} KD \left(Es - A\right)^{-1} b}{1 - c' \left(Es - A + KD\right)^{-1} b} \tag{4.50}$$

Её можно представить как

$$w_{\text{H}}(s) = \frac{c' \left(\widetilde{Es - A}\right) b d_{\text{H}}(s) + c' \left(Es - \widetilde{A + KD}\right) bd(s)}{d(s) d_{\text{H}}(s) - c' \left(Es - \widetilde{A + KD}\right) bd(s)}, \tag{4.51}$$

где символ $\widetilde{\quad}$ означает присоединенную матрицу, $d(s)$ и $d_{\text{H}}(s)$ – характеристические полиномы объекта и наблюдателя.

Действительно, представляя матрицу в числителе передаточной функции (4.50) как

$$\begin{aligned} &(Es - A + KD)^{-1} KD \left(Es - A\right)^{-1} = \left(Es - A + KD\right)^{-1} \left(-A + KD\right) \left(Es - A\right)^{-1} + \\ &+ \left(Es - A + KD\right)^{-1} A \left(Es - A\right)^{-1} \end{aligned}$$

и учитывая, что для любой квадратной матрицы M очевидны тождества

$$(Es - M)^{-1} M = s\left(Es - M\right)^{-1} - E, \quad M\left(Es - M\right)^{-1} = \left(Es - M\right)^{-1} s - E,$$

получим выражение

$$(Es - A + KD)^{-1} KD \left(Es - A\right)^{-1} = \left(Es - A\right)^{-1} - \left(Es - A + KD\right)^{-1},$$

из которого следует передаточная функция (4.51).

Нетрудно видеть, что её числитель и знаменатель содержат одинаковые полиномы $\rho(s) = c' \left(Es - \widetilde{A + KD}\right) bd(s)$, которые взаимно сокращаются в характеристическом полиноме системы $D(s) = \left[d(s) - c' \left(\widetilde{Es - A}\right) b\right] d_{\text{H}}(s) + \rho(s) - \rho(s)$.

Если коэффициенты объекта отличаются от расчетных, полиномы $\rho(s)$ в чмслителе и знаменателе различаются. Так, в частности, вектор b , входящий в полином числителя относится к объекту, а вектор b в знаменателе формируется в устройстве наблюдения.

Взаимное уничтожение полиномов при построении характеристического полинома является (при больших значениях коэффициентов полинома $\rho(s)$) признаков малых запасов устойчивости по фазе и модулю.

4.1.7 Построение грубых систем с наблюдателем.

Если вектор состояния объекта измеряется, то регулятор, построенный с помощью процедуры АКОР обеспечивает грубость системы.

Передаточная матрица разомкнутой (по входу объекта) такой оптимальной системы имеет вид

$$W(s) = -C' (Es - A)^{-1} B. \qquad (4.52)$$

В связи с возможной негрубостью такой системы с наблюдателем возникает вопрос: нельзя ли выбрать матрицу K наблюдателя так, чтобы передаточная функция системы с наблюдателем была близка к её передаточной матрице без наблюдателя:

$$W_{\text{Н}}(s) \cong W(s). \qquad (4.53)$$

Оказывается, что для минимально-фазовых объектов это возможно.

Объект (4.36) при $r = m$ *называется минимально-фазовым*, если корни полинома $\det D \left(\widetilde{Es - A}\right) B$ имеют отрицательные вещественные части.

Будем определять матрицу K наблюдателя на основе уравнений(4.16), (4.15), в последнем из которых матрица Q_c имеет определенную структуру, и таким образом

$$K = P_e^{(0)} D', \qquad (4.54)$$

где неотрицательно-определенная матрица $P_e^{(0)}$ является решением следующего уравнения Риккати

$$P_e A' + A P_e - P_e D' D P_e + R + \rho B V B^T = 0, \qquad (4.55)$$

где R и V – произвольные неотрицательно-определенные матрицы, β – достаточно большое положительное число, которое назовем коэффициентом сближения.

> **Утверждение.** . При $\rho \to \infty$ передаточная матрица $W_{\text{Н}}(s)$ системы с наблюдателем приближается к передаточной матрице $W(s)$ системы без наблюдателя.

Доказательство утверждения приведено в [4.6].

4.1.8 Программное обеспечение

Система ГАММА

1.Директива D413 (Оптимальная система с наблюдателем, минимально-фазовый объект).

Система МАТЛАБ м-функции:

1) $est = estim(A, B, D, \bar{D}, K)$ -формирование наблюдателя (4.10),где $\bar{D}$ -матрица при управлении в измеряемом сигнале: $y = \mathrm{D}x + \bar{\mathrm{D}}u$.

2) $rsys = reg(A, B, D, \bar{D}, C', K)$ -формирование регулятора (4.37),(4.38

3) $K = place(A', D', \lambda)$ -расчет коэффициентов наблюдателя на основе модального управления.

4) $[P_c, \lambda, K, rr] = care(A', D', Q_c)$ -расчет коэффициентов наблюдателя на основе уравнения Риккати (4.15).

4.2 Синтез регулятора

4.2.1 Одномерный минимально-фазовый объект

Пусть имеется объект управления, описываемый уравнением

$$d(s)y = k(s)u + f, \qquad (4.56)$$

в котором внешнее возмущение-гармоническая функция

$$f(t) = a \sin \omega t, \quad 0 \le \omega \le \infty \qquad (4.57)$$

с неизвестной амплитудой и частотой, о которых известно лишь, что $|a| < f^*$, где f^* -известно, а $0 \le \omega \le \infty$

Требуется найти регулятор

$$d_p(s)u = k_p(s)y \qquad (4.58)$$

такой, чтобы выход объекта удовлетворял условию

$$|y(t)| \le y^*, \quad t \ge t_{tr}, \qquad (4.59)$$

в котором y^* –заданное число, и система была грубой.

Параметры регулятора (4.58) будем искать минимизируя функционал

$$J = \int_0^\infty \left(qy + \varepsilon_0 u^2 + \varepsilon_1 \dot{u}^2 + \ldots + \varepsilon_\rho u^{(\rho)^2} \right) dt. \qquad (4.60)$$

Его коэффициенты будем определять так, чтобы выполнялось требование (4.59) к точности.

Рассмотрим два случая степеней m полинома $k(s)$ объекта.

Случай $m = n - 1$.

Коэффициенты функционала (4.60) при управлениях определим, полагая $\rho = n - 1$ из выражения

$$\varepsilon(s^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i s^{2i}(-1)^i = k(-s)k(s) \tag{4.61}$$

В этом случае характеристический полином (2.4) для экстремалей функционала (4.60) имеет вид

$$\Delta(s) = k(-s)k(s)[d(-s)d(s) + q] = k(-s)k(s)\delta(-s)\delta(s), \tag{4.62}$$

в котором гурвицев полином $\delta(s)$ находится из тождества

$$\delta(-s)\delta(s) = [d(-s)d(s) + q]. \tag{4.63}$$

Искомый регулятор определяется тождеством Безу

$$d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s) = k(s)\delta(s). \tag{4.64}$$

Нетрудно видеть, что его решение имеет вид

$$d_p(s) = k(s), \quad k_p(s) = d(s) - \delta(s). \tag{4.65}$$

Передаточная функция, связывающая измеряемый выход $y(t)$ с внешним возмущением $f(t)$ имеет вид

$$t_{yf}(s) = \frac{d_p(s)}{d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)} = \frac{1}{\delta(s)}. \tag{4.66}$$

В установившемся режиме (когда $t \to \infty$) выход системы

$$y(t) = a_y(\omega)\sin(\omega t + \varphi_y(\omega)), \tag{4.67}$$

где модуль амплитуды удовлетворяет соотношениям

$$|a_y(\omega)| = |t_{yf}(j\omega)||a| = \frac{|a|}{|\delta(j\omega)|}. \tag{4.68}$$

Учитывая соотношения $|\delta(j\omega)|^2 = d(-j\omega)d(j\omega)+q$ и $d(-j\omega)d(j\omega) \geq 0$, заключаем, что, если коэффициент функционала q определить как

$$q \geq f^{*2}/y^{*2}, \tag{4.69}$$

то регулятор с коэффициентами (4.65) обеспечивает выполнение требования (4.59) к точности.

Для определения запасов устойчивости системы с этим регулятором рассмотрим передаточную функцию

$$w(s) = -\frac{k(s)k_p(s)}{d(s)d_p(s)} = -\frac{k_p(s)}{d(s)} = -1 + \frac{\delta(s)}{d(s)}. \tag{4.70}$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$[1+w(-j\omega)][1+w(j\omega)] = \frac{\delta(-j\omega)\delta(j\omega)}{d(-j\omega)d(j\omega)} = 1+\frac{q}{d(-j\omega)d(j\omega)} \geq 1. \tag{4.71}$$

Это означает, что запас устойчивости системы: $\varphi \geq 60^o, L \geq 2$.

Случай $m < n - 1$, $(\psi = n - 1 - m > 0)$.

В этом случае Коэффициенты функционала (4.60) при управлениях определим из выражения

$$\varepsilon(s^2) = k(-s)k(s)e(-s)e(s), \tag{4.72}$$

в котором полином $e(s) = (\beta s + 1)^{\psi}$ –полином степени $\psi = n - 1 - m$, а коэффициент β определяется как

$$\beta = \frac{1}{\alpha\omega_{\text{ср}}} \tag{4.73}$$

Здесь $\omega_{\text{ср}}$ –частота среза системы оптимальной в смысле функционала (4.60), когда $e(s) = 1$, а число α выбирается из неравенств $5 < \alpha < 10$

Теперь гурвицев полином $\delta(s) = k(s)\delta_1(s)$, где второй полином находится из тождества

$$\delta_1(-s)\delta_1(s) = [d(-s)d(s)e(-s)e(s) + q]. \tag{4.74}$$

Известно [4.11], что при таком выборе полинома $e(s)$ полином $\delta_1(s)$ приближенно может быть представлен как

$$\delta_1(s) \simeq e(s)\delta(s). \tag{4.75}$$

Искомый регулятор определяется теперь из тождества

$$d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s) = k(s)e(s)\delta(s). \tag{4.76}$$

Его решение

$$d_p(s) \simeq k_p(s)e(s), \quad k(s) \simeq d(s) - \delta(s) \qquad (4.77)$$

Регулятор (4.58) с этими полиномами обеспечивает выполнение требования (4.59) к точности и система обладает запасами устойчивости близкими к значениям $\varphi \geq 60^o, L \geq 2$, если коэффициент q удовлетворяет условию (4.69), а коэффициент β достаточно мал, что обеспечивается выражением (4.73)

Процедура(синтеза регулятора минимально–фазового объекта).

1.Решаем тождество Безу (4.64) и находим полиномы (4.65) регулятора.

2. Формируем передаточную функцию (4.70) и находим частоту среза из равенства $|w(j\omega_{\text{ср}})| = 1$.

3.Вычисляем по формуле (4.73) число β и формируем полином $e(s)$.

4.Решая тождество Безу (4.76), находим искомый регулятор.

4.2.2 Многомерный минимально-фазовый объект (r=m)

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Psi f, \ \ y = Dx, \ \ \theta = Nx, \qquad (4.78)$$

где, как и ранее, $f(t)$ – полигармоническая функция с компонентами

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^{p} f_{ik}\sin(\omega_k t + \psi_{ik}) \ \ (i = \overline{1,\mu}), \qquad (4.79)$$

чьи амплитуды f_{ik} , фазы ψ_{ik} $(i = \overline{1,\mu}, \ \ k = \overline{1,p})$ и частоты ω_k $(k = \overline{1,p})$ неизвестны, но амплитуды гармоник подчинены условию

$$\sum_{k=1}^{p} f_{ik}^2 \leq f_i^{*2} \ \ (i = \overline{1,\mu}), \qquad (4.80)$$

где p – известное число гармоник, f_i^* $(i = \overline{1,\mu})$ – заданные числа.

Установившимися ошибками по регулируемым переменным являются числа

$$\theta_{i,\text{уст}} = \lim_{t\to\infty} \sup|\theta_i(t)| \ \ (i = \overline{1,m}) \qquad (4.81)$$

Требуется найти регулятор

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u, \ \ u = D_p x_+ F_p y, \qquad (4.82)$$

при котором выполняются требования к точности

$$\theta_{i,\text{уст}} \leq \theta_i^*, \qquad (4.83)$$

где θ_i^* $(i = \overline{1,m})$ – заданные числа.

Так как в этих объектах вектор состояния не измеряется, то необходим наблюдатель, и поэтому регулятор описывается уравнениями вида (4.37) – (4.38):

$$\dot{\hat{x}} = [A - KD]\hat{x} + Ky + Bu, \ \ u = C'\hat{x}. \qquad (4.84)$$

Нетрудно видеть, что матрицы уравнения (4.82) имеют в рассматриваемом случае вид

$$A_p + A - KD + BC', \ \ B_p = K, \ \ D_p = C', \ \ F_p = 0. \qquad (4.85)$$

Для решения задачи точного управления преобразуем уравнения объекта (4.78) к виду (**??**). В связи с этим запишем на основе уравнения (4.78)

$$y(s) = D(Es - A)^{-1}Bu(s) + D(Es - A)^{-1}\Psi f(s) \qquad (4.86)$$

и определим вектор $\bar{f}(t)$ эквивалентных внешних возмущений, приведенных ко входу объекта, соотношением

$$\bar{f}(s) = \left[D(Es - A)^{-1}B\right]^{-1} D(Es - A)^{-1}\Psi f(s) = T_{\bar{f}f}(s)f(s) \qquad (4.87)$$

и тогда выражение (4.86) принимает вид

$$y(s) = D(Es - A)^{-1}B(u + \bar{f}) \qquad (4.88)$$

Минимально - фазовость объекта гарантирует отрицательность вещественных частей полюсов передаточной матрицы $T_{\bar{f}f}(s)$ и поэтому существует ограниченная вектор - функция $\bar{f}(t)$, удовлетворяющая соотношению (4.87).

Уравнение (4.88) можно теперь записать в виде (3.46)

$$\dot{x} = Ax + B(u + \bar{f}), \ \ y = Dx \qquad (4.89)$$

и использовать для построения матрицы C в (4.84) утверждение 3.2.1. Однако перед этим необходимо найти сумму границ $\sum_{k=1}^{m} \bar{f}_k^{*2}$ $(k=\overline{1,\mu})$ "возмущения" $\bar{f}(t)$.

В связи с этим отметим, что всегда найдется число η такое, что выполняется неравенство

$$\bar{f}_k^T \bar{f}_k = f_k^T T_{\bar{f}f}^T(-j\omega_k) T_{\bar{f}f}(j\omega_k) f_k \le \eta^2 f_k^T f_k \;\; 0 \le \omega_k \le \infty, \;\; k=\overline{1,p}. \tag{4.90}$$

где f_k и $\bar{f}_k$ - μ и m - мерные вектора амплитуд исходного и эквивалентного возмущений.

Суммируя эти неравенства, получим

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{f}_k^T \bar{f}_k \le \eta^2 \sum_{k=1}^{\rho} f_k^T f_k = \eta^2 \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu} f_{ik}^2 = \eta^2 \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{p} f_{ik}^2 \le \eta^2 \sum_{i=1}^{\mu} f_k^{*2} \tag{4.91}$$

Матрицу K коэффициентов усиления наблюдателя будем определять по формуле

$$K = P_0^{(0)} D', \tag{4.92}$$

где $P_0^{(0)}$ – положительно-определенная матрица, являющаяся решением следующего уравнения Риккати

$$P_e A' + A P_e - P_e D' D P_e + Q_c + \beta B V B^T = 0, \tag{4.93}$$

Утверждение. Матрицы C и K регулятора (4.84), обеспечивающего выполнение требований (3.50) к точности, находятся с помощью уравнений Риккати (2.22), (4.93), в первом из которых

$$Q = N' Q_o N, \;\; q_{ii}^{(0)} \ge \frac{p\eta^2 \sum_{k=1}^{\mu} f_k^{*2}}{\theta_i^{*2}} \;\; (i=\overline{1,m}) \tag{4.94}$$

а во втором Q_c и V – произвольные неотрицательно-определенные матрицы, а положительный коэффициент ρ – достаточно велик.

Доказательства утверждения приведено в [?].

4.2.3 Объект общего вида

Продолжим решение задачи точного управления, рассмотренной в разделе 3.2.2, для случая, когда вектор состояния неизмеряем. В этом случае синтезируемая система описывается уравнениями (2.152)

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Psi f, \;\; y = Dx + æ, \;\; \theta = Nx, \tag{4.95}$$

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p y, \;\; u = D_p x_p + F_p y, \tag{4.96}$$

в которых компоненты векторов возмущения и помех измерения являются полигармоническими функциями

$$f_i(t) = \sum_{i=1}^{p_1} f_{ik} \sin(\omega_k t + \varphi_{ik}), \;\; k=\overline{1,\mu} \tag{4.97}$$

$$æ_j(t) = \sum_{q=1}^{p_2} æ_{jq} \sin(\tilde{\omega}_q t + \tilde{\varphi}_{jq}), \;\; j=\overline{1,r}, \tag{4.98}$$

где частоты ω_k и $\tilde{\omega}_q$ и фаза φ_{ik} и $\tilde{\varphi}_{jq}$ $(k=\overline{1,p_1}$, $(q=\overline{1,p_2}$, $i=\overline{1,\mu}$, $j=\overline{1,r})$ неизвестны, а неизвестные амплитуды ограничены

$$\sum_{k=1}^{p_1} f_{ik}^2 \le f_i^{*2} \;\; (i=\overline{1,\mu}), \;\; \sum_{q=1}^{p_2} æ_{jq}^2 \le æ_j^{*2} \;\; (j=\overline{1,r}), \tag{4.99}$$

где p_1 , p_2 , f_i^* и $æ_j^*$ $(i=\overline{1,\mu}$, $j=\overline{1,r})$ – заданные числа.

Аналогично установившемся ошибкам по регулируемым переменным, введем установившееся значение управления как

$$u_{j,\text{уст}} = \lim_{t\to\infty} \sup |u_j(t)| \;\; (j=\overline{1,m}) \tag{4.100}$$

Задача точного управления состоит в нахождении матрицы регулятора (4.96) таких, чтобы система (4.95), (4.96) удовлетворяла требованиям

$$\theta_{i,\text{уст}} \le \theta_i^*, \;\; u_{j,\text{уст}} \le u_j^* \;\; (i,j=\overline{1,m}), \tag{4.101}$$

где θ_i^*, u_j^* $(i,j=\overline{1,m})$ -заданные числа.

Заметим, что решение этой задачи может не существовать. В этом случае требуется найти регулятор (4.96) и числа $\nu_\theta > 1$ и $\nu_u > 1$ такие, что выполняются неравенства

$$\theta_{j,\text{уст}} \le \theta_i^* \nu_\theta, \quad u_{j,\text{уст}} \le u_i^* \nu_u \quad (i, j = \overline{1, m}) \qquad (4.102)$$

Регулятор, решающий эту задачу имеет вид

$$\dot{x}_p = Ax_p + Bu + \Psi f_p, + K(y - Dx_p), \quad u = C^T x_p, \quad f_p = K_f x_p, \qquad (4.103)$$

где

$$C^T = R^{-1}B^T P, \quad K_f = \gamma^{-2} L \Psi^T P, \quad K = \left(E - \gamma^{-2} P_e P\right)^{-1} P_e D^T, \qquad (4.104)$$

а неотрицательно-определенные матрицы P_u и P_e удовлетворяют уравнениям Риккати

$$PA + A^P - PBR^{-1}BP + \gamma^{-2} P \Psi P L \Psi^T P + N^T Q_0 N = 0 \qquad (4.105)$$

$$AP_e + P_e A^T - P_e D D^T P_e + \gamma^{-2} P_e N^T Q_0 N P_e + \Psi L \Psi^T = 0 \qquad (4.106)$$

и неравенству

$$\lambda[PP_e] \le \gamma^2, \qquad (4.107)$$

где Q_0, R и L – весовые диагонально-положительные матрицы размеров $m \times m$, $m \times m$ и $\mu \times \mu$ – соответственно. Элементы первых двух матриц определяются так, чтобы выполнялись требования к установившейся точности, а матрица L, для простоты, полагается единичной.

Утверждение. Если коэффициенты весовых матриц Q_0 и R удовлетворяют условиям

$$q_{ij}^{(0)} \ge \frac{(p_1 + p_2)\left(\sum_{i=1}^{\mu} f_i^{*2} + \sum_{j=1}^{r} æ_j^{*2}\right)}{\Theta_i^{*2}}, \qquad r_{ij}^{(0)} \ge \frac{(p_1 + p_2)\left(\sum_{i=1}^{\mu} f_i^{*2} + \sum_{j=1}^{r} æ_j^{*2}\right)}{u_i^{*2}} \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (4.108)$$

то установившиеся движение в системе (4.95), (4.103), матрицы регулятора которой вычисляется по формулам (4.104) – (4.106) и при выполняется неравенство (4.107), обладает свойством

$$\theta_{j,} \le \theta_{i,}^* \gamma^2, \quad u_{j,} \le u_{i,}^* \gamma^2 \quad (i, j = \overline{1, m}). \qquad (4.109)$$

Доказательство утверждения приведено в [4.10]. Из этого утверждения, доказанного в [4.10], следует, что числа ν_θ и ν_u в неравенствах (4.102) равны γ^2 и поэтому при минимальном $\gamma = \gamma^*$ эти числа $\nu_\theta = \nu_u = \gamma^{*2}$. Если $\gamma^{*2} \le 1$, то задача решена и требования (4.101) к точности выполняются.

Заметим, что переходные процессы в системе (4.95), (4.103), удовлетворяющей требованиям к точности, могут быть очень медленными. Выбирая элементы матрицы L , отличные от единичных, можно [4.10] увеличить быстродействие системы.

4.2.4 Программное обеспечение

Система ГАММА:

1.ДирективаD442 (Точное управление объектом второго вида).

2.Директива D443 (Точное управление объектом третьего вида).

3.Директива D444 (Точное управление объектом четвертого вида).

4.3 Комментарии

Вектор состояния доступен для измерения лишь в редких случаях. Поэтому сразу после появления LQ -оптимизации началась разработка алгоритмов наблюдения вектора состояния по измеряемым переменным для того, чтобы реализовать регулятор, полученный в результате LQ -оптимизации.

Первым результатом в этом направлении явился фильтр Калмана [4.1], который , в частности для стационарного объекта описывается уравнениями (4.10),(4.15),(4.16. Затем был построен наблюдатель Люенбергера [4.2]. Кроме того, в [4.3] для восстановления использован очевидный прямой алгоритм: измеряемые переменные дифференцируются необходимое число раз с учетом уравнений объекта (при отсутствии внешних возмущений) и тогда решение получившейся системы линейных алгебраических уравнений дает выражение вектора состояния через измеряемый вектор и вектор управлений и их производные.

Исследование систем с фильтром Калмана привело к известной теореме разделения [4.4], следствием которой является структура (4.40) характеристического полинома системы.

Было обнаружено [4.5], [4.6], что использование наблюдателей может приводить к негрубым системам. Поэтому возник вопрос: нельзя ли построить наблюдатели так, чтобы запасы устойчивости в системе с наблюдателем были близки к запасам устойчивости исходной системы с регулятором состояния? Построение таких наблюдателей оказалось возможным для минимально- фазовых объектов, у которых число управлений равно числу измеряемых переменных. Такие наблюдатели Люенбергера и фильтры Калмана были построены в [4.7], [4.6] соответственно. Это направление исследований было названо в зарубежной научной литературе восстановлением робастности (robust recovery, Loop Transfer Recovery-LTR).

Заметим, что в системах с прямым алгоритмом восстановления задача LTR была решена раньше указанных работ для случая, когда используются обобщенные запасы устойчивости. Методы синтеза регуляторов на основе прямого алгоритма восстановления приведены в книге [3.1] и поэтому в этой главе изложение ограничено восстановлением грубости с фильтром Калмана (Утверждение 4.1.7, полученное в [4.6])

Процедура 4.2.2. синтеза регуляторов является компактной формой материала книги [3.1], а утверждения 4.2.2. и 4.2.3. доказаны в

[3.13] , [4.10] соответственно. Отметим, что $H\infty$ -оптимальное управление может приводить к негрубым системам, так как оно содержит наблюдатель аналогичный фильтру Калмана. В [4.8] построены численные примеры, подтверждающие такую возможность, а в [4.9] это показано для общего случая и исследуется причина негрубости.

5 Начала адаптивного управления

Построение управления при неопределенных параметрах объекта всегда являлось одной из центральных проблем теории автоматического управления. Если обратиться к истории, то можно заметить, что уже критерий Найквиста, установленный в 1932 г., явился методом исследования устойчивости систем, параметры которых неизвестны, а известны лишь частотные характеристики разомкнутой системы, получаемые экспериментально. В последующие годы (1939-1965) были разработаны теории систем с большими коэффициентами усиления [5.1] и систем с переменной структурой [5.2], которые позволяют уменьшить влияние изменений параметров объектов и неконтролируемых внешних возмущений. Однако поскольку эти системы основаны на повышении (в явной или неявной формах) коэффициента усиления разомкнутой цепи, это требует учета "малых"постоянных времени, нелинейных факторов, запаздывания. В противном случае нарушается устойчивость системы. Таким образом, без увеличения данных об объекте не удается существенно повысить коэффициент усиления.

Это приводит к необходимости построения регуляторов, параметры которых изменяются (адаптируются,самоприспосабливаются) так, чтобы при изменяющихся параметрах объекта точность и качество системы оставались неизменными. Системы с такими регуляторами были названы самонастраивающимися [5.4] либо адаптивными [5.5].

5.1 Виды адаптивного управления .

5.1.1 Идентификационное управление

Рассмотрим объект, описываемый уравнениями (1.86)

$$N_{[i]}^{(2)}\ddot{q} + N_{[i]}^{(1)}\dot{q} + N_{[i]}^{(0)}q = l_{[i]}u + m_{[i]}f, \quad t_{i-1} \le t \le t_i$$
$$y = c_{y[i]}^{(0)}q + c_{y[i]}^{(1)}\dot{q}, \quad z = c_{z[i]}^{(0)}q + c_{z[i]}^{(1)}\dot{q}, \tag{5.1}$$

где i , $(\overline{i=1,N})$ – номер интервала стационарности обьекта в течении которого его коэффициенты постоянны. Переходя к построению алгоритма управления объектом (5.1), приведем эвристические соображения, которые порождают важный класс алгоритмов управления при неопределенных параметрах объекта.

В связи с этим рассмотрим следующие задачи, которые решает конструктор системы стабилизации этим объектом:

1)определение (идентификация) коэффициентов объекта управления,

2) синтез алгоритма работы регулятора (синтез регулятора) при известных параметрах объекта, обеспечивающего требуемое качество работы системы,

3) конструирование регулятора, реализующего синтезированный алгоритм.

Поскольку коэффициенты объекта (5.1) изменяются, то эти три задачи должны решаться в процессе работы объекта, притом решаться автоматически, без участия человека. Другими словами, если при неизвестных, но постоянных параметрах объекта указанные задачи решались в процессе проектирования системы, то при изменяющихся во времени параметрах они должны решаться в естественных условиях работы объекта ("на борту"объекта) и в темпе работы объекта. Это означает, что алгоритм регулятора должен изменяться в процессе работы системы, приспосабливаясь (самонастраиваясь, адаптируясь) за время $T_{ad} < t_i - t_{i-1}, (\overline{i=1,N})$ к изменяющимся коэффициентам объекта так, чтобы качество работы системы оставалось неизменным. Для построения такого алгоритма запишем уравнение регулятора для объекта (5.1) с неопределенными параметрами

$$\dot{x}_p = A_p(\alpha)x_p + b_p(\alpha)y + \psi_p g; \quad u = d_p(\alpha)x_p + c(\alpha)y, \tag{5.2}$$

где $x_p(t)$ – n_p -мерный вектор состояния регулятора, $A_p(\alpha)$ – матрица, $b_p(\alpha)$, $d_p(\alpha)$, ψ_p – векторы, $c(\alpha)$ – скаляр, зависящие от неизвестного вектора (α) коэффициентов объекта (5.1). Зависимости коэффициентов регулятора (5.2) от коэффициентов объекта могут быть как аналитическими (заданными с помощью формул), так и алгоритмическими.

Последнее следует понимать в том смысле, что существует алгоритм (процедура), с помощью которого для каждого фиксированного вектора α можно найти матрицу A_p вектора b_p , d_p и скаляр c . В качестве таких алгоритмов могут выступать, в частности, процедуры синтеза регуляторов, приведенные в главах 3 и 4.

Если в результате идентификации определено истинное значение α^* вектора α , то, полагая в (5.2) $\alpha = \alpha^*$ получим искомый регулятор.

При таком подходе процесс управления не может быть начат, пока не закончится идентификация параметров и не будут вычислены (по формулам либо на основе процедур) матрица $A_p(\alpha^*)$, векторы $b_p(\alpha^*)$, $d_p(\alpha^*)$ и скаляр $c(\alpha^*)$ регулятора (5.2).

Естественно, не дожидаясь окончания процесса идентификации, использовать оценки $\hat{\alpha}$, получаемые в результате идентификации в течении заданного времени, и тогда уравнение (5.2) примет вид

$$\dot{x}_p = A_p(\hat{\alpha})x_p + b_p(\hat{\alpha})y + \psi_p g, \quad u = d_p(\hat{\alpha})x_p + c(\hat{\alpha})y, \tag{5.3}$$

Уравнения (5.3) описывают *идентификационное адаптивное управление*.

Пример. Пусть объектом управления является некоторый химико- технологический процесс, протекающий в замкнутом резервуаре-реакторе. В моменты времени 0, h, $2h$, ..., kh, ... в реактор поступает сырье, имеющее температуру $f(k)$ (параметр h, как и ранее, опускаем), и доза катализатора $u(k)$. Количество продукта реакции $y(k)$ зависит от концентрации промежуточного вещества $x(k)$:

$$y(k) = dx(k), \tag{5.4}$$

а величина $x(k+1)$ определяется значениями $x(k)$, $u(k)$, $f(k)$:

$$x(k+1) = \phi x(k) + ru(k) + f(k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.5}$$

Величины $y(k)$ и $f(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ доступны непосредственному измерению, а доза катализатора $u(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ является управляющим воздействием, которое влияет на ход процесса.

Коэффициенты ϕ, r, d соотношений (5.4), (5.5) зависят от активности катализатора, скорости протекания реакции, конструкции установки и т п.

Пусть целью управления является поддержание выходного продукта $y(k)$ на заданном уровне $g = \text{const}$. Если значения параметров ϕ, r, d известны точно, то легко построить алгоритм работы регулятора, обеспечивающего достижение цели управления Этот алгоритм имеет вид

$$u(k) = \frac{g - \phi y(k) - df(k)}{dr}. \tag{5.6}$$

Действительно, подставляя (5.6) в (5.5), получим, что

$$y(k+1) = g. \tag{5.7}$$

В реальных условиях многие факторы, от которых зависят параметры ϕ, r, d недоступны непосредственному измерению либо могут изменяться во времени неизвестным образом (например, активность катализатора меняется при его отравлении, при переходе на новую партию катализатора и т д.). Поэтому управление осуществляется в условиях неопределенности, когда законом управления (5.6) воспользоваться нельзя.

Переходя к построению идентификационного алгоритма адаптивного управления, обозначим

$$\alpha_1 = \phi, \quad \alpha_2 = r, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = d \tag{5.8}$$

и запишем закон управления (5.6) как функцию неопределенных параметров α_i $(i = \overline{1,4})$:

$$u(k) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2\alpha_4}y(k) - \frac{\alpha_3\alpha_4}{\alpha_2\alpha_4}f(k) + \frac{1}{\alpha_2\alpha_4}g. \tag{5.9}$$

Для определения коэффициентов закона управления (5.9) идентифицируем параметры объекта (5.4), (5.5), уравнения которого можно с учетом введенных обозначений записать в виде

$$y(k+1) = \alpha_1 y(k) + \alpha_4\alpha_2 u(k) + \alpha_3\alpha_4 f(k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.10}$$

При $k = 0, 1, 2$ получим систему из трех алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} y(1) &= \alpha_1 y(0) + \alpha_2\alpha_4 u(0) + \alpha_3\alpha_4 f(0); \\ y(2) &= \alpha_1 y(1) + \alpha_2\alpha_4 u(1) + \alpha_3\alpha_4 f(1); \\ y(3) &= \alpha_1 y(2) + \alpha_2\alpha_4 u(2) + \alpha_3\alpha_4 f(2), \end{aligned} \tag{5.11}$$

решая которую найдем числа α_1^*, $\alpha_2^*\alpha_4^*$, $\alpha_3^*\alpha_4^*$. Подставляя эти числа в (5.9), получим управление, обеспечивающее достижение цели (5.7).

Уравнение (5.9) вместе с процедурой решения алгебраических уравнений (5.11) образуют алгоритм идентификационного адаптивного управления.

Заметим, что столь простой алгоритм адаптивного управления обусловлен во многом доступностью для измерения $f(k)$ и отсутствием помех в измерении $y(k)$. В действительности $f(k)$ недоступно непосредственному измерению, это приводит к процессу идентификации, который более сложен чем решение уравнений (5.11) .

5.1.2 Идентификация

На каждом из интервалов стационарности объект (5.1)при $f(t) = \chi(t) = 0)$ описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + bu, \ \ y = dx; \ \ x(t_0) = x^{(0)} \tag{5.12}$$

с неизвестными коэффициентами. Эти уравнения в форме "вход-выход":

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} d_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} k_j u^{(j)} \tag{5.13}$$

Пусть движение объекта (5.12) возбуждаются известным (измеряемым) входным сигналом $u(t)$. Анализируя сигнал $y(t)$ на выходе нужно определить параметры объекта. Решение этой задачи – определение матрицы A и векторов b и d -по сигналам входа $u(t)$ и выхода $y(t)$ не единственно. Действительно, рассмотрим наряду с (5.12) систему уравнений

$$\dot{\tilde{\tilde{x}}} = M^{-1}AM\tilde{\tilde{x}} + M^{-1}b\tilde{\tilde{u}}; \ \ \tilde{\tilde{y}} = dM\tilde{\tilde{x}}; \ \ \tilde{\tilde{x}}(t_0) = Mx^{(0)}, \tag{5.14}$$

где M – произвольная, неособая $(\det M \neq 0)$ матрица.

Если входное воздействие $\tilde{\tilde{u}}(t) = u(t)$, то выходные сигналы обеих систем совпадают $\tilde{\tilde{y}}(t) = y(t)$, хотя параметры матриц в них различны. В совпадении выходных сигналов нетрудно убедиться, преобразуя (5.14) по Лапласу и вычисляя

$$\tilde{\tilde{y}}(s) = dM(Es - M^{-1}AM)^{-1}M^{-1}b\tilde{\tilde{u}} + dM(Es - M^{-1}AM)^{-1}M^{-1}x^{(0)} =$$
$$= d(Es - A)^{-1}b\tilde{\tilde{u}} + d(Es - A)^{-1}x^{(0)} = y(s)$$

при $\tilde{\tilde{u}}(s) = u(s)$.

В связи с этим возникает вопрос: а существует ли набор параметров, который единственным образом определяется на основе сигналов "вход-выход"? Таким набором параметров являются параметры $d_i \ \ (i = 0, \, n-1)$, $k_j \ \ (j = 0, \, m)$ объекта в форме (5.13).

Поэтому далее под идентификацией параметров объекта будем подразумевать определение его параметров в форме "вход - выход". Термин "идентификация"здесь и далее используется в узком смысле как определение параметров математической модели (5.13) объекта, структура которой (линейный характер дифференциального уравнения (5.13), его стационарность, размерность вектора переменных состояния n) известна. В широком смысле идентификация включает в себя определение по входу и выходу объекта структуры его математической модели, определение ее параметров и оценивание (восстановление) вектора его переменных состояния.

Структура модели определяется физическими законами, которые определяют движение объекта (законы Кирхгофа, Максвелла, законы сохранения массы, энергии и импульса, законы распределения количества теплоты и энтропии). Из этих законов следуют нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, которые линеаризуются, а затем упрощаются (редуцируются) до обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих структуру модели. Эти сведения образуют априорную информацию об объекте. Параметры объекта определяются в результате измерений входа и выхода объекта. Измерения и последующее вычисление параметров составляют апостериорную информацию. Схема идентификации (в широком смысле) приведена на рис. 5.1.

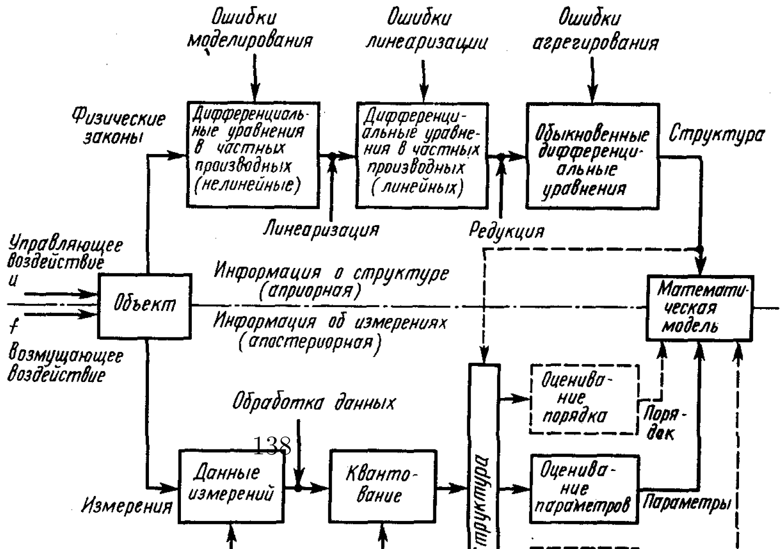

Рис. 5.1

.

5.1.3 Прямой алгоритм адаптивного управления.

Идентификационное адаптивного управления в сущности является моделью процесса проектирования, осуществляемого в темпе работы объекта, и идентификационная часть этого алгоритма вызвана скорее прототипом (в качестве которого выступает процесс проектирования), чем существом задачи. Дело в том, что алгоритм идентификации слабо связан с целью управления, хотя и служит ее достижению. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли избежать идентификации и искать законы изменения параметров регулятора (5.2) исходя непосредственно (прямо) из целей управления?. Другими словами, параметры регулятора (5.2) должны изменяться в зависимости от значения критерия качества работы системы (от функционирования системы).

В этом случае говоря о *прямом адаптивном управления* Так, для объекта (5.13) оно описывается уравнениями:

$$u^{(n_p)} + \sum_{i=0}^{n_p-1} \beta_{\mu_p+i}(t)u^{(i)} = \sum_{j=0}^{\mu_p-1} \beta_j y^{(j)}; \qquad (5.15)$$

$$\dot{\beta}_i = \gamma_i(\beta_0, \ldots, \beta_{\mu_p+n_p-1}, y, \dot{y}, \ldots, y^{\mu_p-1}, u) \ \ (i = \overline{0,\ \mu_p+n_p-1}), \qquad (5.16)$$

где β_i $(i = \overline{0,\ \mu_p+n_p-1})$ – настраиваемые (подстраиваемые) параметры регулятора; γ_i $(i = \overline{0,\ \mu_p+n_p-1})$ – функции, зависящие от критерия качества системы (цели управления). Уравнения (5.16) описывают алгоритм настройки параметров.

Дискретное прямое адаптивное управление описывается разностными уравнениями

$$u(k) + \sum_{i=0}^{n_p} \beta_{\mu_p+i}(k)u(k-i) = \sum_{j=0}^{\mu_p} \beta_j(k)y(k-j). \qquad (5.17)$$

$$\beta_i(k+1) = \gamma_i(\beta_0(k), \ldots, \beta_{\mu_p+n_p}(k),\ y(k),\ y(k-1), \ldots, y(k-\mu_{p+1}), u(k),\ u(k-1), \ldots, u(k-n_p)\ \ (i = \overline{0,\ \mu_p+n_p}). \qquad (5.18)$$

Пример. Построим прямой алгоритм адаптивного управления химико- технологическим процессом, описанным в примере 5.1.1.

В соответствии с (5.6) уравнение регулятора этого процесса имеет вид

$$u(k) = \beta_0(k)y(k) + \beta_1(k)g + \beta_2(k)f(k) \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (5.19)$$

где $\beta_0(k)$, $\beta_1(k)$, $\beta_2(k)$ – настраиваемые параметры (коэффициенты).

Требуется найти закон изменения этих параметров, при котором достигается цель управления (5.7).

Для нахождения такого закона введем критерий качества

$$J(k+1) = (y(k+1) - g)^2 \qquad (5.20)$$

и тогда цель управления может быть интерпретирована как минимизация функции (5.20). Для ее минимизации применим градиентный метод, состоящий в изменении настраиваемых параметров в направлении, противоположном градиенту функции $J(k+1)$ по настраиваемым параметрам.

Выражая $J(k+1)$ через эти параметры, получим

$$J(k+1) = [\phi y(k) + df(k) + dr(\beta_0(k)y(k) + \beta_1(k)g + \beta_2(k)f(k)) - g]^2. \qquad (5.21)$$

Вычисляя теперь частные производные функции (5.21) по $\beta_0(k)$, $\beta_1(k)$, $\beta_2(k)$, приходим к алгоритму (5.18) настройки параметров:

$$\left.\begin{aligned} \beta_0(k+1) &= \beta_0(k) - 2a_1(k)(y(k+1) - g)dry(k); \\ \beta_1(k+1) &= \beta_1(k) - 2a_1(k)(y(k+1) - g)drg; \\ \beta_2(k+1) &= \beta_2(k) - 2a_1(k)(y(k+1) - g)drf(k), \end{aligned}\right\} \qquad (5.22)$$

где $a_1(k) > 0$ – коэффициент пропорциональности.

При правильном выборе этого коэффициента

$$\lim_{k\to\infty} J_{(k+1)} = 0. \qquad (5.23)$$

Это означает, что прямой алгоритм (5.19), (5.22) адаптивного управления химико- технологическим процессом обеспечивает достижение цели управления (5.7). Правда, эта цель достигается не на первых нескольких шагах, как в идентификационном алгоритме, а при достаточно большом числе шагов управления.

При наличии помех в измерении $y(k)$ требование (5.7) следует ослабить и цель управления формулировать как требование выполнения неравенства

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} J(k+1) < \Delta, \qquad (5.24)$$

где величина $\Delta > 0$ должна быть согласована с уровнем помех.

Соотношение (5.24) означает, что для любой траектории системы (5.4), (5.5), (5.19), (5.22) существует момент времени k^*, начиная с которого $J(k+1) < \Delta$.

В случае, когда помехи носят стохастический характер, цель управления следует задавать "в среднем":

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} M\left\{J(k+1)\right\} < \Delta. \qquad (5.25)$$

5.1.4 Структура адаптивных систем

Идентификационный и прямой алгоритмы адаптивного управления описываются уравнениями

$$\dot{x}_p = \varphi_p(x_p,\, y,\, g,\, \beta);\;\; u = w_p(x_p,\, y,\, \beta);\;\; x_p(t_0) = x_p^{(0)},; \qquad (5.26)$$

$$\dot{\beta} = \gamma(\beta,\, y,\, u,\, g),\;\; \beta(t_0) = \beta^{(0)}, \qquad (5.27)$$

где $\beta(t)$ – n_β -мерный вектор настраиваемых параметров регулятора (в случае идентификационного алгоритма $\beta(t)$ является оценкой вектора неопределенных параметров α); φ_p , γ_p – n_p и n_β -мерные вектор-функции своих аргументов, подлежащие, как и функции w_p , определению исходя из заданных целей управления.

Уравнения (5.26) описывают алгоритм работы регулятора, а уравнения (5.27) - алгоритм адаптации.

Устройство, реализующее алгоритм адаптации, называется *адаптером* [5.5].

Таким образом, адаптивный регулятор состоит из регулятора и адаптера. Структурная схема адаптивной системы приведена на рис. 5.2.

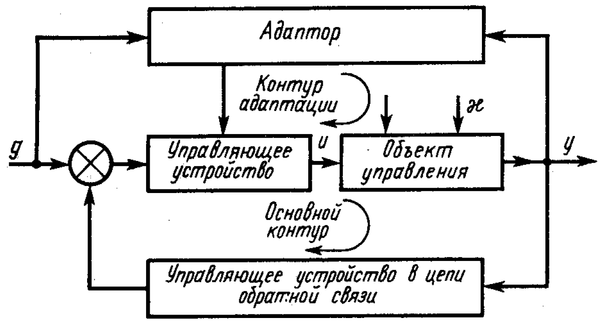

Рис. 5.2

Регулятор, приведенный на этом рисунке, состоит из двух частей: управляющего устройства (последовательного корректирующего контура) и управляющего устройства в цепи обратной связи (параллельного корректирующего контура). Первая часть содержит настраиваемые параметры, вторая - неизменна. Часто говорят, что объект вместе с регулятором - это *основной контур регулирования*, а изменяющаяся часть регулятора и адаптер составляют *контур адаптации (контур самонастройки)*. Если цель управления задается с помощью эталонной модели, то эталонная модель включается в адаптор

5.2 Системы с эталонной моделью

Рассмотрим динамический объект, описываемый линейными дифференциальными уравнениями с неопределенными параметрами. Будем полагать, что неизмеряемые внешние возмущения и помехи измерения отсутствуют, а движения объекта возбуждаются начальными отклонениями (условиями) либо измеряемыми задающим воздействием. В этой ситуации часто используют эталонную модель, которая является физическим устройством, на вход которого подаются те же воздействия, что и на объект управления, а разность сигналов с выходов объекта и эталонной модели служит для изменения параметров адаптивного регулятора.

5.2.1 Адаптация с использованием "чистых"производных

Управление известным объектом

Рассмотрим физическое устройство, называемое эталонной моделью, которое описывается уравнением

$$y_m^{(n_m)}+d_{m,n_m-1}y_m^{(n_m-1)}+\ldots+d_{m,1}\dot{y}_m+d_{m,0}y_m = k_{m,m_m}g^{(m_m)}+\ldots+k_{m,0}g, \tag{5.28}$$

где $y_m(t)$ – измеряемый выход, $g(t)$ – задающее воздействие- известное заранее, либо измеряемый сигнал.

Наряду с эталонной моделью рассмотрим систему управления

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + d_1\dot{y} + d_0 y = k_m u^{(m)} + \ldots + k_0 u, \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} &d_{p,n_p}u^{(n_p)} + d_{p,n_p-1}u^{(n_p-1)} + \ldots + d_{p,1}\dot{u} + d_{p,0}u \\ &= k_{p,m_p}y^{(m_p)} + \ldots + k_{p,0} + l_p g^{(p)} + \ldots + l_0 g. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Пусть коэффициенты объекта (5.29) известны, и пусть требуется найти коэффициенты регулятора (5.30) такие, чтобы выходы объекта этой системы и эталонной модели, возбуждаемые задающим воздействием $g(t)$ обладали свойством

$$\lim_{t\to\infty} e = \lim_{t\to\infty}(y(t) - y_m(t)) = 0. \tag{5.31}$$

Таким образом, эталонная модель задает желаемое движение системы (5.29), (5.30).

Рассмотрим условия, при которых эта задача слежения за выходом эталонной модели, разрешима.

В связи с этим сравним изображения выходов при нулевых начальных условиях

$$y(s) = w_{cl}(s)g(s) \quad y_m(s) = w_m(s)g(s), \tag{5.32}$$

где $w_{cl}(s) = \dfrac{k(s)l(s)}{d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)}$, $w_m(s) = \dfrac{k_m(s)}{d_m(s)}$.

Вынужденные движения рассматриваемых систем совпадают, если $w_{cl}(s) = w_m(s)$ или

$$\frac{k(s)l(s)}{d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)} = \frac{k_m(s)}{d_m(s)}. \tag{5.33}$$

Степени полиномов числителя и знаменателя левой части этого равенства, как правило, превышают степени соответствующих полиномов правой части, и поэтому для его выполнения необходимо сокращение части этих полиномов. Найдем условия, при которых такое сокращение допустимо. Представим $k(s) = k^+(s)k^-(s)$, где $k^-(s)$ – полином, корни которого лежат в левой полуплоскости корней $(Re\, s_i < 0, \quad (i = \overline{1,m})$, а корни полинома $k^+(s)$ лежат в правой полуплоскости и на границах указанных полуплоскостей. Если полином $k^+(s)$ не является делителем полинома $k_m(s)$, то он должен делителем характеристического полинома системы (5.29), (5.30) $D(s) = d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)$, что не допустимо, так как эта система должна быть асимптотически устойчивой. В связи с этим полином $k_m(s)$ модели должен удовлетворять условию

$$k_m(s) = k^+(s)\bar{k}_m(s). \tag{5.34}$$

Это означает, что неустойчивые нули объекта (корни $k^+(s)$) нельзя изменить и их следует включить в $k_m(s)$) .

Так как $k^-(s)$ является делителем $D(s)$, то полином регулятора $d_p(s)$ (5.30) имеет следующую структуру $d_p(s) = k^-(s)\bar{d}_p(s)$.

Таким образом (5.33) принимает вид

$$\frac{k^-(s)k^+(s)l(s)}{k^-(s)(d(s)d_p(s) - k^+(s)k_p(s))} = \frac{k^+(s)\bar{k}_m(s)}{d_m(s)}$$

или

$$\frac{l(s)}{d(s)d_p(s) - k^+(s)k_p(s)} = \frac{\bar{k}_m(s)}{d_m(s)} \tag{5.35}$$

Отсюда следуют уравнения для определения коэффициентов регулятора (5.30)

$$l(s) = \bar{k}_m(s); \tag{5.36}$$

$$d(s)\bar{d}_p(s) - k^+(s)k_p(s) = d_m(s). \tag{5.37}$$

Решая тождество Безу (5.37), находим полиномы $\bar{d}_p(s)$ и $k_p(s)$ и вычисляем $d_p(s) = k^-(s)\bar{d}_p(s)$.

Полученный регулятор обеспечивает (при нулевых, либо совпадающих начальных отклонениях эталонной модели и системы (5.29), (5.30)) совпадение их выходов: $y(t) = y_m(t)$. Исчезающая ошибка $e(t)$, обладающая свойством (5.31), вызвана только не совпадением начальных условий этих систем.

Постановка задачи

Рассмотрим объект (5.29) с неизвестными коэффициентами. Будем полагать, что его степени n и m известны, и кроме того известно, что он является минимально- фазовым. Это означает, что полином $k(s)$ – гурвицев полином, (его корни лежат в левой полуплоскости $k(s) = k^-(s)$, $k^+(s) = 1$).

Запишем его передаточную функцию в виде

$$w_0(s) = \frac{k(s^m + \ldots + k_1 s + k_0)}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0} = \frac{kk(s)}{d(s)}. \qquad (5.38)$$

Аналогично запишем передаточную функцию эталонной модели (5.28), предполагая здесь и далее $n_m = n$, $m_m = m$,

$$w_m(s) = \frac{k_m(s^m + \ldots + k_{m,1} s + k_{m,0})}{s^n + d_{m,n-1}s^{n-1} + \ldots + d_{m,1} s + d_{m,0}} = \frac{k_m k_m(s)}{d_m(s)}, \qquad (5.39)$$

где $k_m(s)$ и $d_m(s)$ – заданные гурвицевы полиномы.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм настройки коэффициентов регулятора (5.30) так, чтобы разность выходов системы (5.29), (5.30) и эталонной модели стремилась к нулю (выполнялось условие (5.31)). Структурная схема адаптивной системы приведена на рис. 5.4.

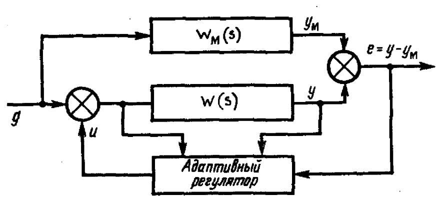

Рис. 5.4

Приведем решение этой задачи для различных структур объекта управления.

Алгоритм адаптации

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$(s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0) = u + h_n g. \qquad (5.40)$$

Нетрудно видеть, что он минимально-фазовый и полином $k(s) = 1$.

Эталонная модель имеет вид

$$(s^n + d_{m,n-1}s^{n-1} + \ldots + d_{m,1} s + d_{m,0}) = u + h_m g. \qquad (5.41)$$

Переходя к построению адаптивного регулятора, будем полагать, что возможно точное (чистое) вычисление производных измеряемых переменных y и y_m до $n-1$ -го порядка включительно. Тогда уравнение регулятора будем искать в виде

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) y^{(i)} + \beta_n(t) g, \qquad (5.42)$$

где $y^{(i)}$ – i -я производная $y(t)$, $\beta_i(t)$ $(i = \overline{0,n})$ – настраиваемые параметры регулятора.

Подставляя (5.42) в (5.40) и вычитая из (5.40) уравнение (5.41), получим уравнение для ошибки $e = y - y_m$:

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_{m,i}s^i\right) e = \sum_{i=0}^{n-1} (d_{m,i} - d_i + \beta_i)\, y^{(i)} + (-h_m + h_n + \beta_n)\, g. \qquad (5.43)$$

Утверждение. Алгоритм настройки параметров регулятора (5.42), при котором достигается цель адаптации ($\lim\limits_{t\to\infty} e = 0$), имеет вид

$$\dot{\beta}_i = -\gamma_j^{-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} l_j e^{(j)}\right) y^{(i)} \quad (i = \overline{0, n-1}); \tag{5.44}$$

$$\dot{\beta}_n = -\gamma_n^{-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} l_j e^{(j)}\right) g, \tag{5.45}$$

где $\gamma_i > 0$ $(i = \overline{0, n})$, а вектор $l = \|l_0, \ldots, l_{n-1}\|'$ определяется из выражения

$$l = \check{P}\check{b}, \tag{5.46}$$

в котором положительно-определенная матрица $\check{P}$ является решением уравнения Ляпунова

$$\check{A}_m'\check{P} + \check{P}\check{A}_m' = -Q, \tag{5.47}$$

где Q – произвольная положительно-определенная матрица, матрица $\check{A}$ и вектор $\check{b}$ –матрица и вектор уравнения объекта в форме Фробениуса (2.109)

Доказательство утверждения получено в работах [5.10], [5.8].

Пример. Пусть имеется объект управления, описываемый уравнением

$$\ddot{y} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_0 y = u + h_2 g, \tag{5.48}$$

параметры которого α_0 , α_1 , h_2 неизвестны Требуется найти алгоритм настройки параметров регулятора

$$u = \beta_0(t)y + \beta_1(t)\dot{y} + \beta_2(t)g, \tag{5.49}$$

при котором выход y объекта приближается к значениям выходной переменной эталонной модели, описываемой уравнением

$$\ddot{y}_m + a_{m1}\dot{y}_m + a_{m0}y_m = hg, \tag{5.50}$$

с заданными параметрами. На основе (5.44), (5.45) получаем искомый алгоритм настройки

$$\left.\begin{aligned} \dot{\beta}_0 &= -\gamma_0^{-1}(l_0 e + l_1\dot{e})y; \\ \dot{\beta}_1 &= -\gamma_1^{-1}(l_0 e + l_1\dot{e})\dot{y}; \\ \dot{\beta}_2 &= -\gamma_2^{-1}(l_0 e + l_1\dot{e})g, \end{aligned}\right\} \tag{5.51}$$

в котором γ_0 , γ_1 , γ_2 – произвольные положительные числа, $l_0 = \check{p}_{12}$, $l_1 = \check{p}_{22}$, где $\check{p}_{12}$, $\check{p}_{22}$ – элементы матрицы $\check{P} = \left\| \begin{matrix} \check{p}_{11} & \check{p}_{12} \\ \check{p}_{12} & \check{p}_{22} \end{matrix} \right\|$, являющейся решением матричного уравнения

$$\left\| \begin{matrix} 0 & -a_{m0} \\ -1 & -a_{m1} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \check{p}_{11} & \check{p}_{12} \\ \check{p}_{12} & \check{p}_{22} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \check{p}_{11} & \check{p}_{12} \\ \check{p}_{12} & \check{p}_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -a_{m0} & -a_{m1} \end{matrix} \right\| = -\left\| \begin{matrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{matrix} \right\|. \tag{5.52}$$

Здесь q_{11} , q_{22} – произвольные положительные числа.

Структурная схема адаптивной системы приведена на рис.5.5

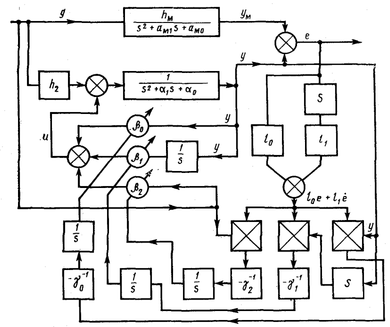

Рис. 5.5

5.2.2 Реализуемые алгоритмы адаптивного управления

Приведенные выше алгоритмы адаптации применимы для объектов, описываемых уравнениями частного вида (5.40) при условии точного вычисления производных измеряемой переменной.

Перейдем теперь к алгоритму адаптации для общего случая одномерного объекта (5.29) и эталонной модели (5.28). Этот алгоритм не содержит "чистых"производных измеряемой переменной.

Требуется найти адаптивный регулятор, такой, что выполняется целевое условие

$$\lim_{t\to\infty}(y-y_m)=0. \tag{5.53}$$

Опишем процедуру построения такого регулятора для простейшего случая, когда $m=n-1$.

Структурная схема адаптивной системы приведена на рис. 5.6.

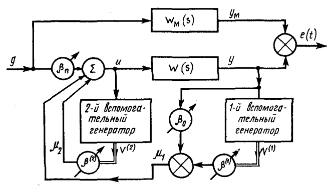

Рис. 5.6

В этой схеме вспомогательные генераторы описываются уравнениями

$$\dot v^{(1)}=Fv^{(1)}+\check by;\ \ \dot v^{(2)}=Fv^{(2)}+\check bu, \tag{5.54}$$

а сигналы μ_1 , μ_2 имеют вид

$$\mu_1=\beta_0y+\beta^{(1)'}v^{(1)};\ \ \mu_2=\beta^{(2)'}v^{(2)}, \tag{5.55}$$

где $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ – $n-1$ -мерные векторы переменных состояния вспомогательных генераторов; $\beta_0(t)$ $\beta^{(1)}(t)$ $\beta^{(2)}(t)$ – настраиваемые параметры, где $\beta^{(1)}=\|\beta_1,\dots,\beta_{n-1}\|'$, $\beta^{(2)}=\|\beta_{n+1},\dots,\beta_{2n}\|'$; уравнения (5.55) имеют форму Фробениуса (2.109), в которой последняя ($n-1$ -я строка) имеет вид $\rho=-\|\rho_0,\dots,\rho_{n-2}\|$, а вектор

$$\check b'=\|0,0,\dots,1\|.$$

Очевидно, что

$$\mu_1(s)=\beta_0y+\beta^{(1)'}\left(Es-F\right)^{-1}\check by=\left[\beta_0+\frac{\beta^{(1)}(s)}{\rho(s)}\right]y(s)=m_1(s)y(s), \tag{5.56}$$

где

$$\begin{aligned}&\rho(s)=s^{n-1}+\rho_{n-2}s^{n-2}+\dots+\rho_1s+\rho_0;\\&\beta^{(1)}(s)=\beta_1s^{n-2}+\dots+\beta_{n-2}s+\beta_{n-1};\\&\mu_2(s)=\beta^{(2)'}\left(Es-F\right)^{-1}\check b'u=\frac{\beta^{(2)}(s)}{\rho(s)}u(s)=m_2(s)y(s).\end{aligned} \tag{5.57}$$

Здесь

$$\beta^{(2)}(s)=\beta_{n+1}s^{n-2}+\dots+\beta_{2n-2}s+\beta_{2n-1};\ \ m_2(s)=\frac{\beta^{(2)}(s)}{\rho(s)}. \tag{5.58}$$

Непосредственно из рис.5.6 следует, что

$$u=\beta_0y+\beta^{(1)'}v^{(1)}+\beta_ng+\beta^{(2)'}v^{(2)}. \tag{5.59}$$

Вводя $2n$ -мерные векторы

$$\beta(t)=\|\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n,\beta_{n-1},\dots,\beta_{2n-1}\|=\left\|\beta_0,\beta^{(1)'},\beta_n,\beta^{(2)'}\right\|; \tag{5.60}$$

$$\delta(t)=\left\|y,\ v^{(1)},\ g,\ v^{(2)}\right\|, \tag{5.61}$$

запишем (5.59) в компактной форме

$$u=\beta'\delta. \tag{5.62}$$

На основе структурной схемы заключаем, что передаточная функция объекта с адаптивным регулятором при постоянном значении вектора настраиваемых параметров имеет вид

$$\begin{aligned}w_a(s)=\frac{y(s)}{g(s)}=\frac{\beta_nw_0(s)}{1\pm m_2(s)+m_1(s)w_0(s)}=\\ \frac{\beta_nkk(s)\rho(s)}{\left[\beta^{(2)}(s)\mp\rho(s)\right]d(s)\pm kk(s)\left[\beta^{(1)}(s)+\beta_0\rho(s)\right]}.\end{aligned} \tag{5.63}$$

Действительно, из рис.5.6 следует, что

$$u=\beta_ng\pm m_2(s)u\mp m_1(s)y. \tag{5.64}$$

Учитывая, что $y = w_0(s)u$, и подставляя сюда (5.64), получим (5.63).

Полиномы в квадратных скобках знаменателя передаточной функции (5.63) будем искать как решение следующего тождества Безу

$$\left[\beta^{(2)}(s) \mp \rho(s)\right] d(s) \pm kk(s) \left[\beta^{(1)}(s) + \beta_0\rho(s)\right] = n(s),$$

где $n(s)$ – произвольный полином степени $2n-1$ с коэффициентом при s^{2n-1} равным 1. В результате решения получим вектор β .

Полагая

$$n(s) = k(s)d_m(s); \quad \rho(s) = k_m(s), \tag{5.65}$$

заключаем, что передаточная функция объекта с регулятором

$$w_a(s)' = \frac{\beta_n k}{k_m} w_m(s). \tag{5.66}$$

Таким образом, второе из равенств (5.65) служит для определения вектора ϱ в матрице F уравнений вспомогательных генераторов. Для завершения описания адаптивной системы необходимо определить алгоритм настройки вектора β .

Утверждение. Алгоритм настройки параметров β управления (5.62), при котором достигается цель управления (5.53) для объекта с неизвестной передаточной функцией (5.38) при $m = n-1$, имеет вид

$$\dot\beta = -G^{-1}\delta e, \tag{5.67}$$

где G – произвольная положительно-определенная матрица чисел размеров $2n \times 2n$.

Доказательство утверждения приведено в []

Пример. Пусть имеется объект управления с передаточной функцией

$$w(s)\frac{s^2 + k_1 s + k_0}{s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}, \tag{5.68}$$

параметры которой неизвестны.

Требуется построить адаптивный регулятор, при котором выход объекта y приближался бы к выходной переменной эталонной модели с передаточной функцией

$$w(s)\frac{(s^2 + 4s + 3,79)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}. \tag{5.69}$$

Определим из равенства (5.65) параметры уравнений состояния вспомогательных генераторов

$$\rho_0 = 3,79; \quad \rho_1 = 4. \tag{5.70}$$

Структурная схема рассматриваемой адаптивной системы приведена на рис 5.7.

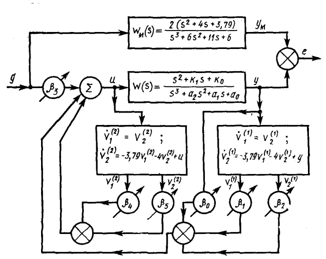

Рис. 5.7.

Алгоритм настройки параметров регулятора

$$u = \beta_0 y + \beta_1 v_1^{(1)} + \beta_2 v_2^{(1)} + \beta_3 g + \beta_4 v_1^{(2)} + \beta_5 v_2^{(2)} \tag{5.71}$$

имеет вид

$$\dot\beta_0 = -\gamma_0^{-1} ey; \quad \dot\beta_1 = -\gamma_1^{-1} ev_1^{(1)}; \tag{5.72}$$

$$\dot\beta_2 = -\gamma_2^{-1} ev_2^{(1)}; \quad \dot\beta_3 = -\gamma_3^{-1} eg; \tag{5.73}$$

$$\dot\beta_4 = -\gamma_4^{-1} ev_1^{(2)}; \quad \dot\beta_5 = -\gamma_3^{-1} ev_2^{(2)}, \tag{5.74}$$

где $\gamma_i \quad (i = 0,5)$ – положительные числа.

Системы с эталонной моделью явились первыми адаптивными системами. Адаптивное управление в этих системах вначале строилось без учета внешних возмущений [5.10],[5.8]. Затем, в работе [5.9] было показано, что эти системы могут терять устойчивость при внешних возмущениях. В [5.13]-[5.15] предлагаются различные алгоритмы управления с учетом внешних возмущений.

6 Идентификация

Идентификация, понимаемая, как и ранее, в узком смысле (как определение параметров объекта управления), является важным этапом при проектировании систем управления. К настоящему времени разработано много приемов, способов и методов определения параметров объектов. Ниже приводятся лишь те из них, которые используются для построения идентификационных алгоритмов адаптивного управления. Вначале излагается метод наименьших квадратов, в котором внешние воздействия и шумы являются белошумными случайными процессами, затем приводится метод конечно - частотной идентификации. Он позволяет идентифицировать объект при возмущениях с неизвестными статистическими характеристиками.

6.1 Метод наименьших квадратов

6.1.1 Некоторые понятия теории временных рядов

Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$\begin{aligned} & y(k) + \varphi_1 z^{-1} y(k) + \ldots + \varphi_{n-1} z^{-(n-1)} y(k) + \varphi_n z^{-n} y(k) = \\ & = r_0 f(k) + r_1 z^{-1} f(k) + \ldots + r_{\mu-1} z^{-(\mu-1)} f(k) + r_\mu z^{-\mu} f(k) \\ & (k = 1, \ldots) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Для асимптотически устойчивых процессов будем также использовать модель

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(l) f(k-l) = \sum_{i=0}^{\infty} h_l z^{-l} f(k), \tag{6.2}$$

в которой числа h_l определяются выражением

$$\frac{r_0 + \ldots + r_{\mu-1} z^{-(\mu-1)} + r_\mu z^{-\mu}}{1 + \varphi z^{-1} + \ldots + \varphi_{n-1} z^{-(n-1)} + \varphi_n z^{-n}} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots \tag{6.3}$$

Для асимптотически устойчивых процессов $h(t) \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому можно ограничится конечным числом (q) слагаемых в (6.2). Тогда

$$y(k) = \sum_{i=0}^{q} h_l z^{-l} f(k). \tag{6.4}$$

Это выражение является временным рядом, позволяющим найти y в момент времени k по значениям f в q моментов времени, предшествующих моменту k .

Уравнение (6.4) называется *моделью со скользящим средним СС-модель).*

Пусть в (6.1) $r_i = 0 \quad (i = \overline{1,\mu})$, $r_0 = 1$, тогда

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} \varphi_i z^{-(i)} y(k) + f(k). \tag{6.5}$$

Это также временной ряд, определяющий значение y в момент времени k на основе значений y в моменты, предшествовавшие k и значению $f(k)$.

Выражение (6.5) называется *авторегрессионной моделью (АР-модель).*

И наконец, модель (6.1), которую можно записать как

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} \varphi_i z^{-i} y(k) + \sum_{j=0}^{\mu} r_i z^{-j} f(k), \tag{6.6}$$

называется *авторегрессионной моделью со скользящим средним (АРСС-модель).*

Пусть параметры моделей (6.5), (6.6) неизвестны, тогда используя для обозначения неизвестных параметров вектор α , запишем эти модели в виде

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^{-i} y(k) + f(k); \tag{6.7}$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^{-i} y(k) + \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_{n+j+1} z^{-j} f(k). \tag{6.8}$$

Требуется по известным (в результате измерений) значениям $y(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ найти вектор параметров α .

6.1.2 Метод наименьших квадратов

Пусть в модели (6.7) $n = 2$, а $y(k)$, $f(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ точно измеряются и требуется определить параметры α_2 α_1 уравнения (6.7), которое принимает вид

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + f(k) \;\; (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.9}$$

Записывая это уравнение для $k = 2$ и $k = 3$, получим систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y(1) + \alpha_2 y(0) = y(2) - f(2); \\ \alpha_1 y(2) + \alpha_2 y(1) = y(3) - f(3), \end{array}\right\} \tag{6.10}$$

решая которую найдем искомые числа α_2 , α_1 .

Допустим теперь, что внешнее возмущение $f(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ неизвестно. Тогда для каждой пары уравнений вида (6.10), записанной для различных k (следующая пара порождается $k = 4$, $k = 5$, затем $k = 6$, $k = 7$ и т.д.), получим различные значения искомых параметров α_2 , α_1 . Возникает мысль определить α_2 , α_1 так, чтобы разность (невязка) между правой и левой частями уравнения (6.9) при $k = 2, \ldots, N$ была наименьшей. Для этого сформируем сумму квадратов невязок

$$L_N = \sum_{k=2}^{N} \left[y(k) - \alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 y(k-2)\right]^2. \tag{6.11}$$

Необходимое и достаточное условие минимума L_N составляет систему из двух алгебраических уравнений

$$\frac{\partial L_N}{\partial \alpha_2} = 2 \sum_{k=2}^{N} \left[y(k) - \alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 y(k-2)\right] y(k-2), \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial L_N}{\partial \alpha_1} = 2 \sum_{k=2}^{N} \left[y(k) - \alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 y(k-2) - f(k)\right] y(k-1) = 0, \tag{6.13}$$

решая которую, найдем искомые числа α_2 , α_1 .

Переходя к общему случаю запишем авторегрессионную модель (6.7) в векторной форме

$$y(k) = \alpha'\delta_y(k) + f(k) \ \ (k = n, n+1, \ldots), \tag{6.14}$$

где

$$\alpha = \|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\|'; \ \ \delta_y(k) = \|y(k-1), \ldots, y(k-n)\|'. \tag{6.15}$$

В (6.14) в отличие от (6.7) принято начальное значение $k = n$. Это связано с тем, что при $k \geq n$ вектор $\delta(k)$ содержит только результаты измерений, тогда как в противном случае он содержал бы неизвестные начальные условия $y(-1)$, $y(-2)$ и т.д.

Поскольку функция $f(k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ неизвестна, то будем искать такую оценку $\hat{\alpha}$ вектора α, чтобы сумма квадратов "невязок"

$$L_N = \sum_{k=n}^{N} [y(k) - \hat{\alpha}'\delta(k)]^2, \ \ (N - n > n) \tag{6.16}$$

была минимальной. Дифференцируя (6.16) по компонентам вектора $\hat{\alpha}$ и приравнивая нулю производные, получим

$$\left[\sum_{k=n}^{N} \delta_y(k)\delta_y'(k)\right] \hat{\alpha} = \sum_{k=n}^{N} \delta_y(k)y(k). \tag{6.17}$$

Вводя обозначение

$$P_N = \left[\sum_{k=n}^{N} \delta_y(k)\delta_y'(k)\right]^{-1}, \tag{6.18}$$

найдем из (6.17) искомый вектор (6.18)

$$\hat{\alpha} = P_N \sum_{k=n}^{N} \delta_y(k)y(k). \tag{6.19}$$

Выведем еще одну эквивалентную (6.19) формулу для оценки вектора α на основе метода наименьших квадратов. В связи с этим введем в рассмотрение $N - n$ -мерные векторы η и v, а также матрицу U:

$$\eta = \left\| \begin{matrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{matrix} \right\|; \ \ U = \left\| \begin{matrix} \delta_y'(n) \\ \delta_y'(n+1) \\ \vdots \\ \delta_y'(N) \end{matrix} \right\|; \ \ v = \left\| \begin{matrix} f(n) \\ f(n+1) \\ \vdots \\ f(N) \end{matrix} \right\|. \tag{6.20}$$

При этих обозначениях уравнения (6.14) для $k = \overline{n, N-n}$ и минимизируемая функция L_N примут вид

$$\eta = U\alpha + v; \tag{6.21}$$

$$L_N = [\eta - U\hat{\alpha}]' [\eta - U\hat{\alpha}]. \tag{6.22}$$

Дифференцируя (6.22) по компонентам вектора $\hat{\alpha}$ и приравнивая производную нулю, получим $U' [\eta - U\hat{\alpha}] = 0$, отсюда

$$\hat{\alpha} = [U'U]^{-1} U'\eta. \tag{6.23}$$

Пример. Пусть имеется асимптотически устойчивый объект управления, описываемый уравнением

$$\dot{y} + d_0 y = 0. \tag{6.24}$$

в котором параметр d_0 и воздействие $f(t)$ неизвестны. Пусть в результате измерений выхода объекта в известные моменты времени $0,\ h,\ 2h, \ldots$ $(h = 0,08)$ получены

$$y(0) = 1,5; \ \ y(1) = 0,6; \ \ y(2) = 0,56; \ \ y(3) = 0,236. \tag{6.25}$$

Требуется определить параметр d_0.

Переходя к решению этой задачи, аппроксимируем (6.24) разностным уравнением вида

$$y(kh) + \varphi_1 y[(k-1)h] = r_0 f(kh) \ \ (k = 0, 1, \ldots) \tag{6.26}$$

и представим это уравнение как авторегрессионную модель (6.7):

$$y(k) = \alpha_1 z^{-1} y(k) + \tilde{f}(k); \tag{6.27}$$

где

$$\alpha_1 = -\varphi_1 = \frac{1}{d_0 h + 1}; \quad \tilde{f}(k) = \frac{h}{d_0 h + 1} f(k). \qquad (6.28)$$

Вычислим по формуле (6.18) значение P_N^{-1} . В рассматриваемом случае в соответствии с (6.15) $\delta_y(k) = y(k-1)$ и, таким образом,

$$P_N^{-1} = \sum_{k=1}^{3} y^2(k-1) = 1,5^2 + 0,6^2 + 0,56^2 = 2,92.$$

На основе (6.19) заключаем, что

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{2,92}\left(y(0)y(1) + y(1)y(2) + y(2)y(3)\right) = 0,47, \qquad (6.29)$$

и, следовательно, оценка искомого значения

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{-\hat{\alpha}_1 + 1}{h\hat{\alpha}_1} = 14. \qquad (6.30)$$

Если использовать для определения параметра $\hat{\alpha}_1$ формулу (6.23), то следует ввести вектор η и матрицу U :

$$\eta = \left\| \begin{matrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0,6 \\ 0,56 \\ 0,236; \end{matrix} \right\|; \quad U = \left\| \begin{matrix} 1,5 \\ 0,6 \\ 0,56 \end{matrix} \right\|,$$

тогда получим вновь

$$\hat{\alpha}_1 = 0,47. \qquad (6.31)$$

6.1.3 Рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов

Представим себе реальный физический процесс, описываемый авторегрессионной моделью (6.7) с неизвестными параметрами α_i $(i = \overline{1,n})$. Пусть требуется идентифицировать эти параметры в темпе реального процесса. Это означает, что оценка неизвестных параметров должна осуществляться сразу после очередного измерения выхода объекта. Используя метод наименьших квадратов, можно поступать так: после $N+1$ -го измерения вычислить в соответствии с (6.18)(9.2.22) значение P_{N+1} и затем найти оценку $\hat{\alpha}^{(N+1)}$ по формуле (6.19), после P_{N+2} -го измерения, используя (6.18), (6.19), снова найти оценку $\hat{\alpha}^{(N+1)}$ и т.д.

Таким образом, после каждого измерения необходимо заново осуществлять обращение матрицы по формуле (6.18) и вычисление оценки по (6.19). В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли найти в явной форме связь между оценкой после i -го измерения, с одной стороны, и оценкой после $i-1$ -го измерения и результатами i -го измерения – с другой.

Утверждение. Рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов для последовательной оценки параметров авторегрессионной модели (6.7) имеет вид:

$$\hat{\alpha}^{(i)} = \hat{\alpha}^{(i-1)} + k^{(i)}\left[y(i) - \delta_y'(i)\hat{\alpha}^{(i-1)}\right] \quad (i = n, n+1, \ldots); \qquad (6.32)$$

$$k^{(i)} = P_i\delta_y(i) \quad P_{i-1}\delta_y(i)\left[1 + \delta_y' P_{i-1}\delta_y(i)\right]^{-1}; \qquad (6.33)$$

$$P_i = P_{i-1} - P_{i-1}\delta_y(i)\left[1 + \delta_y' P_{i-1}\delta_y(i)\right]^{-1}\delta_y(i)P_{i-1}, \qquad (6.34)$$

где $\hat{\alpha}^{(i)}$ – оценка вектора параметров α после i -го измерения выходной переменной y.
В качестве начальных условий для алгоритма можно принять

$$\hat{\alpha}^{(0)} = 0; \quad P_0 = aE_n, \qquad (6.35)$$

где a – достаточно большое положительное число.

Доказательство утверждения несложно. Действительно, на основе (6.17), (6.18) запишем

$$P_N^{-1}\hat{\alpha}^{(N)} = \sum_{k=n}^{N}\delta_y(k)y(k) = \sum_{k=n}^{N-1}\delta_y(k)y(k) + \delta_y(N)y(N). \qquad (6.36)$$

Заменяя $y(k)$ его оценкой $\delta_y'(k)\hat{\alpha}^{(N-1)}$, получим выражение

$$P_N^{-1}\hat{\alpha}^{(N)} = \sum_{k=n}^{N-1} \delta_y(k)\delta_y'(k)\hat{\alpha}^{(N-1)} + \delta_y(N)y(N) =$$

$$= \left[\sum_{k=n}^{N} \delta_y(k)\delta_y'(k)\right] \hat{\alpha}^{(N-1)} + \delta_y(N)y(N) - \delta_y(N)\delta_y'(N)\alpha^{(N-1)} =$$

$$= P_N^{-1}\hat{\alpha}^{(N-1)} + \delta_y(N)\left[y(N) - \delta_y'(N)\hat{\alpha}^{(N-1)}\right],$$

которое после умножения его слева на P_N совпадает с (6.32).

Переходя к выводу соотношения (6.34), запишем (6.18) в виде

$$P_N^{-1} = \sum_{k=n}^{N} \delta_y(k)\delta_y'(k) = \sum_{k=n}^{N-1} \delta_y(k)\delta_y'(k) + \delta_y(N)\delta_y'(N) = P_{N-1}^{-1} + \delta_y(N)\delta_y'(N). \tag{6.37}$$

Умножая это равенство слева на P_N и справа на P_{N-1}, получим

$$P_{N-1} = P_N + P_N\delta_y(N)\delta_y'(N)P_{N-1}. \tag{6.38}$$

Отсюда следует, после умножения на $\delta_y(N)$, что

$$P_{N-1}\delta_y(N) = P_N\delta_y(N)\left[1 + \delta_y'(N)P_{N-1}\delta_y(N)\right]$$

или

$$P_N\delta_y(N) = P_{N-1}\delta_y(N)\left[1 + \delta_y'(N)P_{N-1}\delta_y(N)\right]^{-1}.$$

Умножая это выражение справа на $\delta'(N)P_{N-1}$ и учитывая (6.38), получим (6.34), а подставляя его в первое из соотношений (6.33), получим второе. Таким образом, утверждение доказано.

Отметим, что одним из достоинств рекуррентного алгоритма является то обстоятельство, что он не содержит операции обращения матриц, так как входящее в (6.34) выражение $[1 + \delta'(i)P_{i-1}\delta_y(i)]$ является скаляром. Этот алгоритм приводит к оценке, обладающей следующим свойством.

Если внешнее возмущение $f(k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ представляет собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (такое внешнее возмущение называется "белым

шумом"), то оценка $\hat{\alpha}$ сходится к истинному вектору параметров объекта.

Пример. Применим алгоритм (6.32) – (6.34) для оценки параметра α_1 модели (6.27) из примера 6.1.2. Итак, пусть в результате измерений получено $y(0) = 1,5$; $y(1) = 0,6$. Найдем вначале значение p_1 по формуле (6.34). Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $\delta_y(i) = y(i-1)$ и p_1 - скаляры, запишем (6.34) в виде

$$p_i = \frac{p_{i-1}}{1 + \delta_y^2(i)p_{i-1}}. \tag{6.39}$$

Кроме того, в соответствии с (6.35) примем

$$\hat{\alpha}_1^{(0)} = 0; \;\; p_0 = 1, \tag{6.40}$$

тогда из (9.2.43) при 1= 1 получим

$$p_1 = \frac{1}{1 + (1,5)^2 \cdot 1} = 0,31.$$

На основе (6.32) заключаем

$$\hat{\alpha}_1^{(1)} = \hat{\alpha}_1^{(0)} + p_1 y(0)\left[y(1) - y(0)\hat{\alpha}_1^{(0)}\right] = 0,276. \tag{6.41}$$

Пусть после третьего измерения получено $y_1(2) = 0,56$. Тогда оценку (6.41) можно уточнить. Для этого вычислим

$$p_2 = \frac{p_1}{1 + \delta_y^2(2)p_1} = \frac{0,31}{1 + (0,6)^2\, 0,31} = 0,28$$

и

$$\hat{\alpha}_1^{(2)} = \hat{\alpha}_1^{(1)} + p_2 y(1)\left[y(2) - y(1)\hat{\alpha}_1^{(1)}\right] = 0,336. \tag{6.42}$$

Затем после четвертого измерения получим $y(3) = 0,236$. Вновь уточняя оценку (6.42), найдем

$$p_3 = \frac{p_2}{1 + \delta_y^2(3)p_2} = \frac{0,28}{1 + (0,56)^2\, 0,28} = 0,26;$$

$$\hat{\alpha}_1^{(3)} = \hat{\alpha}_1^{(2)} + p_3 y^{(2)}\left[y(3) - y(2)\hat{\alpha}_1^{(2)}\right] = 0,394. \tag{6.43}$$

Эта оценка приближается к оценке (6.29), полученной при использовании нерекуррентного алгоритма наименьших квадратов.

6.1.4 Оценка параметров АРСС-модели

Переходя к оценке параметров авторегрессионной модели со скользящим средним, запишем (6.8) в векторной форме:

$$y(k) = \alpha'\delta^{(4)}(k) + \alpha_{n+1}f(k) \ \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ldots), \qquad (6.44)$$

где

$$\left.\begin{array}{l}\alpha' = ||\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ \alpha_{n+2},\ldots,\alpha_{n+\mu+1}||;\\ \delta^{(4)}(k) = ||y(k-1),\ldots,y(k-n),\ f(k-1),\ldots,f(k-\mu)||'.\end{array}\right\} \qquad (6.45)$$

Формально уравнение (6.44) эквивалентно уравнению (6.14), поэтому для определения вектора параметров α можно использовать рекуррентный алгоритм (6.32) $\ldots$ (6.34). Однако вектор $\delta^{(4)}(k)$ содержит неизмеряемые величины $f(k-1),\ldots,\ \ f(k-\mu)$. В связи с этим оценим, используя (6.44), переменную $f(k)$, полагая без потери общности $\alpha_{n+1} = 1$:

$$\hat{f}(k) = y(k) - \hat{\alpha}'\delta^{(4)}(k) \ \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ldots). \qquad (6.46)$$

Задаваясь начальными условиями $y(-i) = y^{(0)}(-i)$, $f(-i) = f^{(0)}(-i)$ $(i = \overline{1,\ n},\ \ j = \overline{1,\ \mu})$ заменим неизмеряемые компоненты вектора $\delta^{(4)}(k)$ их оценками и сформируем $\hat{\delta}(k) = ||y(k-1),\ldots,y(k-n),\ \ f(k-1),\ldots,f(k-\mu)||$.

Таким образом, общий алгоритм последовательного оценивания принимает вид

$$\hat{\alpha}^{(i)} = \hat{\alpha}^{(i-1)} + k^{(i)}[y(i) - \hat{\delta}'(i)\hat{\alpha}^{(i-1)}]; \qquad (6.47)$$

$$k^{(i)} = P_i\hat{\delta}(i); \qquad (6.48)$$

$$P_i = P_{i-1} - P_{i-1}\hat{\delta}(i)[1 + \hat{\delta}'(i)P_{i-1}\hat{\delta}'(i)]^{-1}\hat{\delta}(i)P_{i-1}. \qquad (6.49)$$

Этот алгоритм может приводить к смещенным оценкам $\hat{\alpha}$. Для получения несмещенных оценок следует полагать в (6.45) вместо n число $n' > n$. Фиксируя некоторое n' и используя алгоритм (6.47) $\ldots$ (6.47), находим $\hat{\alpha}$ и определяем по формуле (6.46) последовательность $f(k)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$, если она некоррелирована, то это свидетельствует о несмещенности и состоятельности оценки $\hat{\alpha}$.

Если же последовательность $f(k)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$ коррелирована, то следует увеличить число n' до тех пор, пока элементы этой последовательности окажутся независимыми.

6.1.5 Программное обеспечение

Рассмотри объект, описываемый уравнением

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n}\varphi_i z^{-i}y(k) + \sum_{j=0}^{n}r_i z^{-j}u(k) + \sum_{j=0}^{\mu}c_i z^{-j}f(k), \qquad (6.50)$$

МАТЛАБ-функции для идентификации этого объекта:

1) $th = armax(p, nn)$ -оценка коэффициентов дискретной модели (6.50)с помощью метода наименьших квадратов

Аргументы функции:

$p = [y, u]$ -матрица экспериментальных данных;в многомерном случае u является матрицей с числом столбцов равным числу входов.

$nn = [n\varphi, nr, nc]$ -степени полиномов z_1 дискретной модели (6.50)

Результаты: Оценки коэффициентов дискретной модели (6.50)

2) $thm = rarmax(p, nn, adm, adg)$ -оценка коэффициентов дискретной модели (6.50)с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов.Здесь adm и adg аргументы, задающие вид процедуры идентификации , например, значения $adm = ff$ и $adg = lam$ задают рекуррентный алгоритм.

Вектор δ в этих функциях содержит наряду с $y(k-1),\ldots,y(k-n)$ измеряемые переменные $u(k),\ldots,u(k-n)$ и в этом случае выражение для $y(k)$ имеет структуру (**??**)

6.2 Конечно-частотная идентификация

Частотные методы служат для идентификации непрерывных объектов управления.В них можно выделить "классический"частотный и конечно-частотный методы идентификации.

В соответствии с первым методом [6.12]–[6.14] объект возбуждается испытательным сигналом,который является суммой бесконечного числа известных гармоник. Коэффициенты передаточной функции объекта находятся минимизацией суммы квадратов разности измеряемых частотных характеристик и частотных характеристик ,соответствующих искомым коэффициентам. Возмущения частотных характеристик предполагаются белошумными и для минимизации указанной суммы используется специальный метод наименьших квадратов.

В конечно-частотном методе [6.10],[6.15] испытательный сигнал содержит минимально возможное число гармоник (равное размерности вектора пространства состояний объекта)и это позволяет существенно расширить класс возмущений и помех, при которых достигается необходимая точность идентификации.

6.2.1 Постановка задачи и подход к ее решению

Рассмотрим полностью управляемый и асимптотически устойчивый объект управления, описываемый уравнением

$$y^{(n)}+d_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+d_1\dot{y}+d_0y=k_mu^{(m)}+\cdots+k_1\dot{u}+k_0u+f, \quad (6.51)$$

в котором коэффициенты d_i , k_j $(i=\overline{0,n-1}$, $(j=\overline{0,m}$ – неизвестные числа, n – известно, m $(m<n)$ – неизвестно, $f(t)$ – неизвестная ограниченная функция

$$|f(t)|\le f^*, \quad (6.52)$$

где f^* – число.

Задача идентификации состоит в нахождении оценок $\hat{d}_i$ и $\hat{k}_i$ $(i=\overline{0,n-1})$ коэффициентов уравнения (6.51) таких, чтобы ошибки идентификации $\Delta d_i=d_i-\hat{d}_i$, $\Delta k_i=k_j-\hat{k}_i$ удовлетворяли требованиям

$$|\Delta d_i|\le\varepsilon_i^d,\ \ |\Delta k_i|\le\varepsilon_i^k\ \ (i=\overline{0,n-1}), \quad (6.53)$$

в которых ε_i^d , ε_i^k $(i=\overline{0,n-1})$ – заданные числа.

Отличие этой задачи от рассматриваемых ранее состоит в том, что неизвестны статистические характеристики возмущения $f(t)$. Отсутствие сведений о возмущении приводит к тому, что выход объекта $y(t)$ зависит от неизвестных его коэффициентов и неизвестного возмущения, и поэтому, точность идентификации ограничена в принципе и зависит от возмущения, реализуещегося в процессе идентификации.

Для решения задачи идентификации необходимо выделить составляющую выхода, которая зависит только от неизвестных коэффициентов.

Для этой цели используем испытательный сигнал

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n}\rho_k\sin\omega_k t, \quad (6.54)$$

в котором амплитуды ρ_k $(k=\overline{1,n})$ и испытательные частоты ω_k $(k=\overline{1,n})$ – заданные положительные числа.

В этом случае выход объекта можно представить как

$$y(t)=y(t)+y_0(t)+y_f(t), \quad (6.55)$$

где $y(t)$ – составляющая, вызванная испытательным сигналом (6.54), $y_0(t)$ – зависит от начальных условий, $y_f(t)$ возбуждается возмущением $f(t)$.

Составляющая $y(t)$ не зависит от возмущения и поэтому необходимо выделить ее из выходного сигнала и затем использовать ее для идентификации, достигая при этом требуемой точности (6.53). Такое выделение осуществляется с помощью фильтра Фурье, с помощью которого находятся оценки частотных параметров.

6.2.2 Частотные параметры и частотные уравнения

Частотными параметрами называется набор $2n$ чисел

$$\alpha_k=\operatorname{Re}w_0(j\omega_k),\ \ \beta_k=\operatorname{Im}w_0(j\omega_k)\ \ (k=\overline{1,n}), \quad (6.56)$$

где $w_0(s)=\dfrac{k(s)}{d(s)}$.

Найдем связь частотных параметров с коэффициентами объекта Очевидно, что

$$\frac{k(j\omega_k)}{d(j\omega_k)}=\alpha_k+j\beta_k\ \ (k=\overline{1,n}). \quad (6.57)$$

Отсюда следует система уравнений

$$k(j\omega_k)-(\alpha_k+j\beta_k)\bar{d}(j\omega_k)=(\alpha_k+j\beta_k)(j\omega_k)^n\ \ (k=\overline{1,n}), \quad (6.58)$$

где $\bar{d}(s)=d(s)-s=d_{n-1}s^{n-1}+\cdots+d_0$.

Заменяя в этой системе частотные параметры их оценками $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$ $(k = \overline{1,n})$, которые , как показано ниже, являются выходами фильтра Фурье, и записывая ее в более подробной форме, получим *частотные уравнения идентификации*

$$\sum_{i=0}^{n-1}(j\omega_k)^i\hat{k}_i - (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k)\sum_{i=0}^{n-1}(j\omega_k)^i\hat{d}_i = (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k)(j\omega_k)^n \ (k = \overline{1,n}). \tag{6.59}$$

Эти уравнения можно записать в виде системы $2n$ линейных алгебраических уравнений для определения $2n$ неизвестных $\hat{k}_i$ и $\hat{d}_i$ $(i = \overline{0, n-1})$.

> **Утверждение.** Если объект полностью управляем, испытательные частоты ω_k $(k = \overline{1,n})$ – различны и частотные параметры известны точно ($\hat{\alpha}_k = \alpha_k$, ($\hat{\beta}_k = \beta_k$ $k = \overline{1,n}$), то частотные уравнения (6.59) имеют единственное решение $\hat{d}_i = d_i$, $\hat{k}_i = k_i$ (где $k_{n-1} = \cdots = k_{m=1} = 0$) и это решение не зависит от выбора испытательных частот.

Доказательство утверждения получено в [6.19].

Пример. Запишем частотные уравнения для случая $n = 2$. В этом случае объект описывается уравнением

$$\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y = k_1\dot{u} + k_0 u. \tag{6.60}$$

Частотные уравнения для определения оценок коэффициентов этого объекта имеют вид

$$\hat{k}_0 + (j\omega_k)\hat{k}_1 - (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k)(\hat{d}_0 + (j\omega_k)\hat{d}_1) = (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k)(j\omega_k)^2, \quad (k = 1, 2). \tag{6.61}$$

Их можно записать как систему из 4-х уравнений:

$$\begin{array}{l} \hat{k}_0 - \hat{\alpha}_k\hat{d}_0 + \hat{\beta}_k\omega_k\hat{d}_1 = -\hat{\alpha}_k\omega_k^2 \\ \omega_k\hat{k}_1 - \beta_k\hat{d}_0 - \hat{\alpha}_k\omega_k\hat{d}_1 = -\hat{\beta}_k\omega_k^2 \end{array} \ (k = 1, 2) \tag{6.62}$$

для определения 4-х неизвестных $\hat{d}_1$, $\hat{d}_0$, $\hat{k}_1$, $\hat{k}_0$.

6.2.3 Экспериментальное определение частотных параметров

Подадим выход объекта (6.51), возбужденного испытательным сигналом (6.54) на вход фильтра Фурье, описываемого выражениями

$$\begin{array}{l} \alpha_k(\tau) = \dfrac{2}{\rho_k \tau}\displaystyle\int_0^\tau y(t)\sin\omega_k t\, dt \\ \beta_k(\tau) = \dfrac{2}{\rho_k \tau}\displaystyle\int_0^\tau y(t)\cos\omega_k t\, dt \end{array} \quad (k = \overline{1,n}), \tag{6.63}$$

где τ – время фильтрации.

Обозначим $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$ $(k = \overline{1,n})$ выходы фильтра при фиксированном τ .

Убедимся, что при отсутствии возмущения $(f(t) = 0)$ выходы фильтра сходятся к частотным параметрам:

$$\lim_{\tau\to\infty}\alpha_k(\tau) = \alpha_k, \ \lim_{\tau\to\infty}\beta_k(\tau) = \beta_k \ (k = \overline{1,n}). \tag{6.64}$$

Составляющая выхода объекта, вызванная испытательным сигналом состоит из вынужденной компоненты $y_b(t)$ и сопровождающей (затухающей) функции $æ(t)$: $y(t) = y_b(t) + æ(t)$.

Вынужденная составляющая описывается выражением

$$y_\text{b}(t) = \sum_{k=1}^{n}\rho_k\left[\alpha_k\sin\omega_k t + \beta_k\cos\omega_k t\right]. \tag{6.65}$$

Подставляя выражение (6.55) для выхода объекта с учетом $f(t) = 0$ и соотношения (6.65) в (6.63), получим, например, для первого выхода фильтра

$$\alpha_1(\tau) = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau[\alpha_1\sin\omega_k t + \beta_1\cos\omega_k t]\sin\omega_k t\, dt + \alpha_{10}(\tau) + \alpha_{11}(tau) =$$

$$= \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\tau}\int_0^\tau\cos 2\omega_1 t\, dt + \frac{\beta_1}{\tau}\int_0^\tau\sin 2\omega_1 t\, dt + \alpha_{10}(tau) + \alpha_{11}(tau), \tag{6.66}$$

где

$$\alpha_{10}(tau) = \frac{2}{\rho_1\tau}\int\limits_0^\tau [æ(t) + y_0(t)] \sin\omega_1 t\, dt,$$
$$\alpha_{11}(tau) = \frac{2}{\rho_1\tau}\int\limits_0^\tau \left[\sum_{k=2}^n \rho_k \left[\alpha_k \sin\omega_k t + \beta_k \cos\omega_k t\right] \sin\omega_1 t\, dt.\right. \quad (6.67)$$

Так как значения интегральных выражений ограничены, то из (6.66) следует $\lim\limits_{\tau\to\infty} \alpha_1(\tau) = \alpha_1$. Для остальных выходов фильтра ситуация аналогична и поэтому справедливо соотношение (6.64).

Когда возмущение $f(t) \neq 0$, то эти соотношения могут нарушаться. Например, если $f(t)$ содержит гармоники, частоты которых совпадают с испытательными частотами, а амплитуды неизвестны. В этом случае амплитуда результирующего "испытательного сигнала"известна с точностью до неизвестных амплитуд гармоник возмущения.

Опишем возмущения, при которых выходы фильтра сходятся к частотным параметрам.

Введем экспериментально получаемые функции

$$\ell_k^\alpha(\tau) = \frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_0^\tau \bar{y}(t) \sin\omega_k t\, dt;$$
$$\ell_k^\beta(\tau) = \frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_0^\tau \bar{y}(t) \cos\omega_k t\, dt, \quad (6.68)$$

являющиеся выходами фильтра Фурье, на входы которого подается "естественный"выход объекта, когда $u(t) = 0$, $(\bar{y}(t) = y_0(t) + y_f(t))$.

Определение. Возмущение $f(t)$ называется ФФ-фильтруемым (фильтруемым с помощью фильтра Фурье) на заданном наборе испытательных частот ω_k $(k = \overline{1,n})$ если существует время фильтрации τ^* такое, что выполняются неравенства

$$|\ell_k^\alpha(\tau)| \le \varepsilon_k^\alpha, \quad \left|\ell_k^\beta(\tau)\right| \le \varepsilon_k^\beta (k = \overline{1,n}), \quad (6.69)$$

в которых ε_k^α и ε_k^β $(k = \overline{1,n})$ – достаточно малые заданные числа.
Если возмущения таковы, что

$$\lim_{\tau\to\infty} \ell_k^\alpha(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \ell_k^\beta(\tau) = 0, \quad (6.70)$$

то оно называется строго ФФ-фильтруемым.

Нетрудно проверить, что, например, возмущение

$$f(t) = \sum_{k-1}^{n_1} \delta_k \sin\omega_k^f t, \quad (6.71)$$

где n_1 , δ_k , ω_k^f – неизвестные числа, является строго ФФ-фильтруемым, если $\omega_k^f \neq \omega_i$ $((i = \overline{1,n}),\quad k = \overline{1,n_1})$.

Утверждение. Если возмущение $f(t)$ является ФФ-фильруемым, то существует время фильтрации τ^{**} такое, что ошибки фильтрации $\Delta\alpha^k(\tau) = \alpha^k - \alpha^k(\tau)$, $\Delta\beta^k(\tau) = \beta^k - \beta^k(\tau)$ $(k = \overline{1,n})$, удовлетворяют неравенствам

$$|\Delta\alpha_k(\tau)| \le \varepsilon_k^\alpha, \quad |\Delta\beta_k(\tau)| \le \varepsilon_k^\beta (k = \overline{1,n}), \quad (6.72)$$

Если возмущение – строго ФФ-фильтруемо, то эти ошибки – исчезающие функции

$$\lim_{\tau\to\infty} \Delta\alpha_k(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \Delta\beta_k(\tau) = 0 \;\; (k = \overline{1,n}), \quad (6.73)$$

Доказательство утверждения, данное в [6.20]следует из вида оценок частотных параметров

$$\alpha_k(\tau) = \alpha_k + e_k^\alpha(\tau) + \ell_k^\alpha(\tau), \quad \beta_k(\tau) = \beta_k + e_k^\beta(\tau) + \ell_k^\beta(\tau) (k = \overline{1,n}), \quad (6.74)$$

в котором слагаемые $e_k^{\alpha}(\tau)$ и $e_k^{\beta}(\tau)$ $(k=\overline{1,n})$ – зависят от исчезающих функций $æ(t)$ и $y_0(t)$ и поэтому $\lim\limits_{\tau\to\infty} e_k^{\alpha}(\tau) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e_k^{\beta}(\tau) = 0$ $(k=\overline{1,n})$. Учитывая условия (6.69), получим неравенства (6.72) и (6.73).

6.2.4 Процедура идентификации

Далее будем полагать, что испытательные сигналы кратны базовой частоте ω_b. Это означает, что $\omega_k = c_k\omega_b$ $(k=\overline{1,n})$, где c_k $(k=\overline{1,n})$ – заданные целые положительные числа. Будем измерять выходы фильтра Фурье в дискретные моменты $\tau = qT$, где базовый период $T = \dfrac{2\pi}{\omega_b}$, $q = 1,2,\ldots$. В этом случае, как нетрудно показать, ошибки фильтрации уменьшаются, так как составляющие выхода вида (6.67) равны нулю.

Для определения длительности идентификации будем использовать следующие необходимые условия сходимости идентификации

$$|d_i(qT) - d_i\left[(q-1)T\right]| \le \varepsilon_i^d, \;\; |k_i(qT) - k_i\left[(q-1)T\right]| \le \varepsilon_i^k \;\; (i=\overline{0,n-1}), \tag{6.75}$$

где $d_i(qT)$ и $k_i(qT)$ $(i=\overline{0,n-1})$ – оценки коэффициентов объекта, получаемые в результате решения частотных уравнений (6.59), в которых $\hat{\alpha}_k = \alpha_k(qT)$, $\hat{\beta}_k = \beta_k(qT)$ $q=1,2,\ldots$.

Процедура конечно-частотной идентификации:

- приложить выход объекта (6.51), возбужденного испытательным сигналом (6.54), ко входу фильтра Фурье (6.63);
- измерить выходы $\alpha_k(qT)$ и $\beta_k(qT)$ $(k=\overline{1,n})$ этого фильтра в моменты времени $\tau = (qT)$ $q=1,2,\ldots$;
- найти оценки коэффициентов объекта, решая для каждого момента времени $\tau=(qT)$ частотные уравнения (6.59);
- проверять необходимые условия (6.75) для каждого q до тех пор, пока эти условия не выполнятся для некоторого $q=q_1$.

В момент времени $\tau = q_1T$ начинается процесс подтверждения модели. Его цель косвенно проверить выполнение требований (6.53) к точности идентификации. Более строгий способ подтверждения модели следует из раздела 7.3.

Если результат идентификации неудовлетворителен, то идентификация продолжается до тех пор, пока будет достигнута необходимая точность. Достижимость цели идентификации, выражаемой неравнствами (6.53), определяется свойствами возмущения. Если возмущение строго ФФ-фильтруемо, то процесс идентификации сходится к истинным значениям коэффициентов объекта:

Аналогичная процедура идентификации дискретных объектов разработана в [6.21],[6.22]

$$\lim_{q\to\infty} d_i(qT) = d_i, \;\; \lim_{q\to\infty} k_i(qT) = k_i, \;\; (i=\overline{1,n}). \tag{6.76}$$

Это следует из утверждения (6.51) и (6.52).

Если возмущение только ФФ-фильтруемо, то выполнение требований (6.53) зависит от границ ε_i^{α} и ε_i^{β} $(i=\overline{1,n})$ в неравенствах (6.69).

6.2.5 Самонастройка амплитуд и частот испытательного сигнала

Выше предполагалось, что амплитуды и частоты испытательного сигнала (6.54) заданы.

Если испытательные частоты известны, то амплитуды испытательного сигнала легко находятся из следующего условия "малости возбуждения":

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \le \varepsilon_y, \tag{6.77}$$

в котором ε_y – заданное положительное число.

Это условие означает, что испытательное воздействие может изменять "естественный"выход объекта $y(t)$ лишь в пределах заданного допуска ε_y.

Определение значений испытательных частот является более сложной задачей. Интуитивно ясно, что эти частоты должны выбираться из диапазона частот, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) объекта имеет изломы. На первый взгляд может показаться, что это противоречит утверждению 6.2.2, в соответствии с которым решение частотных уравнений не зависит от выбора испытательных частот. Однако, в действительности, это справедливо лишь при точно известных частотных параметрах, а в частотных уравнениях используются их оценки, и поэтому длительность идентификации существенно зависит от выбора испытательных частот.

В работе [6.15] получен способ нахождения верхней и нижней границ испытательных частот. Опираясь на него в [6.16], [6.18] построены алгоритмы самонастройки амплитуд и частот испытательного сигнала. Краткое изложение этих алгоритмов приведено ниже в п.8.3.4-п.8.3.7. при описании директив системы ГАММА.

6.2.6 Программное обеспечение

Система ГАММА:

1. Директива D111 (Частотная идентификация объекта)
2. Директива D111sd (Частотная идентификация с самонастройкой длительности фильтрации).
3. Директива D111sad (Частотная идентификация объекта с самонастройкой амплитуд испытательного сигнала).
4. Директива D111sfload (Частотная идентификация объекта с самонастройкой амплитуд и частот испытательного сигнала).
5. Директива D111sefad (Частотная идентификация объекта с самонастройкой амплитуд и частот испытательного сигнала).

Система MATLAB:

6.3 Комментарии

К настоящему времени разработан ряд методов идентификации объектов управления, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Эти методы условно можно разделить на две группы в зависимости от предположений о помехах измерения и внешних возмущениях, приложенных к объекту.

Первую группу составляют методы идентификации объектов, помехи и возмущения в которых – случайные процессы с известными статистическими характеристиками. Это различные варианты метода наименьших квадратов и метода стохастической аппроксимации. Их описание приводится в известных книгах [6.2]–[6.6].

Вторая группа – это методы идентификации при неизвестных ограниченных помехах и возмущениях (с неизвестными статистическими характеристиками): рандомизированные алгоритмы [6.8],[6.9] и конечно-частотная идентификация [6.10].

Особое место занимает метод инструментальных переменных [6.11]. Разработанный в рамках первой группы он применим, в отличие от других методов этой группы, для решения задач второй группы, и поэтому будем относить его к последней.

Процесс идентификации может быть пассивным либо активным. В случае *пассивной* идентификации измеряемым входом объекта является управление, которое зависит от целей объекта и не связано с задачей идентификации. Может случится, что при таком входе идентификация объекта невозможна. В связи с этим используется *активная* идентификация, при которой измеряемый вход объекта содержит наряду с управлением дополнительное воздействие (испытательный сигнал), предназначенное для идентификации объекта.

Метод конечно-частотной идентификации предназначен для активной идентификации. Испытательный сигнал представляет собой сумму гармоник с автоматически настраиваемыми (самонастраиваемыми) амплитудами и частотами [6.16], [6.18]. Число этих гармоник не превышает размерность вектора состояний объекта управления. Самонастройка амплитуд осуществляется для выполнения требований к допустимым границам входа и выхода объекта, которые выполняются, когда испытательный сигнал отсутствует.

Рандомизированные алгоритмы предполагают, что испытательный сигнал – случайный процесс с известными статистическими характеристиками и поэтому трудно гарантировать заданные допуска на выходы объекта.

7 Адаптивное управление

7.1 Адаптивное управление с идентификацией по методу наименьших квадратов

7.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим дискретный объект управления, описываемый уравнением

$$y(k)+\varphi_1 y(k-1)+\cdots+\varphi_n y(k-n)=r_1 u(k-1)+\cdots+r_\mu(k-n)+f(k),\quad k=1,... \tag{7.1}$$

где $y(k)$ – измеряемая (выходная) переменная объекта, $f(k)$ – внешнее воздействие, являющееся случайным процессом с независимыми значениями (случайным процессом типа "белый шум"), причем

$$M\{f(k)\}=0;\;\; M\{f^2(k)\}=\sigma_f^2 \tag{7.2}$$

(σ_f^2 – некоторое число), параметры φ_i , r_j , $(i=\overline{1,n};\;\; j=\overline{1,\mu})$ – неизвестные числа, M -символ математического ожидания.

Требуется найти алгоритм управления, при котором достигается цель управления, задаваемая критерием

$$\lim_{k\to\infty} M\{y^2(k)\}<\Delta, \tag{7.3}$$

в котором Δ – заданное число.

Допустим вначале, что параметры φ_i , r_i , $(i=\overline{1,n})$ объекта (7.1) известны. Пусть в (7.3) число $\Delta=\infty$. Цель управления

$$\lim_{k\to\infty} M\{y^2(k)\}<\infty \tag{7.4}$$

достигается при любом регуляторе, обеспечивающем асимптотическую устойчивость системы. Потребуем дополнительно к асимптотической устойчивости, чтобы корни характеристического полинома замкнутой системы имели наперед заданные значения. Таким образом, речь идет о построении модального управления для объекта (7.1). Уравнение регулятора имеет вид

$$\begin{aligned}&\varphi_{p0}u(k)+\varphi_{p1}u(k-1)+\cdots+\varphi_{pn}u(k-n)\\&\quad=r_{p0}y(k)+\cdots+r_{p\mu_p}y(k-n),\end{aligned} \tag{7.5}$$

где φ_{pi}, r_{pi} $(i=\overline{0,n}$ – искомые числа.

Преобразуя (7.1), (7.5) по Лапласу при нулевых начальных условиях, запишем уравнения объекта и регулятора в виде

$$\varphi(z^{-1})y=r(z^{-1})u+f(k), \tag{7.6}$$

$$\varphi_p(z^{-1})u=r_p(z^{-1})y+r_{p0}y, \tag{7.7}$$

где z – комплексное число;

$$\varphi(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i z^{-i},\;\; r(z^{-1})=\sum_{i=1}^{n}r_i z^{-i}, \tag{7.8}$$

$$\varphi_p(z^{-1})=\varphi_{p0}+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{pi} z^{-i};\;\; r_p(z^{-1})=\sum_{i=1}^{n}r_{pi} z^{-i}. \tag{7.9}$$

Характеристический полином системы (7.6), (7.7) имеет вид

$$\begin{aligned}D(\lambda)=\varphi(\lambda)\varphi_p(\lambda)-r(\lambda)r_p(\lambda)=\left(1+\textstyle\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\lambda^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_{pi}\lambda^i\right)\\-\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}r_i\lambda^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}r_{pi}\lambda^i\right).\end{aligned} \tag{7.10}$$

Желаемый полином замкнутой системы

$$D^*(\lambda)=\left(\prod_{i=1}^{2n}\lambda_i^*\right)^{-1}\prod_{i=1}^{2n}(\lambda_i-\lambda_i^*)=d_{2n}^{2n}\lambda^{2n}+\cdots+d_1\lambda+1, \tag{7.11}$$

где λ_i^* $(i=\overline{1,2n})$ – заданные числа, $|\lambda_i|\ge 1$ $(i=\overline{1,2n})$.

Для реализуемости алгоритма регулирования (7.5) потребуем, чтобы

$$r_0=0. \tag{7.12}$$

Кроме того, пусть

$$\varphi_0=1. \tag{7.13}$$

Для определения остальных параметров регулятора (7.5) приравняем полиномы (7.10), (7.11). Тогда

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\lambda^i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{pi}\lambda^i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\lambda^i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}r_{pi}\lambda^i\right)-\sum_{i=1}^{2n}d_i^*\lambda^i-1=0. \tag{7.14}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных φ_{pi}, r_{pi} $(i=\overline{1,n})$. Эта система имеет вид

$$N(\beta)\upsilon=d^*, \tag{7.15}$$

где $\upsilon=\|\varphi_{p1},\ldots,\varphi_{pn},r_{p1},\ldots,r_{pn}\|'$; $d^*=\|d^*_{2n},d^*_{2n-1}\ldots,d^*_1\|'$; $N(\beta)$ – матрица чисел размеров $2n\times 2n$, элементами которой являются известные параметры объекта (7.1), представленные как компоненты вектора $\beta=\|-\varphi_1,\ldots,-\varphi_n\ , \ r_1,\ldots,-r_n\|$. В [?] показано, что если объект (7.1) полностью управляем [это означает, что полиномы $\varphi(\lambda)$ и $r(\lambda)$ не имеют общих корней] и $d^*_{2n}\neq 0$, то система (7.15) имеет единственное решение относительно искомых параметров φ_{pi}, r_i $(i=\overline{1,n})$.

Процедура определения параметров регулятора (7.5), при котором характеристический полином замкнутой системы (7.1), (7.5) имеет заданные значения λ_i^* $(i=\overline{1,2n})$ заключается в следующем:
1) сформировать коэффициенты d_i^* $(i=\overline{1,2n})$ желаемого полинома (7.11);
2) на основе уравнения (7.14) построить матрицу чисел $N(\beta)$ уравнения (7.15);
3) решить уравнение (7.15) и найти параметры регулятора (7.5).

Пример. Дискретное модальное управление гирорамой.
Рассмотрим гирораму, дискретная модель которой описывается уравнениями.

$$x_1(k+1)=x_1(k)+\varphi_{12}x_2(k)+\varphi_{13}x_3(k)+r_1(u(k)+f(k)), \tag{7.16}$$

$$x_2(x+1)=\varphi_{22}x_2(k)+\varphi_{23}x_3(k)+r_2(u(k)+f(k)), \tag{7.17}$$

$$x_3(k+1)=\varphi_{32}x_2(k)+\varphi_{33}x_3(k)+r_3(u(k)+f(k)), \tag{7.18}$$

$$y(k)=x_1(k)+\chi(k). \tag{7.19}$$

Требуется найти параметры регулятора

$$u(k)+\varphi_{p1}u(k-1)+\varphi_{p2}u(k-2)+\varphi_3u(k-3)=r_{p1}y(k-1)+r_{p2}y(k-2)+r_{p3}y(k-3), \tag{7.20}$$

такие, чтобы корни характеристического полинома замкнутой системы (7.16) –(7.20) имели заданные значения λ_1^*, λ_2^*, λ_3^*, λ_4^*, λ_5^*, λ_6^*.

Переходя к решению этой задачи, приведем уравнения гирорамы (7.16) – (7.19) к виду (7.1). Для этого запишем соотношения

$$y(k)=x_1(k)+\chi(k)=dx(k)+\chi(k);\ \ d=\|1,\ 0,\ 0\|;$$

$$y(k-1)=dx(k-1)+\chi(k-1)=d\Phi^{-1}x(k)-d\Phi^{-1}r(u(k-1)+f(k-1))+\chi(k-1);$$

$$y(k-2)=d\Phi^{-2}x(k)-d\Phi^{-2}r(u(k-1)+f(k-1))-d\Phi^{-1}r(u(k-2)+f(k-2))+\chi(k-2).$$

Разрешая эту систему из трех уравнений относительно трехмерного вектора $x(k)$ и подставляя полученное выражение для $x(k)$ в уравнение $y(k-3)=d\Phi^{-3}x(k)-d\Phi^{-3}r(u(k-1)+f(k-1))-d\Phi^{-2}r(u(k-2)+f(k-2))-d\Phi^{-1}r(u(k-3)+f(k-3)+\chi(k-3)$, получим уравнение гирорамы в форме "вход-выход"(7.1):

$$\begin{gathered}y(k)+\varphi_1y(k-1)+\varphi_2y(k-2)+\varphi_3y(k-3)=r_1u(k-1)+\\ r_2u(k-2)+r_3u(k-3)++r_1f(k-1)+r_2f(k-2)+r_3f(k-3)+r_0^{(1)}\chi(k)+\\ r_1^{(1)}\chi(k-1)+r_2^{(1)}\chi(k-2)+r_3^{(1)}\chi(k-3).\end{gathered} \tag{7.21}$$

Опускаем пока внешние возмущения и помехи и запишем это уравнение в виде

$$y(k)+\varphi_1y(k-1)+\varphi_2y(k-2)+\varphi_3y(k-3)=r_1u(k-1)+r_2u(k-2)+r_3u(k-3). \tag{7.22}$$

В соответствии с процедурой модального управления объектом сформируем желаемый полином замкнутой системы

$$
\begin{gathered}
D^*(\lambda) = [\lambda_1^*\lambda_2^*\lambda_3^*\lambda_4^*\lambda_5^*\lambda_6^*]^{-1} \cdot \\
(\lambda-\lambda_1^*)(\lambda-\lambda_2^*)(\lambda-\lambda_3^*)(\lambda-\lambda_4^*)(\lambda-\lambda_5^*)(\lambda-\lambda_6^*) = \\
= d_6^*\lambda^6 + d_5^*\lambda^5 + d_4^*\lambda^4 + d_3^*\lambda^3 + d_2^*\lambda^2 + d_1^*\lambda + d_0^*.
\end{gathered} \tag{7.23}
$$

Характеристический полином системы (7.20), (7.22) имеет вид

$$
\begin{gathered}
D(\lambda) = \left(1 + \varphi_1\lambda + \varphi_2\lambda^2 + \varphi_3\lambda^3\right) \cdot \\
\left(1 + \varphi_{p1}\lambda + \varphi_{p2}\lambda^2 + \varphi_{p3}\lambda^3\right) - \\
- \left(r_1\lambda + r_2\lambda^2 + r_3\lambda^3\right)\left(r_{p1}\lambda + r_{p2}\lambda^2 + r_{p3}\lambda^3\right).
\end{gathered} \tag{7.24}
$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ полиномов (7.23), (7.24), получим систему алгебраических уравнений (7.15):

$$
\begin{gathered}
\varphi_3\varphi_{p3} - r_3 r_{p3} = d_6^*, \\
\varphi_2\varphi_{p3} + \varphi_3\varphi_{p2} - r_2 r_{p3} - r_3 r_{p2} = d_5^*; \\
\varphi_3\varphi_{p1} + \varphi_2\varphi_{p2} + \varphi_1\varphi_{p3} - r_3 r_{p1} - r_2 r_{p2} - r_1 r_{p3} = d_4^*; \\
\varphi_3 + \varphi_2\varphi_{p1} + \varphi_1\varphi_{p2} + \varphi_{p3} - r_2 r_{p1} - r_1 r_{p2} = d_3^*; \\
\varphi_2 + \varphi_1\varphi_{p1} + \varphi_{p2} - r_1 r_{p1} = d_2^*; \quad \varphi_1 + \varphi_{p1} = d_1^*.
\end{gathered} \tag{7.25}
$$

Решая эту систему из шести линейных уравнений, получим искомые значения параметров φ_{p1}, φ_{p2}, φ_{p3}, r_{p1}, r_{p2}, r_{p3} регулятора (7.20).

7.1.2 Алгоритм адаптации

Переходя к алгоритму идентификации параметров объекта (7.1), представим его в форме

$$
\begin{gathered}
y(k+1) + \varphi_1 y(k) + \dots + \varphi_n y(k-n+1) = r_1 u(k) + \dots + r_\mu u(k- \ +1) \\
+ f(k+1), (k = 0, 1, 2, \dots).
\end{gathered} \tag{7.26}
$$

Вводя обозначения

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta(k) = \|y(k), \dots, y(k-n+1),\ u(k), \dots, u(k- \ +1)\|'; \\
&\beta = \|-\varphi_1, \dots, -\varphi_n,\ r_1, \dots, r_\mu\|',
\end{aligned}
\right\} \tag{7.27}
$$

запишем (7.26) как

$$
y(k+1) - \delta'(k)\beta = f(k+1).
$$

Вектор неизвестных параметров β будем искать из условия минимума суммы квадратов невязок

$$
L_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left[y(k+1) - \delta'(k)\beta\right]^2.
$$

В соответствии с методом наименьших квадратов этот минимум достигается, и последовательность оценок параметров объекта определяется следующими рекуррентными соотношениями которые являются некоторой модификацией соотношений раздела 6.1.3 и при $h(k) = 1$ с точностью до обозначений совпадают с ними.

$$
\begin{gathered}
\beta(k+1) = \beta(k) + P(k)\delta(k)\left[y(k+1) - \delta'(k)\beta(k)\right] h(k)c(k); \\
\beta(0) = \beta^{(0)};
\end{gathered} \tag{7.28}
$$

$$
P(k+1) = P(k) - P(k)\delta(k)\delta'(k)P(k)h(k)c(k); \tag{7.29}
$$

где

$$
h(k) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n+\mu}\delta_i^2(k)\right)^{-1/2}; \quad c(k) = \left(1 + h(k)\delta'(k)P(k)\delta(k)\right)^{-1}. \tag{7.30}
$$

Утверждение. Пусть имеется объект управления, описываемый уравнением (7.1), с неопределенными параметрами. Адаптивный регулятор, обеспечивающий достижение цели управления (7.3) при $\Delta = \infty$, описывается уравнением

$$\begin{gathered} u(k) + \varphi_{p1}(k)u(k-1) + \ldots + \varphi_{pn}(k)u(k-n) \\ = r_{p1}(k)y(k-1) + \ldots + r_{pn}(k)y(k-n), (k = 0, 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{7.31}$$

параметры которого являются решением линейного алгебраического уравнения

$$N(\beta(k))\upsilon(k) = d^*, \tag{7.32}$$

где $\beta(k)$ – вектор оценок параметров объекта (7.1), получаемых на основе рекуррентных соотношений (7.28) – (7.30).
В этих соотношениях вектор $\delta(k)$, определяемый (7.27), доступен непосредственному измерению. При достаточно больших значениях k векторы $|\beta(k) - \beta| \le \varepsilon$ (ε – достаточно малое положительное число) и корни характеристического уравнения системы (7.11), (7.31) будут близки к заданным числам λ_i^* $(i = \overline{1, 2n})$.

Строгая формулировка этого утверждения и его доказательство приведены в работе [7.4]. В книге [5.5] эти результаты развиваются на случай, когда $\Delta \ne \infty$. Там же получены алгоритмы оптимального (в смысле критериев $J = \lim\limits_{t-+} M\{y^2(k)\}$ и $J = \lim\limits_{k-+} M\{y^2(k) + u^2(k)\}$ адаптивного управления; кроме того, в [5.5] указаны пути обобщения на многомерные системы.

Пример. Адаптивная система управления гирорамой.

Рассмотрим гирораму, дискретная модель которой описывается уравнениями (7.16)– (7.19). Пусть ее параметры изменяются непредвиденным образом. Причина этих изменений может быть различна. Так, например, при сбоях в питании гиромотора кинетический момент гироскопа будет изменяться. При этом скорость изменения кинематического момента будет мала по сравнению со скоростями переходного процесса в гирораме, поэтому гипотеза квазистационарности будет выполняться. Это означает, что можно полагать в (7.16) –(7.19) параметры φ_{ij}, r_i $(i, j = \overline{1, 3})$ постоянными, но неизвестными величинами.

Приведем уравнения (7.16) ... (7.19) к виду (7.21) и будем полагать,

что совокупность внешних возмущений и помех в правой части (7.21) является процессом типа "белый шум".

Регулятор описывается уравнением

$$\begin{gathered} u(k) + \varphi_{p1}(k)u(k-1) + \varphi_{p2}(k-2) + \varphi_{p3}(k)u(k-3) = \\ = r_{p1}(k)y(k-1) + r_{p2}(k)y(k-2) + r_{p3}(k)y(k-3), \end{gathered} \tag{7.33}$$

изменяющиеся параметры которого находятся как решения уравнений, построенных на основе (7.25):

$$\left.\begin{array}{l} -\beta_3(k)\varphi_3(k) + \beta_6(k)r_3(k) = d_6^*; \\ -\beta_2(k)\varphi_3(k) - \beta_3(k)\varphi_2(k) - \beta_5(k)r_3 - \beta_6(k)r_2(k) = d_5^*; \\ -\beta_3(k)\varphi_1(k) - \beta_2(k)\varphi_2(k) - \beta_1(k)\varphi_3(k) - \beta_6(k)r_1(k) - \\ \beta_5(k)r_2(k) - \beta_4(k)r_3(k) = d_4^*; \\ -\beta_3(k) - \beta_2(k)\varphi_1(k) - \beta_1(k)\varphi_2(k) + \varphi_3(k) - \beta_5(k)r_1(k) - \beta_4(k)r_2(k) = d_3^*; \\ -\beta_2(k) - \beta_1(k)\varphi_2(k) - \beta_4(k)r_1(k) = d_2^*; \\ -\beta_1(k) + \varphi_1(k) = d_1^*. \end{array}\right\} \tag{7.34}$$

Оценки $\beta_1(k)$ $(k = 1, 6)$ параметров объекта (7.1), входящие в (7.34), определяются рекуррентными соотношениями:

$$\beta_i(k+1) = \beta_i(k) + \left[\sum_{j=1}^{6} p_{ij}(k)\delta_j(k)\right] \left[y(k+1) - \sum_{\rho=1}^{6} \delta_\rho(k)\beta_\rho(k)\right] h(k)c(k); \tag{7.35}$$

$$P(k+1) = P(k) - P(k)\delta(k)\delta'(k)P(k)h(k)c(k); \quad (i = \overline{1, 6}) \tag{7.36}$$

$$h(k) = \left(1 + \sum_{i=1}^{6} \delta_i^2(k)\right)^{-1/2}; \tag{7.37}$$

$$c(k) = \left[1 + h(k) \sum_{i,j=1}^{6} p_{ij}(k)\delta_i(k)\delta_j(k)\right]^{-1}, \tag{7.38}$$

где $P(k)$ – симметричная матрица размеров 6×6 ; $\delta(k)$ – вектор с компонентами

$$\begin{gathered} \delta_1(k) = y(k); \ \ \delta_2(k) = y(k-1); \ \ \delta_3(k) = y(k-2); \\ \delta_4(k) = u(k); \ \ \delta_5(k) = u(k-1); \ \ \delta_6(k) = u(k-2). \end{gathered} \tag{7.39}$$

7.2 Метод рекуррентных целевых неравенств

7.2.1 Постановка задачи синтеза адаптивного регулятора

Рассмотрим дискретный объект управления, описываемый уравнением

$$y(k+1)+\varphi_1 y(k)+\cdots$$
$$+\varphi_n y(k-n+1)=r_0u(k)+\cdots+r_\mu u(k-\mu)+f(k)(k=0,1,\ldots;\ \ \mu<n), \tag{7.40}$$

переменная $y(k)$ которого доступна непосредственному измерению, внешнее воздействие $f(k)$ является ограниченной последовательностью неизвестных чисел

$$|f(k)|\le f^*,\ \ (k=0,1,\ldots) \tag{7.41}$$

где f^* – заданное число.

Параметры $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, $r_0,\ldots,r_\mu$ объекта неизвестны. Известно лишь, что объект (7.40) является минимально-фазовым. Это означает, что корни полинома $r_0+r_1\lambda+\cdots\ \ +r_\mu\lambda^\mu$ обладают свойством $|\lambda_i|\ge 1\ \ \ (i=\overline{1,\mu})$.

Пусть, кроме того, известен знак коэффициента r_0 и верхняя оценка $|r_0|$ – число c_r в неравенстве $|r_0|\le c_r$.

Пусть цель управления состоит в выполнении неравенства

$$|y(k+1)|\le\Delta,\ \ (k=0,1,\ldots) \tag{7.42}$$

где Δ – заданное число, согласованное с уровнем внешних воздействий.

Далее будем полагать, что

$$\Delta\ge f^*. \tag{7.43}$$

Требуется построить адаптивный регулятор, выходная переменная которого $u(k)$ обеспечивает достижение объектом (7.40) цели управления (7.42).

7.2.2 Синтез регулятора

Рассмотрим вначале случай известных параметров φ_i, r_j $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{0,\mu})$ объекта (7.40). В этом случае построение алгоритма регулирования, при котором достигается цель (7.42), просто. Действительно, если принять этот алгоритм в виде

$$u(k)=r_0^{-1}[\varphi_1y(k)+\ldots+\varphi_ny(k-n+1)-r_1u(k-1)-\ldots-r_\mu u(k-\mu)], \tag{7.44}$$

то, подставляя (7.44) в (7.40) получим

$$y(k+1)=f(k),\ \ (k=0,1,\ldots) \tag{7.45}$$

Если функция $f(k)$ удовлетворяет неравенству (7.41), то

$$|y(k+1)|\le f^*\le\Delta,\ \ (k=0,1,\ldots), \tag{7.46}$$

и, следовательно, цель управления достигается.

Более того, компенсирующее управление (7.44) является оптимальным в смысле функционала

$$J_1=\lim_{k\to\infty}\sup_{|f(t)|\le f^*}|y(k+1)|, \tag{7.47}$$

так как при этом управлении он принимает наименьшее значение, равное f^* .

Представим закон управления (7.44) в более компактной форме. Для этого введем $n+\mu$ -мерные векторы:

$$\delta=\|y(k),\ldots,y(k-n+1),\,u(k-1),\ldots,\,u(k-\mu)\|'; \tag{7.48}$$

$$\beta^*=\left\|\frac{\varphi_1}{r_0},\ldots,\frac{\varphi_n}{r_0},\ \ -\frac{r_1}{r_0},\ldots,-\frac{r_\mu}{r_0},\right\|'. \tag{7.49}$$

Тогда (7.44) примет вид

$$u(k)=\beta^{*'}\delta(k). \tag{7.50}$$

Это управление обеспечивает достижение цели управления.

Учитывая (7.50), запишем уравнение объекта (7.40) в следующей эквивалентной форме:

$$y(k+1)=r_0[u(k)-\beta^{*'}\delta(k)]+f(k). \tag{7.51}$$

Управление будем искать в форме, аналогичной (7.50), заменяя неизвестный вектор β^* вектором настраиваемых параметров $\beta(k)$, и, таким образом,

$$u(k) = \beta'(k)\delta(k). \tag{7.52}$$

7.2.3 Алгоритм адаптации без внешних возмущений

Рассмотрим вначале случай отсутствия внешних возмущений

$$f(k) = 0. \tag{7.53}$$

В этом случае цель управления принимает вид

$$\lim_{k\to\infty} y^2(k) = 0. \tag{7.54}$$

В соответствии с методом градиента направление движения в пространстве настраиваемых параметров $\beta(k)$ пропорционально производным функции

$$r_0^{-2}y^2(k+1) = \left[u(k) - \beta^{*'}\delta(k)\right]^2 = \left\{\left[\beta(k) - \beta^*\right]'\delta(k)\right\}^2 \tag{7.55}$$

по настраиваемым параметрам. Это означает, что

$$\beta_i(k+1) = \beta_i(k) - \tilde{a}_1(k)\frac{\partial\left\{\left[\beta(k) - \beta^*\right]'\delta(k)\right\}^2}{\partial\beta_i(k)}r_0^2. \tag{7.56}$$

Учитывая (7.51), нетрудно видеть, что

$$r_0^2\frac{\partial\left\{\left[\beta(k) - \beta^*\right]'\delta(k)\right\}^2}{\partial\beta_i(k)} = 2\left\{\left[\beta(k) - \beta^*\right]'\delta(k)\right\}\delta_i(k)r_0^2 = 2y(k+1)r_0\delta_i(k),$$

и, таким образом, искомый алгоритм имеет вид

$$\beta_i(k+1) = \beta_i(k) - \tilde{a}_1(k)r_0y(k+1)\delta_i(k) \;\; (i = \overline{1, n+\mu}),\;\; (k = 0, 1, \ldots). \tag{7.57}$$

Для определения параметра $\tilde{a}_1(k)$ алгоритма (7.57), введем обозначение

$$a_1(k) = \tilde{a}_1(k)r_0. \tag{7.58}$$

Тогда (7.57) примет вид

$$\left.\begin{array}{l}\beta_i(k+1) = \beta_i(k) - a_1(k)(signr_0)y(k+1)\delta_i(k);\\ \beta_i(0) = \beta_i^{(0)} \;\; (i = \overline{1, n+\mu}),\;\; (k = 0, 1, \ldots).\end{array}\right\} \tag{7.59}$$

Утверждение. Параметр $a_1(k)$ алгоритма адаптации (7.59), при котором адаптивный регулятор (7.52), (7.59) обеспечивает достижение объектом (7.40) при $f(k) = 0$ цели управления (7.54), определяется выражением

$$a_1(k) = \nu\left[c_r\sum_{i=1}^{n+\mu}\delta_i^2(k)\right]^{-1},\;\; (0 < \nu < 2). \tag{7.60}$$

Для доказательства этого утверждения, приведенного в [5.5] возьмем функцию Ляпунова

$$\upsilon(k) = \sum_{i=1}^{n+\mu}\left(\beta_i(k) - \beta_i^*\right)^2 > 0, \tag{7.61}$$

которая выражает "расстояние"настраиваемых параметров регулятора (7.52) от параметров идеального закона регулирования (7.50).

Найдем условия убывания величины $\upsilon(\beta(k))$ вдоль траектории движения адаптивной системы (7.51), (7.52), (7.59).

Для этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\Delta\upsilon(k) = \upsilon(k+1) - \upsilon(k) = \left[\beta(k+1) - \beta^*\right]'\left[\beta(k+1) - \beta^*\right] -\\ \left[\beta(k) - \beta^*\right]'\left[\beta(k) - \beta^*\right].\end{aligned} \tag{7.62}$$

Учитывая (7.59) и (7.55), запишем при $f(k) = 0$, что

$$\begin{aligned}&\left[\beta(k+1) - \beta^*\right]'\left[\beta(k+1) - \beta^*\right] = \left[\beta(k) - a_1(k)(signr_0)y(k+1)\delta(k) - \beta^*\right]'\times\\ &\times\left[\beta(k) - a_1(k)(signr_0)y(k+1)\delta(k) - \beta^*\right] = \left[\beta(k) - \beta^*\right]'\left[\beta(k) - \beta^*\right]-\\ &-a_1(k)(signr_0)y(k+1)2\delta'(k)[\beta(k) - \beta^*] - a_1^2(k)(signr_0)^2y^2(k+1)\delta'(k)\delta(k) =\\ &= [\beta(k) - \beta^*]'[\beta(k) - \beta^*] - a_1(k)(signr_0)y(k+1)\left[\frac{2}{r_0}y(k+1)-\right.\\ &\left.-a_1(k)(signr_0)y(k+1)\delta'(k)\delta(k)\right].\end{aligned} \tag{7.63}$$

Подставляя это выражение в (7.62), получим

$$\Delta\upsilon(k) = -a_1(k)\left[2\frac{signr_0}{r_0} - a_1(k)\delta'(k)\delta(k)\right] y^2(k+1). \qquad (7.64)$$

Нетрудно видеть, что $\Delta\upsilon(k) \le 0$, если

$$0 \le a_1(k) \le \frac{2}{|r_0|\delta'(k)\delta(k)} \le \frac{2}{c_r\delta'(k)\delta(k)}. \qquad (7.65)$$

Для того чтобы обеспечить строгое убывание $\Delta\upsilon(k)$ (при $y(k+1) \ne 0$) , достаточно взять

$$a_1(k) = \frac{\gamma}{c_r\delta'(k)\delta(k)}, \qquad (7.66)$$

где

$$0 < \gamma < 2. \qquad (7.67)$$

При таком значении $a_1(k)$ получим

$$\Delta\upsilon(k) = -\frac{\rho y^2(k+1)}{\delta'(k)\delta(k)} < 0, \qquad (7.68)$$

где ρ – некоторое положительное число.

Так как

$$-\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\upsilon(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^2(k+1)}{\delta'(k)\delta(k)} = \frac{\upsilon(\beta^{(0)}}{\rho}) < \infty, \qquad (7.69)$$

то это означает, что $\frac{y^2(k+1)}{\delta'(k)\delta(k)} \to 0$, и, следовательно, достигается цель адаптации $\lim\limits_{k\to\infty} y(k+1) = 0$, если только величины $\delta'(k)\delta(k)$ будут оставаться ограниченными.

Известно , что если объект является минимально-фазовым, то функция $\delta'(k)\delta(k)$ ограничена и, таким образом, утверждение доказано.

7.2.4 Алгоритм адаптации при внешних возмущениях

Рассмотрим теперь объект (7.40) или эквивалентный ему объект (7.51) с учетом внешних возмущений, удовлетворяющих неравенству (7.41).

Эффективным способом достижения цели управления при действии возмущений является введение в алгоритм зоны нечувствительности.

Если изменять $\beta(k)$ только при $|y(k+1)| > \Delta$ так, что

$$\beta_i(k+1) = \begin{cases} \beta_i(k), \quad if \ \ |y(k+1)| \le \Delta, \quad (i = \overline{1, n+\mu}); \\ \beta_i(k) - \nu\dfrac{(signr_0)y(k+1)}{c_r\delta'(k)\delta(k)}\delta_i(k), \quad if \ \ |y(k+1)| > \Delta, \end{cases} \qquad (7.70)$$

где

$$0 < \nu < 2\left(1 - \frac{f^{*2}}{\Delta^2}\right), \qquad (7.71)$$

(if означает "если"), то вновь, как и при отсутствии $f(k)$, будет выполнено (7.69) и, следовательно, в силу ограниченности $\delta'(k)\delta(k)$ цель (7.42) будет достигнута.

Эти алгоритмы адаптации были получены В. А. Якубовичем на основе предложенного им метода рекуррентных целевых неравенств [7.3].

Они были распространены на случай многомерных объектов, запаздывания в измерении и управлении и обобщены на системы стабилизации с заданной динамикой и следящие системы [5.5].

Пример. Построим адаптивный регулятор химико-технологических процессов, рассмотренный в примерах 5.1.1, 5.1.3, Этот процесс описывается уравнениями

$$x(k+1) = \phi x(k) + ru(k)] + f(k); \qquad (7.72)$$

$$y(k) = dx(k), \qquad (7.73)$$

в которых параметры ϕ , r и d неизвестны. В отличие от примеров 5.1.1, 5.1.3 будем полагать, что $f(k)$ – неизвестная последовательность. При этом

$$|f(k)| \le f^*. \qquad (7.74)$$

Требуется построить адаптивный регулятор, при котором достигается цель управления

$$[y(k+1) - g]^2 \le \Delta^2. \qquad (7.75)$$

В соотношениях (7.74) и (7.75) f^* , g , Δ – заданные числа.

Запишем вначале уравнения (7.72), (7.73) в форме (7.40):

$$y(k+1) + \varphi_1 y(k) = r_0 u(k) + f(k), \qquad (7.76)$$

где

$$\varphi_1 = -\phi;\;\; r_0 = dr;\;\; f(k) = df(k). \qquad (7.77)$$

Предполагается, что известна оценка

$$|r_0| \le c_r \qquad (7.78)$$

и знак числа r_0 .

Переходя к построению алгоритма адаптивного управления, введем векторы $\beta^*(k)$ и $\delta(k)$ с компонентами

$$\beta_1^* = \frac{\varphi_1}{r_0};\;\; \beta_2^* = 1;\;\; \delta_1(k) = y(k);\;\; \delta_2(k) = g. \qquad (7.79)$$

Тогда управление (7.52) примет вид

$$u(k) = \beta_1(k) y(k) + \beta_2(k) g. \qquad (7.80)$$

Алгоритм адаптации параметров этого регулятора запишем как

$$\beta_1(k+1) = \begin{cases} \beta_1(k) \;\; if \;\; |y(k+1) - g| \le \Delta; \\ \beta_1(k) - \nu \dfrac{(sign r_0)[y(k+1) - g] y(k)}{c_r (y^2(k) + g^2)} \;\; if \;\; |y(k+1) - g| > \Delta. \end{cases} \qquad (7.81)$$

$$\beta_2(k+1) = \begin{cases} \beta_2(k) \;\; if \;\; |y(k+1) - g| \le \Delta; \\ \beta_2(k) - \nu \dfrac{(sign r_0)[y(k+1) - g] g}{c_r (y^2(k) + g^2)} \;\; if \;\; |y(k+1) - g| > \Delta. \end{cases} \qquad (7.82)$$

7.3 Частотное адаптивное управление

7.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически устойчивый объект управления, описываемый уравнением

$$y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + d_1 \dot y + d_0 y = k_m u^{(m)} + \dots + k_0 u + f, \qquad (7.83)$$

в котором d_i , k_j $(i = \overline{0, n-1},\; j = \overline{0, m})$ – неизвестные числа, $f(t)$ – внешнее возмущение-гармоническая функция

$$f(t) = a \sin \omega t, \quad 0 \le \omega \le \infty \qquad (7.84)$$

с неизвестной амплитудой и частотой, о которых известно лишь, что $|a| < f^*$, где f^* -известно, а $0 \le \omega \le \infty$.

Задача состоит в построении регулятора, описываемого, начиная с момента времени t_N , дифференциальным уравнением

$$d_{p(n-1)} u^{(n-1)} + \dots + d_{p1} \dot u + d_{p0} u = k_{p(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + k_{p1} \dot y + k_{p0} y, \qquad (7.85)$$

коэффициенты которого таковы, чтобы выход объекта удовлетворяет условию

$$|y(t)| \le y^*, \quad t \ge t_{ad} + t_{tr}, \qquad (7.86)$$

в котором y^* –заданное число, t_{ad} –длительность адаптации, t_{tr} – время переходного процесса.

Предполагается, что при известных коэффициентах объекта существует регулятор (7.85), обеспечивающий выполнение требований (7.86).

Адаптивный регулятор, решающий эту задачу, описывается дифференциальным уравнением с кусочно - постоянными коэффициентами

$$d^{[i]}_{p(n-1)} u^{(n-1)} + \dots + d^{[i]}_{p1} \dot u + d^{[i]}_{0} u = k^{[i]}_{p(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + k^{[i]}_{p1} \dot y + k^{[i]}_{p0} y + {}^{[i]} v, \qquad (7.87)$$

где i $(i = \overline{1, N})$ – номер интервала адаптации, t_i – момент окончания i -того интервала, числа t_i так же как числа N , $d^{[i]}_{pk}$, $k^{[i]}_{pk}$ $(k = \overline{0, n-1},\;\; i = \overline{0, N})$ находятся в процессе адаптации, $v(t)$ – испытательное воздействие вида

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k (t - t_{i-1}), \;\; t_{i-1} \le t \le t_i, \;\; (i = \overline{1, N}) \qquad (7.88)$$

с заданными амплитудами ρ_k и частотами ω_k $(k = \overline{1,n}$.

Заметим, что в действительности амплитуды и частоты испытательного сигнала различны на различных интервалах адаптации и он описывается выражением

$$v^{[i]}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{[i]} \sin \omega_k^{[i]}(t - t_{i-1}), \quad t_{i-1} \le t \le t_i, \quad (i = \overline{1,N}). \qquad (7.89)$$

Однако настройка этих амплитуд и частот на различных интервалах для простоты не рассматривается, и поэтому будем полагать эти параметры испытательного сигнала неизменными. При $i = 1$ дифференциальное уравнение (7.87) заменяется алгебраическим соотношением

$$u = v, \qquad (7.90)$$

которое является частным случаем уравнения (7.87), когда $d_{pk}^{[i]} = k_{pk}^{[i]} = 0$, $(k = \overline{1, n-1})$, $d_{p0}^{[i]} = 1$, $k_{p0}^{[i]} = 0$, $(i \in \overline{1, N})$.

В этих случаях испытателный сигнал (7.88) содержит n гармоник $(\theta = n)$, а в остальных случаях $\theta = 2n - 1$.

7.3.2 Первый интервал адаптации (идентификация объекта)

На первом интервале адаптации идентифицируется объект (7.83).

Для этой цели он возбуждается испытательным сигналом (7.88) и в соответствии с процедурой 6.2.4 конечно- частотной идентификации находятся оценки $\hat{d}_i = d_i^{[1]} = d_i(q_1, T)$, $\hat{k}_i = k_i^{[1]} = k_i(q_1, T)$ $(i = \overline{0, n-1})$ коэффициентов объекта.

Используя эти оценки, находим с помощью процедуры 4.2.1 регулятор для второго интервала

$$d_p^{[2]}(s)u = k_p^{[2]}(s)y + v, \qquad (7.91)$$

где $d_p^{[2]}(s) = d_{p(n-1)}^{[2]} s^{(n-1)} + \cdots + d_{p0}^{[2]}$, $k^{[2]}(s) = k_{p(n-1)}^{[2]} s^{(n-1)} + \cdots + k_{p0}^{[2]}$.

Замыкаем объект этим регулятором и проверяем выполнение требования (7.86) к точности. Если это требование выполняется, то процесс адаптации заканчивается (до момента нарушения этого требования). В противном случае начинается второй интервал адаптации.

7.3.3 Второй интервал адаптации (Идентификация объекта, замкнутого регулятором)

На этом интервале продолжается идентификация объекта и на ее основе синтезируется регулятор для третьего интервала. Для описания процесса идентификации рассмотрим объект с регулятором (7.91). Исключая переменную $u(t)$, запишем уравнения этой системы в виде

$$D^{[2]}(s)y = k(s)v + d_p^{[2]}(s)f, \qquad (7.92)$$

где

$$D^{[2]}(s) = d(s)d_p^{[2]}(s) - k(s)k_p^{[2]}(s) \qquad (7.93)$$

Уравнение (7.92) будем рассматривать как уравнение "нового"объекта с управлением v и возмущением $d_p^{[2]}(s)f$ и идентифицируем этот "объект используя процедуру 6.2.4 конечно- частотной идентификации.

Частотные параметры этого "объекта называемые частотными параметрами замкнутой системы, определяются как

$$\nu_k = \mathrm{Re}\, w_{cl}(j\omega_k), \quad \mu_k = \mathrm{Jm}\, w_{cl}(j\omega_k) \quad (k = \overline{1,n}), \qquad (7.94)$$

где $w_{cl}(s)$ – передаточная функция от v к y :

$$w_{cl}(s) = \frac{k(s)}{D^{[2]}(s)} = \frac{k(s)}{d(s)d_p^{[2]}(s) - k(s)k_p^{[2]}(s)}. \qquad (7.95)$$

Её можно выразить через передаточную функцию объекта и регулятора как

$$w_{cl}(s) = \frac{w_0(s)}{1 - w_0(s)w_p^{[2]}(s)} \cdot \frac{1}{d_p^{[2]}(s)}, \qquad (7.96)$$

где $w_p^{[2]}(s) = \dfrac{k_p^{[2]}(s)}{d_p^{[2]}(s)}$.

Переходя к идентификации "объекта"(7.92) повторим этапы процедуры 6.2.4.

Возбудим объект (7.92) испытательным сигналом (7.88) и подадим его выход на вход фильтра Фурье

$$\begin{aligned} \nu_k(\tau) &= \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} y(t) \sin \omega_k (t - t_1)\, dt, \\ \mu_k(\tau) &= \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} y(t) \cos \omega_k (t - t_1)\, dt, \end{aligned} \qquad (k = \overline{1, 2n-1}) \tag{7.97}$$

где $t_1 = q_1 T_b$. Измеряя выходы фильтра в моменты времени $\tau = qT_b$ находим новые оценки частотных параметров объекта. Для этой цели используется связь (7.96), которую нетрудно представить как

$$\alpha_k + j\beta_k = \frac{\nu_k + j\mu_k}{(\nu_k + j\mu_k) w_p^{[2]}(j\omega_k) + \dfrac{1}{d_p^{[2]}(s)}}, \quad (k = \overline{1, n}). \tag{7.98}$$

Заменяя ν_k и μ_k $(k = \overline{1, n})$ их оценками $\nu_k(qT_b)$ и $\mu_k(qT_b)$ $(k = \overline{1, n})$ $q = q_1 + 1, \ldots$, вычисляем по этим формулам оценки частотных параметров объекта $\hat{\alpha}_k = \alpha_k(qT_b)$ и $\hat{\beta}_k = \beta_k(qT_b)$ $(k = \overline{1, n}, \quad q = q_1 + 1, \ldots)$.

Решая частотные уравнения (6.59) и проверяя необходимые условия (6.75) получим, в момент времени $t_2 = q_2 T$, в который эти условия выполняются, новые оценки коэффициентов объекта

$$\hat{d}_i = d_i^{[2]} = d_i(q_2 T), \;\; \hat{k}_i = k_i^{[2]} = k_i(q_2 T), \;\; (i = \overline{0, n-1}). \tag{7.99}$$

При этом необходимо проверить выполнение *условий расширяемости интервалов* адаптации:

$$q_i - q_{i-1} \geq q_{i-1} - q_{i-2} + k, \;\; i = 2, 3, \tag{7.100}$$

где k – заданное положительное целое число.

Это условие для рассматриваемого интервала имеет вид $q_2 - q_1 \geq q_1 + k$. Если оно не выполняется, то решаем частотные уравнения до момента $q_2 = 2q_1 + k$.

Используя эти оценки, находим с помощью алгоритма 4.2.1 регулятор

$$d^{[3]}(s) u = k^{[3]}(s) y + \mathrm{v} \tag{7.101}$$

для третьего интервала адаптации.

Замыкаем объект этим регулятором и проверяем выполнение требования (7.86) к точности. Если это требование выполняется, то процесс адаптации заканчивается (до момента нарушения этого требования). В противном случае начинается третий интервал адаптации.

Примечание Если выход объекта достигает в момент времени $t = t^*$ предельно допустимого значения y^* $(y(t^*) = y^*)$, и тогда интервал заканчивается, регулятор отключается и на следующем интервале объект возбуждается испытательным сигналом (7.88) и повторяются операции первого интервала и т.д. При этом длительность фильтрации превышает длительность первого интервала.

7.3.4 Сходимость адаптации

Если возмущение $f(t)$ – строго ФФ-фильтруемо на более широком наборе ω_k $(k = \overline{1, n})$, то ошибки фильтрации частотных параметров замкнутой системы $\Delta\nu_k(\tau) = \nu_k - \nu_k(\tau)$, $\Delta\mu_k(\tau) = \mu_k - \mu_k(\tau)$ $(k = \overline{1, n})$ обладают свойством

$$\lim_{\tau \to \infty} \Delta\nu_k(\tau) = \lim_{\tau \to \infty} \Delta\mu_k(\tau) = 0, \;\; (k = \overline{1, n}). \tag{7.102}$$

Процесс адаптации сходится, если длительность некоторого его интервала будет больше числа τ^{**} , при котором ошибки фильтрации будут таким, что целевые условия (7.86) достижимы. Как бы ни было велико число τ^{**} , в силу условия (7.100) расширяемости интервалов, всегда найдется i^* -тый интервал такой, что $t_i - t_{i^*} \geq \tau^{**}$. Это означает сходимость адаптации.

Частотное адаптивное управление многомерными объектами построено в [7.13], [7.14].

7.3.5 Самонастройка испытательного сигнала

Выше предполагалось , что амплитуды и частоты испытательных сигналов, прикладываемых к объекту и замкнутой системе заданы. В действительности их амплитуды и частоты самонастраиваются а процессе адаптивного управления. Алгоритмы их самонастройки во многом совпадают с указанными в разделе 6.2.5 алгоритмами, используемыми при идентификации.

7.3.6 Программное обеспечение

Система ГАММА:

1. Директива D311 (Частотное адаптивное управление).
2. Директива D311sd (Частотное адаптивное управление с самонастройкой длительности идентификации).
3. Директива D311sad (Частотное адаптивное управление с самонастройкой амплитуд испытательного сигнала).

7.4 Адаптивный ПИД-регулятор

Во многих случаях желаемое программное движение (задающее воздействие) является кусочно-постоянной функцией с интервалами постоянства достаточно большими по сравнению с временем затухания переходных процессов в системе стабилизации этого движения.В таких случаях система стабилизации строится на основе ПИД-регулятора [7.15],[7.16].Для определения его коэффициентов используется упрощенная модель объекта управления, описываемая линейным дифференциальным уравнением первого либо второго порядка с запаздыванием.

Параметры объекта изменяются достаточно медленно и поэтому коэффициенты его модели аппроксимируются кусочно- постоянной функцией. При изменении ее значений регулятор перестраивается, адаптируясь к новым значениям параметров объекта.

Часто предполагают, что эти новые значения известны либо они могут быть идентифицированы по ряду косвенных признаков [7.17],[7.18]. Вместе с этим в ряде случаев параметры объекта - не известны, а их косвенная идентификация затруднена неизвестными внешними возмущениями, действующими на объект.

Ниже описывается частотный адаптивный ПИД -регулятор, построенный с использованием конечно-частотной идентификации ,позволяющей идентифицировать объект при неизвестных ограниченных внешних возмущениях.

7.4.1 Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему управления, описываемую уравнением

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t-\tau) + f(t-\tau) \qquad t \geq t_0; \qquad (7.103)$$

$$d_{p2}\ddot{u} + \dot{u} = k_{p2}(\ddot{g} - \ddot{y} - \ddot{v}) + k_{p1}(\dot{g} - \dot{y} - \dot{v}) + k_{p0}(g - y - v), \quad (7.104)$$

где $y(t)$ и $u(t)$ – измеряемые выходы объекта (7.103) и регулятора (7.104), $g(t)$ – измеряемое задающее воздействие(желаемое программное движение), $f(t)$ – неизмеряемое внешнее возмущение – неизвестная, ограниченная функция, $v(t)$ – испытательный сигнал. Коэффициенты объекта (k , T , τ) и регулятора (d_{p2} , k_{p2} , k_{p1} , k_{p0})– неизвестные числа.

Коэффициенты объекта изменяются в моменты времени t_1 , t_2 , $\cdots$, t_N , и они постоянны внутри интервала

$$I_1 = [t_0\ t_1), \quad I_2 = [t_1\ t_2), \quad \cdots, \quad I_N = [t_{N-1},\ t_N). \qquad (7.105)$$

Моменты времени t_1 , t_2 , $\cdots$, t_N для простоты предполагаются известными.

Точность слежения выхода $y(t)$ за задающим сигналом $g(t)$, который не изменяется внутри указанных интервалов, определяется ошибкой слежения

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t). \qquad (7.106)$$

Чтобы обеспечить требуемую точность слежения в течение каждого из интервалов (7.105), начиная со второго интервала (на первом интервале параметры объекта предполагаются известными) осуществляется идентификация объекта (находятся оценки его коэффициентов $\hat{k}$, $\hat{T}$, $\hat{\tau}$), синтезируется и реализуется регулятор (7.104). Этот процесс называется адаптивным управлением. Его цель описывается неравенством

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^*, \qquad t_i + t_i^\alpha \leq t \leq t_{i+1}, \qquad (i = \overline{2, N-1}), \qquad (7.107)$$

в котором ε^* – заданное число, t_i^α – время адаптации на i -том интервале, $(i = \overline{2, N-1})$. Предполагается, что интервалы (7.105) достаточно велики так, что $t_{i+1} - t_i > t_i^\alpha \quad (i = \overline{2, N-1})$.

Задача состоит в том, чтобы для каждого из интервалов (7.105) найти коэффициенты регулятора (7.104) такие, чтобы выполнялось требование (7.107) к точности слежения.

Ниже предполагается, что система (7.103), (7.104) сохраняет устойчивость на смежных интервалах. Это означает, что регулятор, построенный на i -том интервале обеспечивает устойчивость системы на $(i+1)$ -ом интервале.

7.4.2 Построение регулятора при известных коэффициентах объекта

Запишем выражение (7.104) в форме ПИД-регулятора. Для этого интегрируя (7.104) при нулевых начальных условиях и $v(t) = 0$, получим уравнение

$$d_{p2}\dot{u} + u = k_c\left(\varepsilon + \frac{1}{T_i}\int\limits_{t_0}^{t}\varepsilon dt + T_d\frac{d\varepsilon}{dt}\right), \tag{7.108}$$

в котором

$$k_c = k_{p1}, \qquad T_i = \frac{k_{p1}}{k_{p0}}, \qquad T_d = \frac{k_{p2}}{k_{p1}}. \tag{7.109}$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты объекта (7.103) известны. Для этого случая разработан ряд методов [2] определения коэффициентов k_p , T_i , T_d регулятора (7.108), различающихся моделями целей управления, чувствительностью к внешним возмущениям и т.д.

Ниже используется один из таких методов, названный методом внутренней модели управления [7.19]. Для его описания преобразуем уравнение (7.103) по Лапласу при нулевых начальных условиях и запишем его передаточную функцию

$$w_0(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}, \tag{7.110}$$

где s – символ преобразования Лапласа.

Используя ПАДЕ-аппроксимацию первого порядка, запишем эту передаточную функцию объекта как

$$w_0^n(s) = \frac{k\left(-\frac{\tau}{2}s+1\right)}{(Ts+1)\left(\frac{\tau}{2}s+1\right)}. \tag{7.111}$$

Передаточная функция регулятора для объекта (7.111) имеет вид

$$w_c(s) = \frac{(Ts+1)\left(\frac{\tau}{2}s+1\right)}{ks\left(\frac{\lambda\tau}{2}s+\lambda+\tau\right)}, \tag{7.112}$$

где λ – заданное положительное число $(\lambda < T)$.

При таком регуляторе, компенсирующем динамические свойства объекта, уравнение системы (7.103), (7.104) с высокой степенью точности описывается (при $v = 0$) уравнением

$$\lambda\dot{y} + y = g(t-\tau), \tag{7.113}$$

из которого следует, что при достаточно медленно изменяющемся задающем воздействии, требования (7.107) к точности выполняются.

Из выражения (7.112) следует, что искомые коэффициенты регулятора выражаются через коэффициенты объекта как

$$d_{p2} = \tfrac{\lambda\tau}{2(\lambda+\tau)}, \qquad k_{p2} = \tfrac{T\tau}{2k(\lambda+\tau)}, \qquad k_{p1} = \tfrac{2T+\tau}{2k(\lambda+\tau)}, \qquad k_{p0} = \tfrac{1}{k(\lambda+\tau)} \tag{7.114}$$

и процесс адаптации регулятора (7.104) на каждом из интервалов (7.105) сводится к вычислению коэффициентов регулятора по формулам (7.114) и их реализации.

Таким образом, решение задачи, поставленной в разделе 2, сводится к идентификации объекта, результатом которой являются оценки $\hat{k}$, $\hat{T}$, $\hat{\tau}$, которые используются для построения регулятора на основе выражения (7.114).

7.4.3 Идентификация объекта и алгоритм адаптации

В соответствии с методом конечно-частотной идентификации испытательный сигнал имеет вид

$$v = \rho_1\sin\omega_1 t + \rho_2\sin\omega_2 t, \qquad \omega_1 < \omega_2, \tag{7.115}$$

где ρ_i и ω_i $(i = \overline{1,2})$ – положительные числа.

Амплитуды ρ_1 и ρ_2 этого сигнала должны удовлетворять условию

$$\rho_1 + \rho_2 \le \eta g^*, \tag{7.116}$$

в котором g^* – известная граница модуля задающего воздействия $\left(|y_{sp}(t)| \le y^*_{sp}\right)$, η – заданное положительное число $(\eta < 1)$ определяемое допустимым искажением задающего воздействия.

Частоты ω_1 и ω_2 полагаем заданными.

Для вывода точных соотношений, связывающих входы и выходы объекта с его коэффициентами рассмотрим установившейся режим $(t \to \infty)$ работы системы (7.103), (7.104). В этом режиме

$$y = \rho_1(a_{y1}\sin\omega_1 t + b_{y1}\cos\omega_1 t) + \rho_2(a_{y2}\sin\omega_2 t + b_{y2}\cos\omega_2 t) + y^r + y^f; \tag{7.117}$$

$$u = \rho_2(a_{u1}\sin\omega_1 t + b_{u1}\cos\omega_1 t) + \rho_2(a_{u2}\sin\omega_2 t + b_{u2}\cos\omega_2 t) + u^r + u^f, \tag{7.118}$$

где $y^r(t)$, $u^r(t)$, $y^f(t)$, $u^f(t)$ – компоненты выхода и входа объекта, зависящие от задающего воздействия $y_{sp}(t)$ и внешнего возмущения $f(t)$ соответственно, $\rho_i a_{yi}$, $\rho_i b_{yi}$ $(i = 1, 2)$ – амплитуды гармоник выхода объекта (7.103), $\rho_i a_{ui}$, $\rho_i b_{ui}$ $(i = 1, 2)$ – амплитуды гармоник выхода регулятора (7.104).

bf Утверждение. Коэффициенты объекта (7.103) и амплитуды выходов объекта и регулятора связаны соотношениями

$$T^2 = \frac{(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{\omega_1^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \omega_2^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}, \qquad k^2 = (\alpha_2^2 + \beta_2^2)(T^2\omega_2^2 + 1); \tag{7.119}$$

$$\tau = -\frac{1}{\omega_1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta_1 + T\alpha_1\omega_1}{\alpha_1 - T\beta_1\omega_1}, \qquad \omega_1\tau < \frac{\pi}{2}, \tag{7.120}$$

в которых

$$\alpha_i = \frac{a_{yi}a_{ui} + b_{yi}b_{ui}}{a_{ui}^2 + b_{ui}^2}, \qquad \beta_i = \frac{-a_{yi}b_{ui} + b_{yi}a_{ui}}{a_{ui}^2 + b_{ui}^2} \qquad (i = 1, 2). \tag{7.121}$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_i = \mathrm{Re}w_0(j\omega_i), \qquad \beta_i = \mathrm{Jm}w_0(j\omega_i) \qquad (i = 1, 2) \tag{7.122}$$

и найдем связь выхода (7.117) со входом (7.118) при $r_e(t) = f(t) = 0$, обозначая $\bar{a}_{yi} = \rho_i a_{yi}$, $\bar{b}_{yi} = \rho_i b_{yi}$, $\bar{a}_{ui} = \rho_i a_{ui}$, $\bar{b}_{ui} = \rho_i b_{ui}$, $i = 1, 2$.

Если приложить к объекту (7.103) управление

$$u = \bar{a}_{u1}\sin\omega_1 t, \tag{7.123}$$

то его выход при $t \to \infty$ имеет вид

$$y_s = \bar{a}_{u1}(\alpha_1\sin\omega_1 t + \beta_1\cos\omega_1 t). \tag{7.124}$$

Если управление имеет вид

$$u = \bar{b}_{u1}\cos\omega_1 t,$$

то

$$y_c = \bar{b}_{u1}(\alpha_1\cos\omega_1 t + \beta_1\sin\omega_1 t).$$

Тогда выход

$$y = y_s + y_c = (\bar{a}_{n1}\alpha_1 - \bar{b}_{n1}\beta_1)\sin\omega_1 t + (\bar{b}_{u1}\alpha_1 + \bar{a}_{u1}\beta_1)\cos\omega_1 t. \tag{7.125}$$

Повторяя изложенное для частоты ω_2 , получим, сравнивая (7.125) с (7.117), систему уравнений

$$\bar{a}_{ui}\alpha_i - \bar{b}_{u1}\beta_i = \bar{a}_{yi}, \qquad \bar{b}_{ui}\alpha_i + \bar{a}_{u1}\beta_i = \bar{b}_{yi}, \qquad (i = 1, 2), \tag{7.126}$$

решение которого имеет вид (7.121).

Найдем теперь связь параметров α_i и β_i $(i = 1, 2)$ с коэффициентами объекта (7.103).

Частотная передаточная функция объекта

$$w_0(j\omega_i) = \frac{k\cos\omega_i\tau - j\sin\omega_i\tau}{Tj\omega_i + 1} = \alpha_i + j\beta_i \qquad (i = 1, 2). \tag{7.127}$$

Из этого выражения следует система нелинейных алгебраических уравнений для искомых чисел k , T и τ :

$$k\cos\omega_i\tau + T\beta_i\omega_i = \alpha_i, \qquad -k\sin\omega_i\tau - T\alpha_i\omega_i = \beta_i \qquad (i = 1, 2). \tag{7.128}$$

Перенесем второе слагаемое левой части этих уравнений в правую часть, возведем обе их части в квадрат и сложим, тогда получим систему линейных уравнений

$$k^2 - (\alpha_i^2 + \beta_i^2)\omega_i^2 T^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 \qquad (i = 1, 2),$$

решение которого имеет вид (7.119).

Для нахождения запаздывания τ перенесем второе слагаемое системы (7.128) в правую часть и поделим вторую систему на первую, тогда получим при $i = 1$ выражение (7.120), в котором, для единственности решения полагаем, что частота ω_i выбрана так, чтобы выполнялось условие $\omega_1\tau < \frac{\pi}{2}$ и, таким образом, утверждение доказано.

Чтобы найти оценки амплитуд выходов объекта и регулятора, необходимые для выражения (7.121), подадим эти выходы на входы фильтра Фурье:

$$a_{yk}(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t) \sin \omega_k t dt, \qquad b_{yk}(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t) \cos \omega_k t dt;$$

$$a_{uk}(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} u(t) \sin \omega_k t dt, \qquad b_{uk}(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} u(t) \cos \omega_k t dt,$$
$$(k = 1, 2) \tag{7.129}$$

где τ – время фильтрации, t_F – момент начала фильтрации.

Если выполняются условия ФФ-фильтруемости задающего воздействия и внешнего возмущения [9], то

$$\lim_{\tau\to\infty} a_{yk}(\tau) = a_{yk}, \quad \lim_{\tau\to\infty} b_{yk}(\tau) = b_{yk}, \quad \lim_{\tau\to\infty} a_{yk}(\tau) = a_{yk}, \quad \lim_{\tau\to\infty} b_{yk}(\tau) = b_{yk}. \tag{7.130}$$

Условие ФФ-фильтруемости означает, что функции $g(t)$ и $f(t)$ не содержат частот ω_1 и ω_2 . Это условие может быть проверено экспериментально и при его нарушении необходимо изменить частоты ω_1 и ω_2 так, чтобы оно выполнялось.

Процедура адаптивного управления состоит из следующих операций.

1. Идентифицировать объект (7.103): а) приложить его выход и вход к входам фильтра Фурье (7.129), чьи выходы при заданном значении æ дают оценки амплитуд; б) подставляя эти оценки в формулы (7.129), (7.119), (7.121), вычислить оценки коэффициентов объекта $\hat{k}$, $\hat{T}$, $\hat{\tau}$.

2. Вычислить, используя соотношение (7.114), где $k = \hat{k}$, $T = \hat{T}$, $\tau = \hat{\tau}$, коэффициенты регулятора.

3. Заменить коэффициенты регулятора вычисленными и проверить выполнение требования (7.107) к точности слежения. Если оно нарушается, вернутся к операции 1, увеличив время фильтрации æ .

Этот алгоритм обеспечивает достижение цели управления (7.107), если интервалы (7.105) достаточно велики.

Пример Рассмотрим систему (7.103),(7.108) со следующими коэффициентами объекта и регулятора

$$k = 3, \ \ T = 5, \ \ \tau = 1, \tag{7.131}$$

$$k_c = 1.3, \ \ T_i = 5.5, \ \ T_d = 0.45, \ \ g = 0.14. \tag{7.132}$$

Задающее воздействие- ступенчатая функция:

$$y_{sp} = 1(t \geq t_0), \ \ y_{sp} = 0(t < t_0). \tag{7.133}$$

Внешнее возмущение

$$f(t) = 0.05 signsin(2.1t). \tag{7.134}$$

Моделирование этой системы с помощью пакета MATLAB показывает, что, после затухания переходных процессов (течении $t_p = 31c$) ошибка слежения не превышает 0.015:

$$|\varepsilon(t)| \leq 0.015, t > 31c$$

Пусть коэффициент k принимает в моменты времени $t_1 = 314c, t_2 = 942c, t_3 = 1570c$ значения $k^{(1)} = 5.1, k^{(2)} = 8.67, k^{(3)} = 14.7$ соответственно.

Моделирование системы (7.103),(7.108) при различных значениях коэффициента k показывает, что она теряет устойчивость при $k = 8$. Это означает, что , начиная с момента времени t_2 , она неустойчива, если не использовать адаптивное управление.

Чтобы сформировать такое управление, при котором после окончания адаптации выполняется целевое условие

$$|\varepsilon(t)| \leq 0.02, \ \ t \geq t_i^a, \ \ i = \overline{1, N-1} \tag{7.135}$$

использован следующий идентифицирующий сигнал

$$v(t) = 0.003 sin(0.2t) + 0.004 sin(0.4t), \tag{7.136}$$

приложеный к регулятору и тогда в уравнении (7.108) $\varepsilon = y_{sp} - y - v$

Для моделирования процесса адаптации была разработана специальная м-функция в среде MATLAB и получены следующие результаты.

1-й интервал $([0, 314), k = 3)$.

На этом интервале была промоделирована исходная система с коэффициентами (7.131),(7.132)с идентифицирующим сигналом (7.136). Ошибка слежения увеличилась, но осталась в допуске (7.135)

2-й интервал $([314, 942), k = 5.1)$.

На этом интервале , в соответствии с алгоритмом адаптивного управления, осуществлялась идентификация объекта и получены следующие оценки

$$\hat{k} = 5.32, \ \hat{T} = 5.27, \ \hat{\tau} = 0.73.$$

Используя эти оценки были вычислены коэффициенты регулятора:

$$k_c = 0.93, \ T_i = 5.64, \ T_d = 0.343, \ g = 1.29$$

Моделирование объекта с таким регулятором показало, что требования (7.135)выполняется.

Аналогичные результаты получены для 3-го $([942c, 1570c), k = 8.67)$ и 4-го $([1570c, 2198c),$
$k = 8.67)$ интервалов.

7.5 Комментарии

В теории адаптивного управления при неизвестных ограниченных внешних возмущениях можно выделить несколько направлений.

Существо подхода первого из этих направлений можно пояснить на примере работы [7.1], где решается задача LQ -оптимизации для объекта с неизвестными коэффициентами. Для решения задачи в уравнениях Риккати, вместо истинных коэффициентов объекта используются их квазиоценки, получаемые по методу градиента. Они могут существенно отличаться от коэффициентов объекта, так как при неизвестных внешних возмущениях решения задачи идентификации не существует (если при этом не используются испытательные сигналы, рассматриваемые ниже) и поэтому квазиоценки являются одними из возможных значений коэффициентов объекта, согласованных с его входом и выходом. Показано, что процесс адаптации сходится к некоторой, заранее неизвестной, ошибке слежения. В книге [5.13] содержатся другие методы адаптации, не использующие квазиоценки.

Начало второго направления было положено методом рекуррентных целевых неравенств [7.3], [5.5]. Важной особенностью этого направления является содержательность цели адаптивного управления, выраженной в форме ограничений (допусков) на отклонения установившегося выхода объекта. Решение задачи l_1 оптимизации было развито в работах [7.5], [7.6] на случай, когда коэффициенты объекта неизвестны. В этих работах квазиоценки находятся специальным методом градиентного типа, так, чтобы в установившемся

режиме получить наименьшее отклонение выхода системы. Численная реализация полученного алгоритма адаптивного управления затруднена. Это естественная цена за то, что он обеспечивает наилучшую точность регулирования при неизвестных коэффициентах объекта и произвольном ограниченном внешнем возмущении.

В связи с этим, в ряде работ рассматривается более узкий класс внешних возмущений. Так, в работе [7.7], внешнее возмущение – неизвестное постоянное. Для этого случая получен простой в реализации алгоритм адаптивного управления. В работе [7.8] внешнее возмущение – кусочно-постоянная ограниченная функция с известным частотным диапазоном. Цель адаптации – заданный характеристический полином замкнутой системы (который используется также в работах [7.9], [7.10], где внешнее возмущение – произвольная, ограниченная функция). Оценки коэффициентов объекта находятся с помощью адаптивного наблюдателя, а закон управления, который формируется на основе этих оценок и оценки вектора состояний, содержит испытательный сигнал.

В частотном адаптивном управлении [7.12]- [7.14], как и во втором направлении, цель управления – величина установившегося выхода объекта. Внешнее возмущение – сумма бесконечного числа гармоник с неизвестными амплитудами и частотами, и ограниченной известным числом суммой амплитуд.

В описанных выше методах адаптации регулятор непрерывно перестраивается, а при частотном адаптивном управлении изменение параметров регулятора происходит через достаточно большие промежутки времени (интервалы адаптации). Это обеспечивает линейность модели системы на этих интервалах (тогда, как в других методах модель системы нелинейна и трудно найти условия, при которых в процессе адаптации значения входа и выхода объекта не принимали бы недопустимо больших значений) и поэтому не возникает трудностей численной реализации алгоритма адаптации .

8 Система ГАММА для автоматизации построения алгоритмов управления

Система ГАММА предназначена для разработки алгоритмов управления и ориентирована на инженеров-разработчиков систем автоматического управления (САУ).

Инженер-разработчик САУ вводит по запросу системы: а) модель объекта управления (модель управляемого процесса), б) технические требования к САУ: допустимые величины ошибок управления, время регулирования и т.п.

Система работает автоматически, и результатом работы являются алгоритмы управления для САУ.

Система состоит из директив, каждая из которых имеет две части: интерфейсную и расчетную. Каждая директива решает определенный класс задач построения алгоритма управления. В системе имеется несколько групп директив: синтез регуляторов, идентификация и адаптивное управление.

ГАММА занимает промежуточное положение между отраслевыми пакетами, предназначенными для разработки алгоритмов управления в отраслях (авиации, нефтегазовых предприятиях, электроэнергетике и т.п.) и системами типа МАТЛАБ, сочетая практическую направленность отраслевых пакетов с гибкими и удобными средствами расширения системы, присущими МАТЛАБ. Для этой цели система ГАММА разделена на две части – среду пользователя и среду исследователя. *Среда пользователя* предназначена для инженера-разработчика САУ, который использует готовые директивы, а *среда исследователя* предназначена для разработки новых директив. Эта среда содержит модули, из которых исследователь формирует новые директивы, используя средства визуального программирования либо встроенный проблемно-ориентированный язык. Наличие такой среды позволяет легко адаптировать систему к потребностям инженеров-разработчиков САУ различных отраслей.

Ниже приводится среда пользователя. Описание среды исследователя приведено в руководстве [8.17]

Примечание. Используемые ниже обозначения соответствуют руководству [8.17] и отличаются от используемых в предыдущих главах. Если привести их в соответствие с обозначениями предыдущих глав, то обозначения в сообщениях системы ГАММА (протоколы, интерфейс и т.п.) не будут соответствовать таким обозначениям.

8.1 Классы решаемых задач

Список директив системы ГАММА-2PC

N дир.	Название директивы
	1. Идентификация
D111	Частотная идентификация объекта
D111sd	Частотная идентификация с самонастройкой длительности фильтрации
D111sad	Частотная идентификация объекта с самонастройкой амплитуд испытательного сигнала
D111sfload	Частотная идентификация объекта с самонастройкой амплитуд и частот испытательного сигнала
	2. Адаптивное управление
D311	Частотное адаптивное управление
D311sd	Частотное адаптивное управление с самонастройкой длительности идентификации
D311sad	Частотное адаптивное управление с самонастройкой амплитуд испытательного сигнала
	3. Синтез регуляторов
D411	Аналитическое конструирование регуляторов (АКоР)
D413	Оптимальная система с наблюдателем (минимально-фазовый объект)
D431	H_∞-субоптимальное управление
D441	Точное управление объектом первого вида
D442	Точное управление объектом второго вида
D443	Точное управление объектом третьего вида
D444	Точное управление объектом четвертого вида

Технические средства, вызов и загрузка системы.

Система ГАММА (Версия ГАММА-2PC) предназначена для работы на персональной ЭВМ типа IBM PC. Система работает под управлением ОС Windows 95/98/2000/NT. Рекомендуемое разрешение экрана – 800x600 (мелкие шрифты) и выше. Для просмотра файлов справки на компьютере должна быть установлена программа Microsof Word из пакета Microsoft Office.

Вызов и загрузка системы осуществляется запуском программы newgamma.exe. Для удобства запуска рекомендуется создать ярлык на рабочем столе или в меню "Пуск". При запуске системы на экран выводится заставка с двумя кнопками: "пользователь"и "разработчик". Для работы с готовыми директивами следует нажать кнопку "пользователь". Далее на экран выводится список доступных директив, разбитый на группы. Пользователь выбирает нужную директиву и запускает ее.

Ввод исходных данных

После выбора директивы появляется окно ввода исходных данных.

При вводе данных необходимо придерживаться следующих правил:

а) Дифференциальные и алгебраические уравнения записываются в их естественной форме. Формат записи уравнения следующий:

```
<У> :: = <ЧсУ> = <ЧсУ> | <ЧсУ> = 0 <ЧсУ> ::
 [{?}],<ЧУ>| [{?}]\,
<ЧУ>{?}<ЧУ> <ЧУ> :: = [<К>],<ИД>,[<НП>],[(<НПР>)],
```

где <У> – уравнение; <ЧсУ> – часть уравнения (левая или правая); <ЧУ> – член уравнения; <К> – коэффициент (целое или вещественное число), если <К> = 1, то <К> в записи члена уравнения можно опустить; <ИД> – идентификатор (строка); <НП> – номер переменной (целое число); <НПР> – номер производной (целое число), если <НПР> = 0, то <НПР> можно не указывать. Например, j-я производная i-й компоненты вектора z записывается как zi(j). Левые и правые части уравнений разделяются символом "=", знак "+" у первых членов уравнений можно опускать в левой и правой частях.

б) Матрица записывается в виде последовательности целых или вещественных чисел по строкам, элементы одной строки отделяются друг от друга символом строки отделяются символом ";".

в) Вектор записывается в виде последовательности целых или вещественных чисел, разделенных символом ";".

г) Числа записываются в соответствии с правилами: Целые числа – в их естественной форме, например, 3, 205 и т.п. Вещественные числа – в форме с фиксированной или плавающей точкой, например, 7.1264, -8.74E-3 и т.п.

Загрузка и сохранение данных.

Система имеет возможность сохранения и загрузки как отдельных элементов (чисел, векторов, матриц, уравнений), так и всех исходных данных одновременно. Для сохранения отдельного элемента следует нажать на кнопку "Сохр"справа от панели ввода этого элемента и в открывшемся окне ввести имя файла. Нажав на кнопку "Загр можно аналогичным образом загрузить данные из файла. Для сохранения и загрузки всего набора исходных данных следует воспользоваться пунктами верхнего меню "Сохранить"и "Загрузить".

Вывод результатов.

Результаты работы директивы автоматически выводятся в окно протокола. Для сохранения протокола в текстовом файле, например, для последующей печати, следует нажать на пункт меню "Сохранить"и в открывшемся окне ввести имя файла.

8.2 Директивы синтеза регуляторов

8.2.1 Виды моделей объектов

1. Уравнения объекта, заданного в форме Коши, имеют вид

$$\dot{x} = Ax + \tilde{B}_1\tilde{w} + B_2u, \quad y = C_2x, \tag{8.1}$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояний объекта; $u(t) \in R^m$ — вектор управлений; $y(t) \in R^r$ – вектор измеряемых переменных; $\tilde{w}(t) \in R^\mu$ — вектор внешних возмущений; A , $\tilde{B}_1$, B_2 и C_2 — известные матрицы чисел соответствующих размеров. Уравнения (8.1) в форме "вход-выход"имеет вид

$$T_1(s)y = T_2(s)u + T_3(s)\tilde{w}, \tag{8.2}$$

где полиномиальные матрицы

$$T_1(s) = \sum_{k=0}^{a_1} T_k^{(1)} s^k, \quad T_2(s) = \sum_{k=0}^{a_2} T_k^{(2)} s^k, \quad T_3(s) = \sum_{k=0}^{a_3} T_k^{(3)} s^k$$

строятся [?] на основе матриц уравнений (8.1).

2. Объект (8.1) при $r = m$ называется минимально-фазовым (устойчивым по управлению), если корни уравнения

$$\det T_2(s) = 0 \tag{8.3}$$

имеют отрицательные вещественные части.

3. Для описания задачи точного управления (см. раздел 4.2.3) рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = Ax + \tilde{B}_1\tilde{w} + B_2u, \quad y = C_2x, \quad \tilde{z} = \tilde{C}_1x, \tag{8.4}$$

$$\dot{x}_c = A_cx_c + B_cy, \quad u = D_cx_c + C_cy, \tag{8.5}$$

где $z(t) \in R^{m_1}$ — вектор регулируемых переменных, $x_c(t) \in R^{n_c}$ — вектор состояний регулятора (8.5), A_c , B_c , D_c , C_c и $\tilde{C}_1$ — матрицы чисел соответствующих размеров.

Пусть компоненты вектора возмущений представлены в виде

$$\tilde{w}_i(t) = \sum_{k=0}^{\rho}(\delta_{ki}^s \sin\omega_{ki}t + \delta_{ki}^c \cos\omega_{ki}t), \qquad i = \overline{1,\mu}, \tag{8.6}$$

где амплитуды δ_k^s , δ_k^c и частоты ω_k $k = \overline{1,\rho}$ — произвольные числа, но такие, что

$$|\tilde{w}_i(t)| \le w_i^*, \qquad i = \overline{1,\mu}, \tag{8.7}$$

где w_i^* $i = \overline{1,\mu}$ — заданные числа (границы внешних возмущений).

Установившиеся значения регулируемых переменных

$$\tilde{z}_{i,st} = \limsup_{t\to\infty} |\tilde{z}_i(t)|, \qquad i = \overline{1,m_1}.$$

Регулятор (8.5) обеспечивает точное управление , если

$$\tilde{z}_{i,st} \le \tilde{z}_i^*, \qquad i = \overline{1,m_1}, \tag{8.8}$$

где z_i^* , $i = \overline{1,m_1}$ — заданные числа.

4. Объект первого вида описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + \tilde{B}_1(\tilde{w} + u), \quad y = x, \quad \tilde{z} = \tilde{C}_1x, \tag{8.9}$$

которые совпадают с (8.4) при $\tilde{B}_1 = B_2$ $(\mu = m)$ и $C_2 = I_n$ (I_n — единичная матрица размеров $n \times n$).

5. Объект второго вида описывается уравнениями (8.4), если:

а) $$y = \tilde{z} \quad (\tilde{C}_1 = C_2, r = m = m_1). \tag{8.10}$$

б) полином $\det T_2(s)$ — гурвицев (корни уравнения (8.3) имеют отрицательные вещественные части).

6. Объект третьего вида описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + \tilde{B}_1\tilde{w} + B_2u, \quad y = x, \quad \tilde{z} = \tilde{C}_1x.$$

Это более общий вид, чем первый ($\tilde{B}_1 \neq B_2$).

7. Объект четвертого вида описывается уравнениями (8.4) при условии (8.10). Это более общий вид, чем второй (отсутствуют ограничения на корни $\det T_2(s)$).

8. Модель объекта в форме Лагранжа имеет вид

$$\sum_{i=0}^{\gamma_1} Q^{(i)}s^iq = \sum_{j=0}^{\gamma_2} M^{(j)}s^ju + \sum_{k=0}^{\gamma_3} L^{(k)}s^kw, \tag{8.11}$$

$$y = \bar{D}q, \tag{8.12}$$

где $q(t) \in R^{n_1}$ — вектор промежуточных переменных, $Q^{(i)}$, $M^{(j)}$, $L^{(k)}$, $\bar{D}$ $(i = \overline{1,\gamma_1}; i = \overline{1,\gamma_2}; i = \overline{1,\gamma_3})$ — заданные матрицы чисел соответствующих размеров.

8.2.2 Директива D411: Аналитическое конструирование регуляторов

Пусть имеется полностью управляемый объект описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + B_2u. \tag{8.13}$$

Требуется найти матрицу D_c регулятора

$$u = D_cx \tag{8.14}$$

такую, чтобы на движениях системы (8.13),(8.14) при произвольных начальных отклонениях $x(t_0)$ минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty}(x^TQx + u^Tu)dt \tag{8.15}$$

с заданной матрицей $Q \ge 0$.

Решение этой задачи состоит в нахождении матрицы $P > 0$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению Риккати

$$AP + P^TA - PB_2^TB_2P = -Q \tag{8.16}$$

и вычислению искомой матрицы

$$D_c = -B^T P. \tag{8.17}$$

Часто функционал (8.15) задается в форме

$$J = \int_0^\infty (\tilde{z}^T Q^{(0)} \tilde{z} + u^T u) dt, \quad Q^{(0)} > 0 \tag{8.18}$$

где $Q^{(0)}$ — заданная положительно определенная матрица. В этом случае в функционале (8.15)

$$Q = \tilde{C}_1^T Q^{(0)} \tilde{C}_1 \tag{8.19}$$

Рассмотрим функционал более общей структуры чем (8.18), содержащий производные управлений

$$J = \int\limits_0^\infty (\tilde{z}^T Q^{(0)} \tilde{z} + \sum_{i=0}^{\psi} u^{(i)^T} M_i^T M_i u^{(i)}) dt \tag{8.20}$$

где $M_i \quad i = \overline{1,\psi}$ — заданная матрица ($M_0 = I_m$). Решение задачи АКоР для функционала (8.20) имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{\psi} C_i u^{(i)} = \bar{D}_c x, \tag{8.21}$$

где C_i , $\bar{D}_c \quad i = \overline{1,\psi}$ — матрицы чисел, которые являются решением специально построенных уравнений аналогичных уравнениям (8.16),(8.17). Уравнения для матриц уравнения (8.21) приведены в [3.1].

8.2.3 Директива D431: H_∞ -субоптимальное управление

Модель системы в пространстве состояний Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad z = C_1 x + D_{12} u, \quad y = C_2 x + D_{21} \eta, \tag{8.22}$$

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \quad u = C_c x_c + D_c y, \tag{8.23}$$

Второе из этих уравнений совпадает с (8.5), а первое отличается от (8.4) слагаемыми $D_{12} u$ и $D_{21} w$, где $w = [\tilde{w}, \eta]^T$, $\eta(t) \in R^r$ — вектор помех измерения, D_{12} и D_{21} — матрицы чисел соответствующих размерностей. Эти матрицы должны обладать следующими свойствами

$$D_{12}^T [C_1, D_{12}] = [0, I_m] \tag{8.24}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix} \tag{8.25}$$

(I_m и I_r — единичные матрицы размеров $m \times m$ и $r \times r$ соответственно) Чтобы удовлетворить требование (8.24), сформируем вектор z как

$$z = \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} u$$

и тогда матрицы

$$C_1 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}$$

удовлетворяют (8.24).

Условие (8.25) выполняется так как

$$B_1 = [\tilde{B}_1, 0], \quad D_{21} = [0, I_r]$$

Вектор z связан с вектором внешних возмущений соотношением

$$z = H(s) w, \tag{8.26}$$

H_∞ норма устойчивой действительной матрицы $H(s)$ — это число

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{0 \le \omega \le \infty} \bar{\sigma}[H(j\omega)], \tag{8.27}$$

где $\bar{\sigma}[H(j\omega)]$ — наибольшее сингулярное значение матрицы $H(j\omega)$, вычисляемое как

$$\bar{\sigma}[H(j\omega)] = \max_i \{\lambda_i^{1/2} [H^T(-j\omega) H(j\omega)]\}, \tag{8.28}$$

где $\lambda_i[M]$ — i -тое собственное значение матрицы M .

Задача H_∞ –субоптимального управления. Найти регулятор (8.23) такой, чтобы выполнялось следующее условие

$$\|H(s)\|_\infty \le \gamma, \tag{8.29}$$

где γ — заданное положительное число и

$$\gamma > \gamma_0 = \min_{K(s)} \|H(s)\|_\infty. \tag{8.30}$$

Алгоритм решения задачи H_∞-субоптимального управления H_∞ субоптимальный регулятор находится на основе следующего [?] алгоритма .

1) Задать некоторое значение $\gamma > 0$.

2) Решить два уравнения Риккати

$$A^TP + PA + \gamma^{-2}PB_1B_1^TP - PB_2B_2^TP = -C_1^TC_1, \tag{8.31}$$

$$AR + RA^T + \gamma^{-2}RC_1^TC_1R - RC_2^TC_2R = -B_1B_1^T, \tag{8.32}$$

и найти $P \geq 0$ и $R \geq 0$. Если такие матрицы не существуют, увеличив γ , вернуться к 2.

3) Проверить, что матрицы P и R неотрицательно-определенные и $|\lambda_i[PR]| < \gamma^2$ $i = \overline{1,n}$, если это условие нарушается, вернуться к 2, увеличив γ , если выполняется вернуться к п.2 уменьшив γ .

4) Сформировать матрицы регулятора (8.23)

$$\begin{gathered} A_c = A + \gamma^{-2}B_1B_1^TP - (I - \gamma^{-2}RP)^{-1}RC_2^TC_2, \\ B_c = (I - \gamma^{-2}RP)^{-1}RC_2^T, \quad C_c = -B_2^TP, \quad D_c = 0. \end{gathered} \tag{8.33}$$

Если все компоненты вектора состояний объекта управления (8.22) измеряются ($y = x$), тогда решается только уравнение Риккати (8.31), и регулятор (8.23) имеет вид

$$u = D_cx, \quad D_c = -B_2^TP. \tag{8.34}$$

Уравнения (8.31), (8.32) решаются на основе вычисления собственных чисел гамильтониановых матриц

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \\ -C_1^TC_1 & -A^T \end{bmatrix} \tag{8.35}$$

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_1^TC_1 - C_2^TC_2 \\ -B_1B_1^T & -A \end{bmatrix} \tag{8.36}$$

Для решения уравнения (8.16) используется матрица (8.35) при $\gamma \to \infty$.

8.2.4 Директивы точного управления

Заменим требования (8.8) к установившимся ошибкам системы (8.22), (8.23) неравенством

$$\tilde{z}_{st}^TQ^{(0)}\tilde{z}_{st} \leq \eta^2 \tag{8.37}$$

где

$$Q^{(0)} = \operatorname{diag}\Big[(z_1^*)^{-2}, \ldots, (z_{m_1}^*)^{-2}\Big], \quad \tilde{z}_{st} = [\tilde{z}_{1,st}, \ldots, \tilde{z}_{m_1,st}]^T. \tag{8.38}$$

При $\eta = 1$ условие (8.37) достаточно для выполнения требований (8.8).

Обозначим

$$J(\bar{\omega}, \bar{\delta}) = \tilde{z}_{st}^TQ^{(0)}\tilde{z}_{st} \tag{8.39}$$

где

$$\bar{\omega} = [w_1, \ldots, w_\rho]^T, \quad \bar{\delta} = [\bar{\delta}^{(1)^T}, \ldots, \bar{\delta}^{(\rho)^T}]^T, \tag{8.40}$$

$$\bar{\delta}^{(k)} = [\delta_1^{(k)}, \ldots, \delta_\mu^{(k)}]^T, \quad k = \overline{1, \rho_1},$$

$$\delta_i^{(k)} = \sqrt{|\delta_i^{s,k}|^2 + |\delta_i^{c,k}|^2} \quad (i = \overline{1,\mu}, \quad k = \overline{1,\rho_1}).$$

Будем говорить, что $\bar{\delta} \in \Delta$ и $\bar{\omega} \in \Omega$ если выполняются ограничения (8.7). Значение

$$J = \sup_{\bar{\omega}\in\Omega} \sup_{\bar{\delta}\in\Delta} J(\bar{\omega}, \bar{\delta}) \tag{8.41}$$

называется показателем установившейся точности.

Задача точного управления. Найти регулятор (8.5) такой, чтобы ошибка системы (8.4),(8.5) удовлетворяла неравенству

$$J \leq \eta^2 \tag{8.42}$$

для $\eta = 1$. Если такого регулятора не существует, то найти регулятор и допуск η^2 , для которых выполняется условие (8.37)

Директива D441: Объект первого вида Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями (8.9).

Пусть этот объект, возбужденный одночастотным внешним возмущением $\tilde{w}$, замкнут регулятором (обратная связь по состоянию)

$$u = D_c^* x, \tag{8.43}$$

в котором матрица D_c^* определяется как

$$D_c^* = -B_2^T P^*, \tag{8.44}$$

где P^* — положительно определенная матрица, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$A^T P^* + P^* A - P^* B_2 B_2^T P^* = -\alpha^2 \tilde{C}_1^T \tilde{Q}^{(0)} \tilde{C}_1. \tag{8.45}$$

Если коэффициент α уравнения Риккати (8.45) выбирается из неравенства

$$\alpha^2 \geq \sum_{i=1}^{\mu} w_i^{*^2}, \tag{8.46}$$

тогда регулятор (8.43) обеспечивает выполнение требований (8.42) для $\eta = 1$ к точности системы (8.9),(8.43).

Директивы D442 и D413: Объект второго вида Рассмотрим два пути преобразования уравнения (8.2) при $r = m$ к форме (8.9) объекта управления первого вида.

Первый способ [3.1] состоит в использовании "условных" векторов управлений и возмущений

$$\bar{u} = T_2^{-1}(0) T_2(s) u, \quad \bar{w} = T_2^{-1}(0) T_3(s) \tilde{w}. \tag{8.47}$$

Тогда уравнение (8.2) принимает вид

$$T_1(s) y = T_2(0)(\bar{u} + \bar{w}). \tag{8.48}$$

Это уравнение легко преобразуется в форму

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}_2(\bar{u} + \bar{w}), \quad \tilde{z} = y = \bar{C}_1 \bar{x}, \tag{8.49}$$

где $\bar{x}$ — полностью измеряемый вектор, который выражается через вектор y следующим образом

$$\bar{x} = \Gamma(s) y, \tag{8.50}$$

где $\Gamma(s)$ — полиномиальная матрица.

Второй способ базируется на использовании вектора $\bar{w}$, который является решением следующего уравнения

$$T_2(s)\bar{w} = T_3(s) w \tag{8.51}$$

Тогда уравнение (8.2) представляется в форме $T_1(s) y = T_2(s)(u + \bar{w})$, которую можно преобразовать следующим образом

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + B_2(\bar{u} + \bar{w}), \quad \bar{z} = \bar{y} = \bar{C}_1 \bar{x}. \tag{8.52}$$

Директива D442 .

Найдем границы $\bar{w}_i^*$ "внешних возмущений" $\bar{w}$. Эти границы могут быть вычислены на основе (8.47) при одночастотном возмущении следующим образом

$$\bar{w}_i^* = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} \left| [T_2^{-1}(0) T_3(j\omega)\delta]_{(i)} \right| \quad k = \overline{1, m} \tag{8.53}$$

После замены в неравенстве (8.46) w_i^* на $\bar{w}_i^*$, $i = \overline{1, m}$ решается уравнение Риккати (8.45) при $A = \bar{A}$, $B_2 = \bar{B}_2$, $C_1 = \bar{C}_1$ и находится

$$\bar{u} = \bar{D}_c \bar{x}. \tag{8.54}$$

Уравнение регулятора в форме "вход-выход" следует из (8.54), если принять во внимание выражения (8.47) и (8.50) для $\bar{u}$ и $\bar{x}$,

$$G(s) u = R(s) y, \tag{8.55}$$

где полиномиальные матрицы

$$G(s) = T_2^{-1}(0) T_2(s), \quad R(s) = \bar{D}_c \Gamma(s). \tag{8.56}$$

Преобразование уравнения (8.55) к форме (8.23) дает искомый регулятор.

Однако может случиться, что уравнение (8.55) не преобразуется к форме Коши (8.23). Например, если $r = m = 1$ и степень полинома $R(s)$ больше степени полинома $G(s)$.

В таком случае уравнение Риккати (8.45) изменяется следующим образом. Уравнение Риккати (8.45) дает решение задачи о минимуме функционала

$$J = \int_0^\infty [\alpha^2 y^T Q^{(0)} y + u^T u] dt, \quad \tilde{z} = y \tag{8.57}$$

при $w = 0$.

Если функционал (8.57) заменить на функционал

$$J_\varepsilon = \int_0^\infty [\alpha^2 y^T Q^{(0)} y + u^T u + \varepsilon_1 \dot{u}^T \dot{u} + \ldots + \varepsilon_k u^{(k)^T} u^{(k)}]dt, \tag{8.58}$$

где $\varepsilon_i \quad i = \overline{1, k}$ — положительные достаточно малые числа, тогда полиномиальная матрица $G(s)$ имеет структуру

$$\tilde{G}(s) = T(s) T_2^{-1}(0) T_2(s), \tag{8.59}$$

где $T(s)$ — полиномиальная матрица степени k, которая может быть всегда выбрана из условий преобразования (8.55) к форме (8.23).

Коэффициенты матрицы $T(s)$ исчезают [3.1] вместе с $\varepsilon_i \quad i = \overline{1, k}$ так же как коэффициенты матрицы $\bar{R}(s)$, входящей в матрицу $\tilde{R}(s) = R(s) + \bar{R}(s)$.

Регулятор, полученный таким способом

$$\tilde{G}(s)u = \tilde{R}(s)y \tag{8.60}$$

близок к регулятору (8.55) на интервале частот $[0, \omega^*]$, где ω^* зависит от $\varepsilon_i \quad i = \overline{1, k}$.

Директива D413 .

Она опирается на уравнение (8.51). Границы внешнего возмущения $\bar{w}(t)$ определяются для одночастотного случая как

$$\bar{w}_i^* = \sup_{0 \le \omega \le \infty} [T_2^{-1}(j\omega) T_3(j\omega) \bar{\delta}]_i, \quad = \overline{1, \mu}, \tag{8.61}$$

Регулятор (8.23) описывается в этом случае уравнениями

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A}\hat{x} + \bar{B}_2 \bar{u} + K_f(\bar{y} - \bar{C}_2 \hat{x}), \tag{8.62}$$

$$\bar{u} = C_c \hat{x}, \tag{8.63}$$

где8.62 — уравнение наблюдателя, которое может быть переписано как8.23, где

$$A_c = \bar{A} + \bar{B}_2 C_c - K_f \bar{C}_2, \quad B_c = K_f, \quad D_c = 0. \tag{8.64}$$

Неизвестные матрицы K_f и C_c регулятора (8.62),(8.63) определяются как

$$C_c = -B_2^T \bar{P}, \quad K_f(\rho) = R(\rho) C_2^T, \tag{8.65}$$

где $\bar{P}$ и $R(\rho)$ положительно определенные матрицы решения уравнений Риккати

$$\bar{A}^T \bar{P} + \bar{P}\bar{A} - \bar{P}\bar{B}_2 \bar{B}_2^T \bar{P} = -\alpha^2 \bar{C}_2^T \tilde{Q}^{(0)} \bar{C}_2, \tag{8.66}$$

$$\bar{A}R(\rho) + R(\rho)\bar{A}^T - R(\rho)\bar{C}_2^T \bar{C}_2 R(\rho) = -Q - \rho^2 \bar{B}_2 W \bar{B}_2^T. \tag{8.67}$$

Здесь W и Q — положительная и неотрицательно определенная квадратные матрицы соответственно, ρ — некоторое число. Если параметр α уравнения Риккати (8.66) выбирать из неравенства (8.46) $\left(\text{где } w_i^* \text{ заменяется на } \bar{w}_i^* \quad i = \overline{1, m}\right)$ и ρ^2 в (8.67) — достаточно большое число $(\rho \to \infty)$ (см. раздел 4.1.7), тогда регулятор (8.23) с коэффициентами (8.64),(8.65) решает задачу точного управления.

Директива D443: Объект третьего вида Для объекта этого вида может не существовать управления $u = D_c x$, решающего задачу точного управления. Однако есть два частных случая, когда такое решение существует.

Первый случай: существует число γ^2 такое, что матрица

$$B_3 B_3^T = B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T \ge 0 \tag{8.68}$$

при этом пара (B_3, A) — стабилизируема (неравенство (8.68) означает, что $B_3 B_3^T$ — неотрицательно определенная матрица).

В этом случае находим минимальное $\gamma^2 = \gamma_2^2$, при котором выполняется неравенство (8.68), и решаем при $\gamma^2 = \gamma_2^2$ следующее уравнение Риккати

$$A^T P + PA + \gamma^{-2} P B_1 B_1^T P - P B_2 B_2^T P = -\alpha^2 C_1^T \tilde{Q}^{(0)} C_1, \tag{8.69}$$

которое при $\tilde{Q}^{(0)} = I_m$ и $\alpha = 1$ совпадает с уравнением8.31.

Параметр α в уравнении (8.69) должен удовлетворять условию

$$\alpha^2 = \rho \gamma_2^2 \sum_{i=1}^m (w_i^*)^2 \tag{8.70}$$

Второй случай: полином $\det \tilde{T}_2(s)$ — гурвицев, где $\tilde{T}_2(s)$ — матричный полином уравнения объекта в форме “вход-выход”, если $\tilde{z}$ — выход

$$\tilde{T}_1(s)\tilde{z} = \tilde{T}_2(s)u + \tilde{T}_3(s)\tilde{w} \tag{8.71}$$

В этом случае решим задачу 1 для обектов второго вида $y = \tilde{z}$ и получим регулятор

$$G(s)u = R(s)\tilde{z} \qquad (8.72)$$

Приводим его к форме Коши и полагаем $\tilde{z} = C_1 x$.

<u>Общий случай</u>
В этом случае число α , входящее в8.69 неизвестно и поэтому используется следующий алгоритм: изменить α и находить минимальное значение $\gamma^2(\alpha)$ (при котором решение уравнения8.69 $P > 0$) до получения чисел α_0 и ν^2 таких, что

$$\nu^2 = \frac{\gamma^2_{min}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \min_{\alpha} \frac{\gamma^2_{min}(\alpha)}{\alpha^2} \qquad (8.73)$$

Искомое в задаче точного управления число

$$\eta^2 = \nu^2 \sum_{i=1}^{\mu} w_i^{*2} \qquad (8.74)$$

Директива D444: Объекты четвертого вида Чтобы решить задачу точного управления для такого объекта используем уравнения

$$A^T P + PA + \gamma^{-2}\beta^2 PB_1\tilde{Q}^{(1)}B_1^T P - PB_2B_2^T P = -\alpha^2 C_1^T\tilde{Q}^{(0)}C_1, \quad (8.75)$$

$$AR + RA^T + \gamma^{-2}\alpha^2 RC_1^T\tilde{Q}^{(0)}C_1R - RC_2^TC_2R = -\beta^2B_1\tilde{Q}^{(1)}B_1^T, \quad (8.76)$$

где $\tilde{Q}^{(1)} = \mathrm{diag}[\tilde{q}_{11}^{(1)}, \ldots, \tilde{q}_{mm}^{(1)}]$, $\tilde{q}_{11}^{(1)} \geq 0$, β — некоторое число, пара $(B_1\tilde{L}^{(1)},\, A)$ — стабилизируема, где $\tilde{L}^{(1)} = \mathrm{diag}\left[\sqrt{\tilde{q}_{11}^{(1)}}, \ldots, \sqrt{\tilde{q}_{mm}^{(1)}}\right]$ $(\tilde{L}^{(1)^T}\tilde{L}^{(1)} = \tilde{Q}^{(1)})$.

Эти уравнения совпадают с уравнениями (8.31) и(8.32) при $\alpha = \beta = 1$, $\tilde{Q}^{(0)} = I$, $\tilde{Q}^{(1)} = I$, $C_1 = C_2$.

Выражения для матриц регулятора (8.23) имеют вид

$$\begin{gathered} A_c = A + \gamma^{-2}\beta^2B_1\tilde{Q}^{(1)}B_1^TP - B_2B_2^TP - (I - \gamma^{-2}RP)^{-1}RC_2^TC_2, \\ B_c = (I - \gamma^{-2}RP)^{-1}RC_2^T, \quad C_c = -B_2^TP, \quad D_c = 0. \end{gathered} \qquad (8.77)$$

Уравнение (8.76) совпадает при $B_1 = B_2$ с уравнением (8.67), используемом для построения наблюдателя во втором методе синтеза

регуляторов. Поэтому, если объект (8.1) — минимально-фазовый и приведен к форме (8.52), то при $\gamma \to \infty$ и достаточно больших β^2 в уравнениях (8.75)

и (8.76) регулятор (8.23) с коэффициентами (8.77) дает решение задачи, если α удовлетворяет неравенству (8.46) при $w_i^* = \bar{w}_i^*$ $i = \overline{1, \mu}$.

Число ν в выражении (8.74) находится аналогично.

$$\nu^2 = \min_{\substack{0 \leq \alpha \leq \infty \\ 0 \leq \beta \leq \infty}} \frac{\gamma^2_{min}(\alpha, \beta)}{\alpha^2} \qquad (8.78)$$

8.3 Директивы идентификации

8.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически устойчивый объект, описываемый дифференциальным уравнением

$$y^{(n)}+d_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+d_1\dot{y}+d_0y=k_\gamma u^{(\gamma)}+\cdots+k_1\dot{u}+k_0u+f, \quad t \geq t_0, \quad (8.79)$$

где $y(t)$ – измеряемый выход; $u(t)$ – измеряемый вход, формируемый для целей идентификации и называемый *испытательным сигналом*; $f(t)$ – неизвестное ограниченное возмущение: $|f(t)| \leq f^*$, где f^* – заданное число. Коэффициенты d_i и k_j , $(i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, \gamma})$ – неизвестные числа ($\gamma < n$). Для простоты далее полагаем, что n – известное число.

Выход и вход объекта (8.79) ограничены:

$$|y(t)| \leq y_-, \quad |u(t)| \leq u_-, \quad t \geq t_0, \qquad (8.80)$$

где y_- и u_- – заданные числа. Число y_- таково, что выполняется условие

$$|\bar{y}(t)| < y_-, \quad t \geq t_0, \qquad (8.81)$$

в котором $\bar{y}(t)$ – «естественный» выход объекта (выход в режиме его нормальной эксплуатации, когда испытательный сигнал отсутствует ($u(t) = 0$)).

Примечание 2. Понятие «естественный» выход объекта может включать в себя более общий случай, когда к объекту (8.79) наряду с возмущениями $f(t)$ приложен управляющий сигнал $u_{prog}(t)$. В этом случае в уравнении (8.79): $u(t) = u_{prog}(t) + u_{test}(t)$, где $u_{test}(t)$

– испытательный сигнал. Включая функцию $k_\gamma u_{prog}^{(\gamma)} + \cdots + k_1 \dot{u}_{prog} + k_0 u_{prog}$ в функцию $f(t)$ и опуская нижний индекс $u(t) := u_{test}(t)$, приходим к уравнению (8.79). Ограничения (8.80) и условие (8.81) означают, что испытательный сигнал использует лишь остаточные (остающиеся в режиме нормальной эксплуатации объекта) ресурсы $|\bar{y}(t)| - y_-$, определяющиеся числами y_- и u_-.

Задача идентификации состоит в нахождении оценок коэффициентов объекта (8.79).

8.3.2 Уровни неопределённости объекта

Запишем передаточную функцию объекта (8.79) в виде

$$w(s) = K \frac{\prod\limits_{k=p_1+p_2+1}^{p_1+p_2+p_3} (T_k s + 1) \prod\limits_{k=p_1+p_2+p_3+1}^{p=p_1+p_2+p_3+p_4} \left(T_k^2 s^2 + 2T_k \xi_{k-p_1-p_3} s + 1\right)}{\prod\limits_{k=1}^{p_1} (T_k s + 1) \prod\limits_{k=p_1+1}^{p_1+p_2} \left(T_k^2 s^2 + 2T_k \xi_{k-p_1} s + 1\right)},$$

где K – коэффициент передачи, $T_k(k = \overline{1,p})$ – постоянные времени объекта, $\xi_k(k = \overline{1, p_2 + p_4})$ – декременты затухания.

Пусть $K = K^0 + \Delta K$, $T_k = T_k^0 + \Delta T_k(k = \overline{l,p})$ и $\xi_k = \xi_k^0 + \Delta\xi_k(k = \overline{l, p_2 + p_4})$, где ΔK, ΔT_k и $\Delta\xi_k$ – отклонения параметров объекта от известных значений K^0, $T_k^0(k = \overline{l,p})$ и $\xi_k^0(k = \overline{l, p_2 + p_4})$ – параметров предполагаемой модели.

Эти отклонения удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{\Delta K}{K^0}\right| \le \delta^K, \quad \left|\frac{\Delta T_k}{T_k^0}\right| \le \delta_k^T(k = \overline{l,p}), \quad \left|\frac{\Delta \xi_k}{\xi_k^0}\right| \le \delta_k^\xi(k = \overline{l, p_2 + p_4}),$$

в которых δ^K, $\delta_k^T(k = \overline{l,p})$ и $\delta_k^\xi(k = \overline{l, p_2 + p_4})$ – положительные числа (допуска на отклонения параметров).

Три уровня значений этих допусков определяют уровни неопределённости коэффициентов объекта (8.79).

Первый уровень (низкий уровень неопределённости)

$$\delta^K \le 0.1, \quad \delta_k^T \le 0.1(k = \overline{l,p}), \quad \delta_k^\xi \le 0.1(k = \overline{l, p_2 + p_4}). \quad (8.82)$$

Структурные параметры n, γ, $p_i(i = \overline{l,4})$ – известны.

Второй уровень (средний уровень неопределённости)

$$\begin{gathered} 0.1 \le \delta^K \le 5, \quad 0.1 \le \delta_k^T \le 5(k = \overline{l,p}), \\ 0.1 \le \delta_k^\xi \le 5(k = \overline{l, p_2 + p_4}). \end{gathered} \quad (8.83)$$

Известен структурный параметр n.

Третий уровень (высокий уровень неопределённости)

$$\delta^K \ge 5, \quad \delta_k^T \ge 5(k = \overline{l,p}), \quad \delta_k^\xi \ge 5(k = \overline{l, p_2 + p_4}).$$

Структурные параметры n, γ, $p_i(i = \overline{l,4})$ – неизвестны.

Алгоритм (и следовательно, директива) идентификации существенно зависит от уровня неопределённости объекта.

Директивы `D111` и `D111sd` предназначены для идентификации объектов с первым уровнем неопределённости, `D111sad` – для идентификации объектов второго и `D111sefad` – третьего уровня неопределённости.

8.3.3 Испытательный сигнал

Для идентификации объекта (8.79) используется испытательный сигнал

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \sin \omega_i t,$$

где ρ_i и $\omega_i(i = \overline{l,n})$ – его амплитуды и частоты. Амплитуды испытательного сигнала определяются ограничениями (8.80) на выходы и входы объекта, а его частоты должны удовлетворять условию

$$\omega_l \le \omega \le \omega_u,$$

где

$$\omega_l = \min_{1 \le k \le p} \left\{\frac{1}{|T_k|}\right\},$$

$$\omega_u = \max_{1 \le k \le p} \left\{\frac{1}{|T_k|}\right\}.$$

8.3.4 Директива D111: Частотная идентификация

Она предназначена для идентификации объектов первого уровня неопределённости. Такая идентификация используется для диагностики режима работы объекта. Действительно, пусть имеется многорежимный объект (режимы A, B, C, ...), коэффициенты уравнения (8.79) которого существенно изменяются при переходе от режима к режиму. При этом в каждом режиме работы объекта его коэффициенты известны достаточно точно и выполняются неравенства (8.82).

Цель идентификации – установить, работает ли объект, например, в режиме A или нет, сравнивая коэффициенты идентифицированного объекта с известными коэффициентами режима B.

Директива имеет следующую структуру: `<D111>=<интерфейс><Df111><протокол>`, `<интерфейс>=<исходные данные>` `<преобразование исходных данных>`, `<исходные данные>=<коэффициенты уравнения` (8.79)`><параметры par внешнего возмущения><интервал дискретности` h `><ампли- туды` ρ_i `и частоты` $\omega_i(i=\overline{1,n})$ `испытательного сигнала><длительность идентификации` $\tau + t_F$ `><момент начала фильтрации` t_F `>`.

Расчётная часть директивы `Df111` имеет структуру:

$$\texttt{<Df111>=<Cauchy1><Omm><Analysis><FourSu><FrId>}. \tag{8.84}$$

Она состоит из модулей, с помощью которых выполняются содержательные для директивы операции:

Cauchy1 – преобразует уравнение (8.79) к форме Коши;

Omm – изменяет заданные испытательные частоты так, чтобы их периоды были кратны интервалу дискретности h ;

Analysis – моделирует уравнение (8.79), приведённое к форме Коши.

FourSu – фильтр Фурье – находит оценки частотных параметров объекта (8.79), вычисляя для каждого $\rho=\rho_i$ и $\omega=\omega_i(i=\overline{1,n})$

$$\begin{aligned}\alpha(\tau) &= \tfrac{2}{\rho\tau}\int_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\sin\omega(t-t_F)\,dt,\\ \beta(\tau) &= \tfrac{2}{\rho\tau}\int_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\cos\omega(t-t_F)\,dt,\end{aligned} \tag{8.85}$$

где τ – время фильтрации , t_F – момент начала фильтрации.

FrId1 – решение частотных уравнений идентификации.

Примечание 3. Так как собственные частоты $\omega_i^c(i=\overline{1,p})$ объекта (8.79) известны

$$\omega_i^c = \frac{1}{|T_i|}(i=\overline{1,p}),$$

то можно выбирать испытательные частоты достаточно близко к собственным. В частности, n испытательных частот могут быть выбраны близкими к корням знаменателя передаточной функции объекта ($\omega_i=\omega_i^c$, $i=\overline{1,p_1+p_2}$), используя модуль `VibFp`.

Примечание 4. Амплитуды испытательных частот вычисляются следующим образом. Исходя из того, что каждая из n испытательных частот должна вносить одинаковый вклад в выходной сигнал y , будем определять

$$\rho_i = \frac{y_-/n}{|w(j\omega_i)|}(i=\overline{1,n}), \tag{8.86}$$

Если при этом нарушается условие

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i \le u_-,$$

то, определив

$$\rho = \frac{u_-}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i}$$

и умножив правую часть (8.86) на это число, найдём искомые амплитуды.

Эти операции выполняются модулем `VibAm`.

8.3.5 Директива D111sd: Частотная идентификация с самонастройкой длительности фильтрации

Директива служит для более точной идентификации (диагностики) режима работы объекта, когда различие между коэффициентами объекта (8.79) для различных режимов его работы не очень велико. Если длительность идентификации задаётся, как в директиве `D111`, априори, то точность идентификации может оказаться низкой, поэтому диагностика режима работы объекта будет неверной.

Для обеспечения точности идентификации необходима самонастройка длительности фильтрации (selftuning of duration of identification) – это отражено в названии директивы аббревиатурой `sd`).

Длительность идентификации определяется из условий

$$\left|\frac{\bar{\alpha}(\tau)}{\alpha(\tau)}\right| \le \varepsilon_\alpha, \quad \left|\frac{\bar{\beta}(\tau)}{\beta(\tau)}\right| \le \varepsilon_\beta, \quad \tau \ge \tau_l, \tag{8.87}$$

в которых $\bar{\alpha}(\tau)$ и $\bar{\beta}(\tau)$ – выходы фильтра Фурье (8.85) при $y(t) = \bar{y}(t)$, а ε_α и ε_β – заданные числа – параметры алгоритма самонастройки длительности идентификации (по умолчанию $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 10^{-3}$). При фиксированном $\tau = \tau^*$ числа

$$K_\alpha(\tau^*) = \left|\frac{\bar{\alpha}(\tau^*)}{\alpha(\tau^*)}\right| \quad \text{и} \quad K_\beta(\tau^*) = \left|\frac{\bar{\beta}(\tau^*)}{\beta(\tau^*)}\right|$$

называются *коэффициентами динамической корреляции.*

Они характеризуют связь внешнего возмущения и испытательного сигнала. Если такая связь отсутствует, то

$$\lim_{\tau\to\infty} K_\alpha(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} K_\beta(\tau) = 0.$$

Процедура самонастройки длительности идентификации.

1. Задаём начальную длительность

$$\tau_1 = p_{10}\frac{2\pi}{\omega}, \tag{8.88}$$

где p_{10} – параметр алгоритма самонастройки длительности – заданное число (по умолчанию $p_{10} = 3$), и прикладываем к объекту (8.79) испытательный сигнал

$$u(t) = \rho \sin \omega (t - t_0) \tag{8.89}$$

с заданными амплитудой ρ и частотой ω (например, $\rho = \rho_1$ и $\omega = \omega_1$). Выходы фильтра Фурье (8.85) дают числа $\alpha(\tau_1)$ и $\beta(\tau_1)$.

2. Полагаем $u(t) = 0$ и в момент времени $\tau = 2\tau_1$ получим на выходах фильтра (8.85) числа $\bar{\alpha}(\tau_1)$ и $\bar{\beta}(\tau_1)$.

3. Проверяем выполнение неравенств (8.87). Если они нарушаются, то возвращаемся к п. 1, удваиваем длительность идентификации при $u(t) \ne 0$ и $u(t) = 0$ и, составляя отношение выходов фильтра Фурье $\alpha(4\tau_1)$ и $\bar{\alpha}(6\tau_1)$, проверяем условие (8.87). Продолжая этот процесс, найдём искомую длительность τ_l . Длительность этого процесса может быть ограничена числом $p_{\max}$, которое определяет

максимальное число описанных увеличений длительности идентификации. Число $p_{\max}$ также является параметром алгоритма самонастройки длительности (по умолчанию $p_{\max} = 10$). Эта процедура реализуется модулем `TunFour`.

Директива `D111sd` отличается от директивы `D111` следующим:

а) исходные данные интерфейса не содержат задаваемых длительности идентификации – $\tau + \tau_F$ и момента начала фильтрации – t_F ;

б) расчётная часть – `Df111sd` имеет структуру (8.84), где модуль `FourSu` заменен модулем `TunFour`.

Директива `D111sd` содержит параметры алгоритма самонастройки длительности идентификации: ε_α , ε_β , p_{10} и $p_{\,max}$, которые уточняются (по сравнению с заданными по умолчанию) .

8.3.6 Директива D111sad: Частотная идентификация с самонастройкой длительности фильтрации и амплитуд испытательного сигнала

Значительные интервалы разброса коэффициентов объекта (8.79) второго уровня неопределённости не позволяют найти априори амплитуды испытательного сигнала так, чтобы выполнялись ограничения (8.80) выхода объекта, и поэтому необходима самонастройка амплитуд испытательных гармоник в процессе идентификации. Она выполняется модулем `TunAmp` следующим образом.

Амплитуда ρ сигнала (8.89) находится путём уменьшения его значения, начиная с $\rho = u_-$. Если при этом значении амплитуды не выполняется требование (8.80) к выходу объекта, длительность интервалов испытаний равна τ_1 , которое находится из (8.88) (при выполнении требования (8.80) искомое $\rho = u_-$).

По окончании процесса настройки амплитуд, когда найдена искомая амплитуда ρ^* , модуль `TunAmp` вычисляет показатель интенсивности испытательного сигнала

$$\kappa = \frac{|y_{\max} - \bar{y}_{\max}|}{|y_{\max}|},$$

где

$$y_{\max} = \max_{t_F+\tau/2\le t\le t_F+\tau} |y(t)|, \quad \bar{y}_{\max} = \max_{t_F+\tau/2\le t\le t_F+\tau} |\bar{y}(t)|, \quad \tau = T_b.$$

Если $\kappa < 0.1$, то на экран выводится сообщение.

Для определения испытательных частот используются априорные оценки $\hat{\omega}_l$ и $\hat{\omega}_u$ нижней и верхней границ собственных частот объекта. Эти оценки нетрудно получить, используя (8.83). Используя их, испытательные частоты определяются модулем `TestOm` как

$$\omega_1 = \hat{\omega}_l, \quad \log \omega_k = \log \hat{\omega}_l + (k-1)\frac{\log \hat{\omega}_u - \log \hat{\omega}_l}{n}(k = \overline{2, n}.$$

Так как структурный параметр γ уравнения (8.79) неизвестен, то идентификация осуществляется при $\gamma = n - 1$. Это порождает дополнительные корни числителя передаточной функции объекта, если истинное значение $\gamma < n - 1$. Эти дополнительные корни по модулю, как правило, существенно больше модулей корней знаменателя передаточной функции, и поэтому с помощью модуля `Decren` постоянные времени, соответствующие дополнительным корням, опускаются (обнуляются).

Директива `D111sad` имеет следующую структуру:
`<D111sad>=<интерфейс><Df111sad><протокол>`,
`<интерфейс>=<исходные данные>`
`<преобразование исходных данных>`,
`<исходные данные>=<коэффициенты уравнения` (8.79)`><параметры par внешнего возмущения><интервал дискретности` h `><грани- ца выхода –` y_- `и входа –` u_- `><оценки границ` ω_l `и` ω_u `собственных частот объекта>`. Расчётная часть директивы – `Df111sad` имеет структуру:

`<Df111sad>=<Cauchy><TestOm><TunAmp><TunFour><FrId><Decren>`.

8.3.7 Директивы D111sfload и D111sefad: Частотная идентификация с самонастройкой длительности фильтрации, амплитуд и частот испытательного сигнала

Неопределённые интервалы разброса коэффициентов объекта (8.79) третьего уровня неопределённости не позволяют найти априори оценки $\hat{\omega}_l$ и $\hat{\omega}_u$ нижней и верхней границ собственных частот объекта, и поэтому необходимо оценить эти границы в процессе идентификации. Оценка нижней границы собственных частот осуществляется модулем `TunFlo` следующим образом. Задаваясь достаточно малым числом ω_0 (которое называется начальным значением оценки нижней границы ω_l и является параметром алгоритма оценивания нижней границы), возбуждаем объект (8.79) гармоникой (8.89) при

$\omega = \omega_0$ и амплитудой, определяемой с помощью модуля `TunAmp`, и вычисляем оценку:

$$\hat{\omega}_l^{(1)} = \frac{\omega_0 \alpha(\tau)}{\beta(\tau)},$$

где длительность τ находится модулем `TunFour`. Затем изложенное повторяется для $\omega = \omega_0/2$, и находится новая оценка $\hat{\omega}_l^{(2)}$ и т.д., до тех пор, пока не выполнится условие

$$\frac{\left|\hat{\omega}_l^{(i)} - \hat{\omega}_l^{(i-1)}\right|}{\left|\hat{\omega}_l^{(i-1)}\right|} \leq \varepsilon_{flo}, \quad i = 2, 3, \ldots, p_{max}, \qquad (8.90)$$

где ε_{flo} – заданное число (параметр алгоритма оценивания нижней границы).

Параметрами алгоритма оценки нижней границы собственных частот являются числа ω_0 и p_{flomax} – максимальное число интервалов, используемых в выражении (8.90). Эти параметры дополняются параметрами алгоритма настройки длительности, реализуемого модулем `TunFour`, так как последние могут не совпадать с одноимёнными параметрами модуля `TunFour`, используемой при идентификации. Оценка верхней границы $\hat{\omega}_u$ собственных частот объекта может быть получена косвенным либо прямым способом. В директиве `D111sfload` используется косвенный способ, который предполагает, что известна оценка $\hat{M}$ диапазона собственных частот объекта:

$$M = \frac{\omega_u}{\omega_l},$$

и тогда искомая граница

$$\hat{\omega}_u = M\hat{\omega}_l,$$

где $\hat{M}$ – параметр алгоритма оценки нижней границы (по умолчанию $\hat{M} = 100$). В директиве `D111sefad` оценка $\hat{\omega}_l$ находится прямым способом, аналогичным нахождению оценки нижней границы ω_l . Этот способ реализуется модулем `TunAmp`, структура которой совпадает со структурой модуля `TunFlo`. Параметры этого модуля ω_0 , ε_{fup} , p_{fupmax} . Но теперь параметр ω_0 – достаточно большое число, которое удваивается до тех пор, пока не выполнится неравенство (8.90).

Модуль `TunFup` имеет следующую структуру:

`<TunFup>=<TunAmp><TunFour>`.

Расчётная часть директив D111sfload и D111sefad содержит модули расчетной части директивы Df111sad, так как после определения нижней и верхней границ собственных частот задача идентификации сводится к задаче, решаемой директивой D111sad. Итак,
<D111sfload>=<интерфейс><Df111sfload><протокол>,
<интерфейс>=<исходные данные>
<преобразование исходных данных>,
<исходные данные>=<коэффициенты уравнения (8.79)><параметры par внешнего возмущения><интервал дискретности h ><грани- ца выхода – y_- и входа – u_- >.

Расчётная часть директивы:

<Df111sfload>=<Cauchy><TunFlo><Df111sad>.

Директива D111sefad имеет следующую структуру:
<D111sefad>=<интерфейс><Df111sefad><протокол>,
<интерфейс>=<исходные данные>
<преобразование исходных данных>,
<исходные данные>=<коэффициенты уравнения (8.79)><параметры par внешнего возмущения><интервал дискретности h ><грани- ца выхода – y_- и входа – u_- >.

Расчётная часть директивы:

<Df111sefad>=<Cauchy><TunFup><Df111sad>.

8.4 Директивы адаптпвного управления

8.4.1 Постановка задачи

Адаптивное управление для объекта (8.79) формируется регулятором с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} g^{[i]}_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+g^{[i]}_1\dot u+g^{[i]}_0u= \\ =r^{[i]}_{n-1}(y^{(n-1)}+v^{(n-1)}_{[i]})+\cdots+r^{[i]}_1(\dot y+\dot v_{[i]})+r^{[i]}_0(y+v_{[i]}), \\ t_{i-1}\le t\le t_i, i=\overline{1,N}, \end{gathered} \tag{8.91}$$

где i – номер интервала адаптации $\left(i=\overline{1,N}\right)$, $v_{[i]}(t)$ – испытательный сигнал.

По окончании адаптации регулятор имеет вид

$$g_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+g_1\dot u+g_0u=r_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+r_1\dot y+r_0y, \quad t\ge t_N>t_0 \tag{8.92}$$

и обеспечивает выполнение требования к точности регулирования

$$|y(t)|\le y^*, \quad t\ge t_N, \tag{8.93}$$

где y^* – заданное число. В процессе адаптации учитываются ограничения (8.93).

8.4.2 Общая структура директив и модули синтеза регуляторов

Интервалы адаптации регулятора (8.91) к регулятору (8.92) состоят из групп интервалов. Во время первой группы интервалов $\left(i=\overline{1,N}\right)$ объект (8.79) идентифицируется с помощью модулей идентификации, в зависимости от уровня неопределённости его коэффициентов. Затем с помощью модуля AKOP находится (по идентифицированным коэффициентам объекта) регулятор (8.91), при $i=N+1$ объект замыкается этим регулятором, и начинается вторая группа интервалов адаптации, в течении которой система, состоящая из объекта замкнутого регулятором, идентифицируется с помощью директив идентификации.

Используя результат идентификации системы и коэффициенты регулятора, с помощью модуля ReCalcul вычисляются уточнённые оценки частотных параметров объекта. Они позволяют найти новые значения оценок коэффициентов объекта, используя которые, находятся с помощью модуля AKOP новые значения коэффициентов регулятора и т.д., до тех пор, пока не выполнятся требования к точности (8.93).

При достаточно большой длительности идентификации объекта в течении первой группы интервалов можно достичь низкого уровня неопределённости замкнутой системы. Однако это означает, что в течении достаточно большого времени будет нарушаться требование (8.93) к точности. Чтобы сократить это время, длительность идентификации объекта уменьшается, и замкнутая система может иметь средний и высокий уровень неопределённости. Это приводит к использованию для идентификации замкнутой системы директив идентификации со средним и высоким уровнем неопределённости.

Модуль AKOP

Он предназначен для синтеза регуляторов путём решения задачи о минимуме функционала

$$J = \int_0^\infty \left\{ qy^2 + u^2 + \varepsilon_1^2 \dot u^2 + \cdots + \varepsilon_\psi^2 \left[u^{(\psi)} \right]^2 \right\} dt, \qquad (8.94)$$

где $\psi = n - \gamma$, а $\varepsilon_i, i = \overline{1, \psi}$ – коэффициенты, которые определяются в процессе работы модуля AKOP в зависимости от величины

$$q_{11} = \frac{f^{*2}}{y^{*2}}.$$

Характеристический полином уравнения для экстремалей функционала (8.94) на связях (8.79) имеет вид

$$\Delta(s) = d(-s)d(s)e(-s)e(s) + qk(-s)k(s), \qquad (8.95)$$

где $e(s)$ – заданный полином, степени $\deg e(s) = n - 1$, называемый далее *полиномом реализуемости.*

С помощью модуля Dec находится гурвицев полином $\psi(s)$, такой, что

$$\Delta(s) = \psi(-s)\psi(s).$$

Используя модуль Bezout, решается тождество Безу

$$d(s)g(s) - k(s)r(s) = \psi(s), \qquad (8.96)$$

которое даёт полиномы $g(s)$ и $r(s)$ регулятора (8.92).

Полином $e(s)$ служит для обеспечения условия реализуемости регулятора, получаемого из тождества Безу. Из этого условия

$$\deg g(s) \geq \deg r(s),$$

и условия $\deg r(s) = n - 1$ разрешимости тождества Безу, следует, что полином $\psi(s)$ должен иметь степень

$$\deg \psi(s) \geq 2n - 1,$$

и поэтому

$$\deg e(s) \geq n - 1.$$

Полином $e(s)$ формируется как

$$e(s) = k_2(s)e_1(s),$$

где $k_2(s)$ – гурвицев полином, такой, что

$$k(s) = k_1(s)k_2(s),$$

где $k_1(s)$ – полином, корни которого имеют неотрицательные вещественные части.

Полином $e_1(s)$ построен следующим образом. Он является гурвицевым полиномом, определяемым с помощью модуля Decr, из тождества

$$e_1(-s)e_1(s) = \varepsilon_1(s^2),$$

в котором полином $\varepsilon_1(s^2) = 1 - \varepsilon_1^2 s^2 + \cdots + (-1)^{\psi_1} \varepsilon_{\psi_1}^2 s^{2\psi_1}$, $\psi_1 = n - 1 - \deg k_2(s)$, с помощью модуля FormEps, как

$$\varepsilon_i^2 = \frac{C_n^i}{\alpha^{2i}\omega^{2i}}, i = \overline{1, \psi_1},$$

где C_n^i – число сочетаний из n элементов по i , α – заданное число (параметр алгоритма синтеза, по умолчанию $\alpha = 10$), ω – частота среза системы (8.79), (8.92). Эта частота находится из равенства

$$\left| \frac{k(j\omega)}{d(j\omega)} \cdot \frac{\bar d(j\omega)}{\bar g(j\omega)} \right| = 1, \qquad (8.97)$$

в котором $\bar g(s)$ и $\bar r(s)$ находятся из тождества (8.96), где полином $\psi(s)$ находится модулем Srez из тождества (8.95) при $e(s) = k_2(s)$ (т.е. $e_1(s) = 1$). При $k_2(s) = 1$ степени полиномов $k(s)\bar r(s)$ и $d(s)\bar g(s)$ равны и поэтому может случиться так, что не существует ω , удовлетворяющего равенству (8.97). Поэтому при $k_2(s) = 1$ степень полинома $\bar r(s)$ уменьшается путём деления этого полинома на его наибольший по модулю корень (или пару наибольших корней, если они комплексно-сопряжены). Такое уменьшение степени полинома $\bar r(s)$ осуществляется модулем Decr.

После вычисления полиномов $g(s)$ и $r(s)$ регулятора с помощью модуля Radi проверяется радиус r запасов устойчивости

$$r^2 = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} \frac{\psi(-s)\psi(s)}{d(-s)d(s)g(-s)g(s)}.$$

Если величина $r < 0.7$, то уменьшается величина q (т.е. требуемая точность регулирования не достижима), проверяется изложенное, и так до тех пор, пока не будет найдено значение q , при котором $r \geq 0.7$.

Таким образом

<AKOP>=<Dec><Bezout><Decr><Srez><Dec2><FormEps><Radi>.

Модуль `FormTu`

Он формирует уравнение системы (8.79), (8.92) на основе уравнений объекта

$$\dot{x} = Ax + b_1u + b_2f, \quad y = cx, \tag{8.98}$$

и регулятора

$$\dot{x}_c = A_cx_c + b_c(y - v), \quad u = c_cx_c + d_c(y - v). \tag{8.99}$$

Уравнение системы имеет вид

$$\dot{x}_s = A_sx_s + b_{s1}v + b_{s2}f, \qquad \begin{matrix} y_{s1} = y = c_{s1}x_s + d_{s11}v + d_{s12}f, \\ y_{s2} = u = c_{s2}x_s + d_{s21}v + d_{s22}f, \end{matrix} \tag{8.100}$$

где $A_s = \begin{pmatrix} A + d_cb_1c & b_1c_c \\ b_cc & A_c \end{pmatrix}$, $b_{s1} = \begin{pmatrix} -d_cb_1 \\ -b_c \end{pmatrix}$, $b_{s2} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_{s1} = \begin{pmatrix} c & 0 \end{pmatrix}$, $c_{s2} = \begin{pmatrix} d_cc & c_c \end{pmatrix}$, $d_{s11} = 0$, $d_{s12} = 0$, $d_{s21} = -d_c$, $d_{s22} = 0$.

Уравнения (8.100) решаются с помощью модуля `AnSys`.

Модуль ReCalcul

Позволяет найти частотные параметры объекта (8.79) по частотным параметрам системы (8.79), (8.92), когда регулятор (8.92) известен. Для этого используется очевидная связь передаточной функции $w(s) = k(s)/d(s)$ объекта с передаточной функцией $w_s(s) = \dfrac{w_c(s)w(s)}{1 + w_c(s)w(s)}$ замкнутой системы, где $w_c(s) = r(s)/g(s)$ – передаточная функция регулятора:

$$w(s_k) = \frac{w_s(s_k)}{[w_s(s_k) + 1]w_c(s_k)} = \alpha_k + \jmath\beta_k, k = \overline{1, n},$$

где $s_k = \jmath\omega_k, k = \overline{1, n}$.

8.4.3 Директива D311: Частотное адаптивное управление

Она предназначена для диагностики режима работы объекта и перестройки регулятора при переходах с одного режима на другой, если режим работы объекта изменяется, когда объект замкнут регулятором.

Директива имеет структуру: <D311>=<интерфейс><Df311><протокол>, <интерфейс>=<исходные данные> <преобразование исходных данных>, <исходные данные>=<исходные данные директивы D111><интервал дискретности замкнутой системы – h_s ><амплитуды ρ_{si} и частоты $\omega_{si}, i = \overline{1, n_s}$ испытательного сигнала замкнутой системы><длительность идентификации замкнутой системы – $\tau_s + t_{sF}$ ><момент начала фильтрации – t_{sF} >.

Расчётная часть директивы имеет вид:

<Df311>=<Df111><AKOP><ReCalcul><FrId><AnSys>.

8.4.4 Директива D311sd: Частотное адаптивное управление с самонастройкой длительности идентификации объекта

Директива служит для более точной идентификации режима работы объекта и перестройки регулятора.

Её структура: <D311sd>=<интерфейс><Df311sd><протокол>, <интерфейс>=<исходные данные> <преобразование исходных данных>, <исходные данные>=<исходные данные директивы D111sd><интервал дискретности замкнутой системы – h_s ><амплитуды ρ_{si} и частоты $\omega_{si}, s_i = \overline{1, n_s}$ испытательного сигнала замкнутой системы>.

Расчётная часть директивы имеет вид:

<Df311sd>=<Df111sd><AKOP><ReCalcul><FrId><AnSys>.

8.4.5 Директива D311sad: Частотное адаптивное управление с самонастройкой длительности идентификации объекта и амплитуд испытательного сигнала

Директива предназначена для адаптивного управления объектом второго уровня неопределённости.

Она имеет структуру: <D311sad>=<интерфейс><Df311sad><протокол>, <интерфейс>=<исходные данные> <преобразование исходных данных>, <исходные данные>=<исходные данные директивы D111sad> <интервал дискретности замкнутой системы – h_s ><оценки границ ω_{sl} и ω_{su} собственных частот замкнутой системы>.

Расчётная часть директивы имеет вид:

<Df311sad>=<Df111sad><AKOP><ReCalcul><FrId><AnSys>.

8.5 Примеры применения

8.5.1 Синтез точного управления гироплатформой

Рассмотрим следующие уравнения двухостной гироскопической платформы с неортогональным расположением гироскопов на площадке:

$$\begin{aligned} \ddot q_1 + 400\dot q_1 + 0.342\dot q_3 + 0.94\dot q_4 - 940 q_3 + 342 q_4 = 0 \\ \ddot q_2 + 400\dot q_2 + 0.866\dot q_3 + 0.5\dot q_4 - 500 q_3 + 866_q 4 = 0 \\ \dot 803 q_1 + 154\dot q_2 + 100\dot q_3 + 754 q_3 + 1130 q_4 = u_1 + w_1 \\ -718\dot q_1 - 1070\dot q_2 + 200\dot q_4 - 867 q_3 - 754 q_4 = u_2 + w_2, \end{aligned} \tag{8.101}$$

где q_1 и q_2 – измеряемые углы прецессии гироскопов, q_3 и q_4 – проекции абсолютной угловой скорости площадки на ее оси, u_1 и u_2 -моменты двигателей стабилизации; w_1 и w_2 – внешние возмущения, которые являются ступенчатыми либо гармоническими функциями.

$$u_i = \begin{cases} 0 & t = t_0 \\ \overline{w}_i = conct & t \le t_0 \end{cases} \quad (i = 1,2)$$

$$\overline{w}_i = \overline{M}_i \sin\omega_i t,$$

где $\overline{w}_i, \overline{M}_i, \omega_i$ – неизвестные числа. При этом

$$|\overline{w}_i| \le 10^3 \quad \text{либо} \quad |\overline{M}_i| \le 10^3, \quad (i = 1,2) \tag{8.102}$$

Задача 4.1. *Найти дифференциальные уравнения регулятора при которых в установившемся режиме ошибки стабилизации удовлетворяют неравенствам*

$$|q_i| \le 5 * 10^{-4} \quad (i = 1,2), \tag{8.103}$$

где $q_i = \lim\limits_{t\to\infty} q_i(t), \quad (i = 1,2)$.

Задача решалась с использованием директивы D442 "Точное управление объектом второго вида". Пользователь ввел уравнения объекта (8.101), регулируемые переменные $z_1 = q_1$, $z_2 = q_2$ и требования (8.103) к ним, а также границы внешнего возмущения (8.102). Ниже приводится фрагмент протокола работы директивы с полученными матрицами регулятора.


```
              ПРОТОКОЛ ДИРЕКТИВЫ D442
                31.12.2004 22:31

Диф. уравнения объекта управления в форме Лагранжа:
  q1(2)+400q1(1)+0.342q3(1)+0.94q4(1)-940q3+342q4=0;
  q2(2)+400q2(1)+0.866q3(1)+0.5q4(1)-500q3+866q4=0;
  803q1(1)+154q2(1)+100q3(1)+754q3+1130q4=u1+w1;
  -718q1(1)-1070q2(1)+200q4(1)-867q3-754q4=u2+w2

Уравнения рег. переменных объекта управления в форме Лагранжа:
   1.00000       0.00000       0.00000       0.00000
   0.00000       1.00000       0.00000       0.00000

Амплитуды ступенчатых внешних возмущений:
  1000; 1000

Вектор допустимых установившихся ошибок:
  0.0005; 0.0005


                РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА
                ----------------
                  Таблица N10
               Матрицы регулятора

                      Ap

   0.00000   -9.27588*10^6   0.00000    2.99255*10^5
   1.00000   -5.77571*10^3   0.00000    5.20132*10^1
   0.00000    2.95416*10^5   0.00000   -8.59938*10^6
   0.00000    5.20134*10^1   1.00000   -5.65737*10^3
                      Bp
```

```
3.62405*10^8     4.96599*10^6
2.09225*10^5    -5.89383*10^3
2.36826*10^8    -5.60629*10^8
1.48173*10^5    -3.38509*10^5
                                 Cp

0.00000          7.40487*10^6    0.00000         -3.62848*10^-10
0.00000          0.00000         0.00000          7.40487*10^6
                                 Dp

-2.98443*10^8    1.12430*10^7
-2.14674*10^8    4.85525*10^8
```

8.5.2 Идентификация типового объекта

Рассмотрим полностью управляемый объект, описываемый уравнением :

$$d_3 \dddot{y} + d_2\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y = k_1\dot{u} + k_0 u + m_0 f. \qquad (8.104)$$

Граница возмущения:

$$f^* = 10.$$

Задача 4.2. *Найти оценки коэффициентов объекта, такие, чтобы удовлетворялись следующие требования к точности идентификации*

$$|\triangle d_i| \le 3, \quad |\triangle k_i| \le 3, \;\; i = \overline{1,3} \qquad (8.105)$$

Примечание. Истинные коэффициенты объекта (8.104)

$$d_0 = 25, \quad d_1 = 131, \quad d_2 = 31, \quad d_3 = 5, \quad k_0 = 25, \quad k_1 = 10, \quad m_0 = 25 \qquad (8.106)$$

возмущение $f(t) = 10\sin 6.1t$.

Объект (8.104) возбуждался испытательным воздействием

$$u(t) = 0.02(\sin 0.2t + \sin 4t + \sin 6t). \qquad (8.107)$$

Время задержки – 2 периода, время фильтрации – 2 периода, число делений – 100 ($T = \frac{2\pi}{100*6}$) .

Ниже приводится фрагмент протокола работы директивы с истинными и идентифицированными параметрами объекта.


```
                    ПРОТОКОЛ ДИРЕКТИВЫ
                     31.12.2004 21:22

Дифференциальное уравнение объекта:
   5y1(3)+31y1(2)+131y1(1)+25y1=-10u1(1)+25u1+25f1;
предполагаемая степень полинома d(s):
   3
предполагаемая степень полинома k(s):
   1
параметры внешнего возмущения:
   10;6.1;0
параметры испытательного воздействия:
   0.02;0.02;0.02;0;0.2;4;6
параметры фильтрации:
   2;2;100

                     РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА
                     ----------------
                        Таблица N7
             Идентифицированный полином Dident
    1.0*s^3+6.07324*s^2+2.54487*10^1*s^1+4.85012

                    Истинный полином D
         1.0*s^3+6.2*s^2+2.62*10^1*s^1+5.0

                        Таблица N8
             Идентифицированный полином Kident
                   -1.94435*s^1+4.85238

                    Истинный полином K
                       -2.0*s^1+5.0

                        Таблица N9
```

```
Идентифицированная передаточная функция WIdent

            1.00046*s^0*(-4.007*10^-1*s + 1)
---------------------------------------------------------
(5.00506*s + 1)(4.11944*10^-2*s^2 +2.41952*10^-1*s + 1)

                Истинная передаточная функция  W
          1.0*s^0*(-4.0*10^-1*s + 1)
   ---------------------------------------------
   (5.0*s + 1)(4.0*10^-2*s^2 +2.4*10^-1*s + 1)
```

8.5.3 Адаптивное управление типовым объектом

Рассмотрим полностью управляемый объект, описываемый уравнением :

$$d_3 \dddot{y} + d_2\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y = k_1\dot{u} + k_0 u + m_0 f, \qquad (8.108)$$

Граница возмущения:

$$f^* \leq 10. \qquad (8.109)$$

Задача 4.3. *Найти регулятор*

$$g_2\ddot{u} + g_1\dot{u} + g_0 u = r_2\ddot{y} + r_1\dot{y} + r_0 y, \qquad (8.110)$$

такой, чтобы характеристический полином системы (8.108),(8.110) и желаемый полином

$$\psi(s) = s^5 + 15 * s^4 + 85 * s^3 + 225 * s^2 + 274 * s + 120 \qquad (8.111)$$

удовлетворяли следующим требованиям

$$|\psi_i - \varphi_i| \leq 0.2\psi_i, \quad i = \overline{1,5} \qquad (8.112)$$

Примечание 4.2. Объект имеет вид (8.108), где возмущение $f(t) = 10\sin 6.1t$.

Объект (8.108) возбуждался испытательным воздействием

$$u(t) = 0.1(\sin 0.2t + \sin 4t + \sin 6t). \qquad (8.113)$$

Время задержки – 1 период, время фильтрации – 2 периода, число делений – 200 (интервал дискретности $T = \frac{2\pi}{200\cdot 6}$).

В результате идентификации получены следующие коэффициенты объекта:

$$\begin{aligned} &d_0 = 4.93, \quad d_1 = 25.79, \quad d_2 = 6.13;\\ &k_0 = 4.92, \quad k_1 = -1.96. \end{aligned} \qquad (8.114)$$

По этим коэффициентам синтезирован регулятор:

$$\begin{aligned} &g_0 = 5.81, \quad g_1 = 8.86, \quad g_2 = 1;\\ &r_0 = -18.54, \quad r_1 = -23.73, \quad r_2 = -0.50. \end{aligned} \qquad (8.115)$$

Система (8.108), (8.110) возбуждалась испытательным воздействием

$$u(t) = 0.05(\sin 0.2t + \sin 1t + \sin 2t + \sin 4t + \sin 6t). \qquad (8.116)$$

Время задержки – 1 период, время фильтрации – 2 периода, число делений – 200 (интервал дискретности $T = \frac{2\pi}{200\cdot 6}$).

В результате был получен регулятор:

$$\begin{aligned} &g_0 = 5.60, \quad g_1 = 8.76, \quad g_2 = 1;\\ &r_0 = -18.40, \quad r_1 = -24.19, \quad r_2 = -0.66. \end{aligned} \qquad (8.117)$$

Ниже приводится фрагмент протокола работы директивы.

```
                 ПРОТОКОЛ ДИРЕКТИВЫ
                  31.12.2004 21:22


Дифференциальное уравнение объекта:
   5y1(3)+31y1(2)+131y1(1)+25y1=-10u1(1)+25u1+25f1
Полином регулятора при возмущения:
   1
Желаемый характеристический полином системы:
   s^5+15*s^4+85*s^3+225*s^2+274*s+120
Предполагаемая степень полинома d(s):
   3
Предполагаемая степень полинома k(s):
   1
Параметры гармонического внешнего возмущения:
   10; 6.1; 0
Параметры испытательного воздействия объекта:
```

```
   0.1; 0.1; 0.1;  0;  0.2; 4; 6
Параметры испытательного воздействия замкнутой системы:
   0.05; 0.05; 0.05; 0.05; 0.05;  0;  0.2; 1; 2; 4; 6
Параметры фильтрации объекта:
   1; 2; 200
Параметры фильтрации замкнутой системы:
   1; 2; 200


                    РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА
                    ----------------
                      Таблица N8
            Идентифицированный полином dident
         1.0*s^3+6.13762*s^2+2.5798*10^1*s^1+4.93079

                   Истинный полином d
            1.0*s^3+6.2*s^2+2.62*10^1*s^1+5.0

                      Таблица N9
            Идентифицированный полином  kident
                  -1.96994*s^1+4.92541

                   Истинный полином k
                      -2.0*s^1+5.0

                      Таблица N10
          Синтезированный полином регулятора gmod
                1.0*s^2+8.86238*s^1+5.81245

              Истинный полином регулятора g
                 1.0*s^2+8.8*s^1+5.56757

                      Таблица N11
```



```
          Синтезированный полином регулятора rmod
-5.09842*10^-1*s^2-2.37308*10^1*s^1-1.85447*10^1

              Истинный полином регулятора r
-6.63784*10^-1*s^2-2.41989*10^1*s^1-1.84324*10^1

                      Таблица N20
            Идентифицированный полином dident
         1.0*s^3+6.23634*s^2+2.61953*10^1*s^1+4.99652

                   Истинный полином d
            1.0*s^3+6.2*s^2+2.62*10^1*s^1+5.0

                      Таблица N21
            Идентифицированный полином kident
                  -2.00383*s^1+4.99633

                   Истинный полином k
                      -2.0*s^1+5.0

                      Таблица N22
          Синтезированный полином регулятора gmod
                1.0*s^2+8.76366*s^1+5.6099

              Истинный полином регулятора g
                 1.0*s^2+8.8*s^1+5.56757

                      Таблица N23
          Синтезированный полином регулятора  rmod
-7.27806*10^-1*s^2-2.40465*10^1*s^1-1.84075*10^1

              Истинный полином регулятора r
-6.63784*10^-1*s^2-2.41989*10^1*s^1-1.84324*10^1
```

8.6 Комментарии

Начало широкого использования электронных цифровых вычислительных машин для анализа и синтеза систем автоматического управления можно отнести на период 1960–1970 г.г. В этот период были разработаны первые программы для ЭВМ (модули), предназначенные для моделирования процессов управления, анализа устойчивости, управляемости и наблюдаемости, а также синтеза регуляторов на основе уравнений Риккати.

В период 1970–1980 г.г. интенсивно разрабатывались интерактивные пакеты программ, использующие командно-управляющий язык, который позволял соединять отдельные модули в желаемой последовательности.

Одними из первых таких пакетов программ, по-видимому, являются пакеты разработанные в Швеции: IDPAC [8.1] (пакет для параметрической идентификации), SYNPAC [8.2] (синтез регуляторов на основе квадратичного критерия, фильтра Калмана, наблюдателя Люенбергера, преобразование, анализ процессов и т.д.).

Одновременно были разработаны аналогичные пакеты в Англии: Кембриджский комплекс систем CLADP , в Германии: Автоматизированный пакет для анализа и проектирования систем управления KEDDC , в США: МАТЛАБ [8.4] (который базируется на пакетах линейной алгебры таких как EISPACK и LINPACK), $MATRIX_X$, $Xmath$. Описание этих пакетов имеется в книге [8.3]

Последние десять лет доминирующее положение занимает

Система MATLAB. Система содержит свыше 600 встроенных математических функций для работы с матрицами, векторами, полиномами, средства для построения графического интерфейса пользователя, удобные средства для работы с графикой.

Кроме встроенных функций MATLAB содержит достаточно большое количество пакетов расширения системы – тулбуксов. Тулбукс (toolbox) - это, по сути набор m-файлов, позволяющих адаптировать систему к решению определенного класса задач. К настоящему моменту разработаны пакеты расширения системы, позволяющих производить математические, статистические, финансовые, электротехнические расчеты, обрабатывать сигналы и изображения и т.д.

Программное обеспечение построения САУ содержится в следующих пакетах расширения.

Control System Toolbox системы MATLAB предназначен для моделирования, анализа и проектирования систем автоматического

управления - как непрерывных, так и дискретных. Функции пакета реализуют традиционные методы передаточных функций и современные методы пространства состояний. В пакете реализованы следующие функции: полный набор средств для анализа многомерных систем; временные характеристики: переходная (`step`) и импульсно-переходная (`impulse`) функции, реакция на произвольное воздействие (`lsim`); частотные характеристики: диаграммы Боде (`bode`), Николса (`nichols`), Найквиста (`nyquist`) и др.; функции для анализа моделей в пространстве состояний: управляемость (`ctrb`), наблюдаемость (`obsv`), понижение порядка моделей (`modred`) и др.; функции для расчета коэффициентов обратных связей методом корневого годографа (`rlocus`, `rltool`); синтез регулятора по методу заданного расположения полюсов системы (`place`, `estim`, `reg`); проектирование LQ -регуляторов (`kalman`, `lqr`, `dlqr`) и др.

System Identification ToolBox системы MATLAB содержит средства для создания математических моделей динамических систем на основе наблюдаемых входных и выходных данных: различные варианты метода наименьших квадратов, и метода.

Frequency Domain System Identification Toolbox системы MATLAB предоставляет специализированные средства для идентификации линейных динамических систем по их временным и частотным характеристикам.

Из отечественных систем выделим следующие.

Диалоговая система проектирования ДИСПАС.

ДИСПАС [8.6] предназначен для анализа линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных, непрерывных и дискретных логико-динамических систем. Система позволяет осуществить следующие операции: задание модели проектируемой системы; моделирование (построение переходных процессов); анализ линейных моделей (вычисление передаточных функций, их нулей и полюсов, построение частотных характеристик, построение переходных процессов); оптимизация параметров модели.

Эта и ряд систем, разработанных до 1985г описаны в справочнике [8.5]

Программный комплекс "Моделирование в технических устройствах"("МВТУ")

"МВТУ"[8.7] - современная среда интеллектуального САПР, предназначенная для детального исследования и анализа динамических процессов в системах автоматического управления (САУ), в следящих приводах и роботах, описание динамики которых может быть реализовано методами структурного моделирования.

Пакет АДАПЛАБ

АДАПЛАБ [8.8]– [8.10] – это пакет прикладных программ, предназначенный для моделирования процессов идентификации и адаптивного управления и определения настраиваемых параметров алгоритмов идентификации и адаптации по результатам моделирования.

Система ИНСТРУМЕНТ-3М-И

ИНСТРУМЕНТ-3М-И [8.11] предназначена для автоматизации проектирования САУ на основе автоматического решения непроцедурно поставленных инженерных задач синтеза закона управления. Главное отличие системы ИНСТРУМЕНТ -3М -И от всех описанных ранее систем состоит в том,

что система автоматически строит план решения задачи на основе формализованных знаний о методах решения задач ТАУ (модели множества формализованных задач), которые хранятся в базе знаний системы.

Сравнительный анализ этих систем содержится в диссертации [8.18]

История развития системы ГАММА

Первый пакет программ, который в последующем стал основой систем ГАММА, был разработан в 1968 г. на языке Алгол-60 для ЭВМ "Урал-3".

Он позволял решать задачи синтеза регуляторов минимально-фазового объекта по заданным допускам на значения установившихся ошибок.

Версия этого пакета, названная ГАММА-1 (синтез) и ГАММА-2 (анализ) для ЭВМ М-220, описана в [8.12]. Модернизация и расширение ее возможностей осуществлялась программистом-разработчиком ГАММА-1 и 2.

Интерактивный вариант пакета, названный ГАММА-1М, был создан в 1982 г. [8.13] на языке Фортран для ЭВМ серии ЕС-22. Последняя версия ГАММА-1М имела специальные средства для ее модернизации и расширения исследователем: язык для формирования различных программ из готовых модулей (подпрограмм) и средства для создания интерфейса.

Система ГАММА-1РС являлась развитием ГАММА-1М для персональных ЭВМ типа IBM PC. Первая версия была разработана в 1991 г. [8.14]. Она имела более удобные средства исследователя.

Последние версии системы ГАММА-1РС позволяют синтезировать регуляторы для неминимально-фазовых объектов, используя

H-бесконечное субоптимальное управление и связь между варьируемыми коэффициентами уравнений Риккати *H*-бесконечного подхода и установившимися ошибками [8.15].

ГАММА1-РС демонстрировалась (либо о ней докладывалось) на различных международных конференциях, в частности: Первой Европейской конференции по автоматическому управлению, Гренобль, Франция, 1991; 12-м конгрессе ИФАК, Сидней, Австралия, 1993; Конференции по САПР систем управления, Гент, Бельгия, 1997.

Наряду с разработкой системы ГАММА-1РС, начиная с 1991 г. разрабатывается пакет программ АДАПЛАБ [8.8]-[8.10],содержащий программы для конечно-частотной идентификации и частотного адаптивного управления в условиях неизвестных, ограниченных возмущений и помех с неизвестными статистическими характеристиками.

В 1998 году началась разработка системы ГАММА-2РС [8.16], объединяющей возможности ГАММА-1РС и АДАПЛАБ и работающей под управлением операционной системы Windows.

Список литературы

К главе 1

[1.1] Основы теории автоматического регулирования.Под ред. В.В.Солодовникова,М.: Машгиз, 1954.

[1.2] *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Часть I. Линейные системы регулирования одной величины. М.-Л.:Энергия,1965.

[1.3] *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.

[1.4] *Медич Дэк.* Статически оптимальные оценки и управление. М.:, 1973.

[1.5] *Сейдж Э., Мелс Дэк.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.

[1.6] *Ларин В. М., Науменко К. И., Сунцев В. Н.* Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью, Киев: Наукова думка, 1971.

[1.7] *Francis B.A.* A cource in H_∞ control theory. New York: Springer-Verlag, 1987.

[1.8] *Поздняк А.С.,Серебряков Г.Г.,Семенов А.В.,Федосов Е.А.* H_∞ теория управления:феномен,достижения, перспективы,открытые проблемы.М.ГосНИИАС,1990.

[1.9] *Барабанов А. Е.* Оптимальное управление неминимально-фазовым дискретным объектом с произвольным ограниченным шумом, // Вестн. ЛГУ, Сер. мат., 1980, 13, 119–120.

[1.10] *Wolovich W.A.* Linear Multivariable System.NJ: Springer-Verlag,1974.

[1.11] *Дубошин Г.Н.* Основы теории устойчивости движения.М.: Изд-во МГУ, 1952.

[1.12] *Летов А.М.* Теория оптимального управления (Обзор).Труды Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению,Базель, 1963г., т. Оптимальные системы. Статистические методы.М.: Наука,1965г.

[1.13] *Боде Г.* Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью.М.: ИЛ,1948.

[1.14] *MacFarline A.G.J.* The Development of Frequency–Response Methods in Automatic Control.//IEEE Trans. on Automatic Control.Vol. AC-24, No2, 1979, pp.250-265.

[1.15] *Nyquist* Regeration theory. //Bell Syst. Tech.J., vol.11, pp. 126-147, 1932.

[1.16] *Ольденбургер Р.* Изображение частотных характеристик, стандарты и расчетные критерии. //В сб. Частотные методы в автоматике. М.: ИЛ, 1957.

[1.17] *Летов А.М.* Динамика полета и управление.М.:Наука,1968.

[1.18] *Поляк Б.Т.,Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление.М.: Наука,2002.

[1.19] *Александров А.Г.* К конструктивной теории автоматического управлени.//Труды международной конференции "Идентификация систем и задачи управления Москва,2006,ИПУ.CD-ROM,ISBN 5-201-14984-7,стр.77-106.

[1.20] *Харитонов В. Л.* Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений.// Дифференциальные уравнения, 1978, **1**, 11, 2086–2088.

[1.21] *Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем, // Автоматика и телемеханика, 1990, 9, 45–54.

[1.22] *Bhattcharyya S.P.,H.Chapellat,L.H.Keel.* Robust Control.The Parametric Approach. Prentice Hall, 1995.

[1.23] *Честнов В.Н.* Частотный метод анализа грубости систем, описываемых дифференциальными уравнениями. //В межвуз. научн. сб. Аналитические методы синтеза регуляторов.Саратов, СПИ, 1985.

[1.24] *Александров А.Г.* Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования .// Межвузовский научный сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов СПИ, Саратов, 1980, стр. 3 - 14.

[1.25] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ, М.: Мир, 1989.

[1.26] *Баландин Д.В.,Коган М.М.* Синтез законов управления на основе матричных неравенств.М: Физматлит, 2007.

[1.27] *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ. Новосибирск,1981.

[1.28] *Щипанов Г.В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. //Автоматика и телемеханика, №1, 1939.

[1.29] *Петров Б.Н.* О применимости условий инвариантности. //Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Изд-во АН СССР. 1955. Т. II. С.241-246.

[1.30] *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Синтез регуляторов, обеспечивающих инвариантность системы управления.// Труды научного семинара "70 лет теории инвариантности 2 июня 2008г. Изд-во ЛКИ.2008, с. 102-120.

[1.31] *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы . М: Высшая школа, 1989.

[1.32] *Maxwell J.C.* On governers.// Proc. of the Royal Soc of London, 1868,v.16.

[1.33] *Вышнеградский И.А.* О регуляторах прямого действия// Изв. СПб практического технологического института, 1877.

К главе 2

[2.1] *Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э.* Математические основы теории управления систем.М.: Наука,1969.

[2.2] *Пряхин Н.С.* К вопросу об аналитическом конструировании регуляторов. //Автоматика и телемеханика, №9, 1963, с.1183-1186.

[2.3] *Ишлинский Н.С.* Механика специальных гироскопических систем.М.: Наука, 1963.

[2.4] *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Наука, 1976.

[2.5] *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов I-IV //Автоматика и телемеханика. 1960. No4. с. 436-441; No5. с.561-568; No6. с.661-665; 1961. No4. с.425-435.

[2.6] *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control //Bullet Soc. Mat. Mech. 1960. Vol. 5, No 1. p.102- 119.

[2.7] *Ривкин С.С.* Теория гироскопических устройств. Л. Судостроение, 1962. Ч.I; 1964. Ч.II.

[2.8] *Репин Ю.М., Третьяков В.Е.* Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих установках. //Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24. No6.

[2.9] *Уонем У.М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Мир, 1980.

[2.10] *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

[2.11] *Альбрехт Э.Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. //Прикладная математика и механика. 1961. Вып. 5.

[2.12] *Гункель Т.Л., Франклин Ж.Ф.* Общее решение для линейных дискретных систем управления. //Труды американского общества инженеров -механиков. Техническая механика. 1963. Т. 85.No12.

[2.13] *Крутько П.Д.* Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. М.: Энергия, 1967.

[2.14] *Anderson B.D.O.* From Youla-Kucera to identification,adaptive and nonlinear control. // 13th World Congress of IFAC,1996, Preprints,Plenary and Index Volume,San Francisco, USA,pp.39-59.

[2.15] Барабанов А. Е., Первозванский А. А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям.//Автоматика и телемеханика, 1992, No9, 3–32.

[2.16] *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses// IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No 2. P. 301—320.

[2.17] *Doyle J. C., Francis B. A., Tannenbaum A. R.* Feedback control theory, Englewood Cliffs, NJ: MacMillan, 1992.

[2.18] *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem// IEEE Trans. Autom. Contr. 1989. V.34. No 8. P. 831—846.

[2.19] *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика, 1984. Т. 45. No 5. С. 39-46.

[2.20] *Dahleh M.A., Pearson J.B.* l_1-optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Automat. Control, 1987. V. AC-32. P. 314-322.

[2.21] *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Наука,1960.400 с.

[2.22] *Калман Р.Е.* Когда линейная система управления является оптимальной.//Тр.Амер.общества инж.-мех.,сер. Д,№1, (пер. с англ.)М.: Мир,1964.

[2.23] *Охоцимский Д.Е.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском ракет. //Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10. Вып. 2.

[2.24] *Фельдбаум А.А.* Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования //Автоматика и телемеханика. 1953,No6. с. 712-728.

[2.25] Математическая теория оптимальных процессов. //*Понтрягин Л.С.* и др. М.: Наука, 1961. 392 с.

К главе 3

[3.1] *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.

[3.2] *Anderson B.D.O.,Moor J.B.* Linear system optimisation with prescribed degree of stability.//Proc.Inst. Eng., 1969, 116, N2.

[3.3] *Александров А.Г.* Частотные свойства оптимальных линейных систем управления.//Автоматика и телемеханика, №9, 1969, стр. 176 - 181.

[3.4] *Александров А.Г., Небалуев Н.А.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества, ч.1 ,//Автоматика и телемеханика, №12, 1971, стр. 12 - 20

[3.5] *Safonov M.G.,Athans M* Gain and phase margin for multi-loop LQG regulators.//IEEE Trans. Automat. Control,1977,vl. Ac-22,N2,pp.173-179.

[3.6] *Честнов В.Н.* О возможной неустойчивости управляемых систем и синтез регуляторов с учетом параметрических возмущений // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1984. С. 26-35.

[3.7] *Честнов В.Н.* Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H субоптимизации // Автоматика и телемеханика. 1999. No7. С. 100-109

[3.8] *Агафонов П.А., Честнов В.Н.* Одновременное обеспечение запасов устойчивости на входе и выходе многомерного объекта на основе H_∞ подхода.// Автоматика и телемеханика. 2004. N 9. С.110–119.

[3.9] *Тимофеев Ю.К.* Статические ошибки аналитически сконструированных систем //Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. научн. сб.: Саратовский политехнический институт, 1976. С. 53-60.

[3.10] *Садомцев Ю.В.* Аналитическое конструирование регуляторов по заданным показателям качества. Развитие проблемы //Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. научн. сб.: Саратовский политехнический институт, 1980. С. 32-48.

[3.11] *Волков Е.Ф., Ершов Н.Н.* Синтез асимптотически устойчивых многосвязных систем с заданной статической точностью //Автоматика и телемеханика, 1981. No 7. С. 19-27.

[3.13] *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности, I.// Автоматика и телемеханика. 1998,Т.59.No7, стр. 83 - 95.

[3.14] *Александров А.Г.* Построение дискретных систем управления с заданными свойствами. // Автоматика и телемеханика , 9, 1973, стр. 57 - 66 .

[3.15] *Садомцев Ю.В.* Проблема статической точности в теории многомерных систем автоматического управления.// Изв.РАН.Теория и системы управления.2001.№2.С.49-59.

[3.16] *Садомцев Ю.В., Торгашова О.Ю* Предельная точность дискретных систем с линенейно–квадратическим регулятором // Изв.РАН.Теория и системы управления.2001.№6.С.62-69.

К главе 4

[4.1] *Kalman R.E., Busy R.* New Results in Linear Filtering Andprediction Theory. //J. Basis Eng. Trans ASME, Vol. 83, D 1961, p.95- 108.

[4.2] *Luenberger D.G* Conserving the state of Linear system. //IEEE Trans. on Military Electronic, 8,1964, pp. 74-80.

[4.3] *Александров А.Г.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества, ч.2. //Автоматика и телемеханика. 2, 1972, стр. 17 - 29

[4.4] *Wonham W.M.* On separation theorem of stochastic control. //SIAM J. Control,6,2,1968,pp.312-326.

[4.5] *Александров А.Г.* Степень грубости системы с устройствами восстановления фазовых переменных. //Межвузовский научный сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов вып. 2, Саратов, СПИ, 1977, стр. 105 - 118

[4.6] *Doyle J.C.* Guaranteed margins for LQG-regulators. // IEEE Trans.Autom. Contr.,1978,vol.AC-23,No4,pp.756-757.

[4.7] *Александров А.Г.* Прямой метод аналитического синтеза регуляторов. Неполная степень наблюдаемости. Изв. ВУЗов "Приборостроение 11, 1978, стр. 34 -39

[4.8] *Keel L.,Bhattacharyya S.P.* Robust, fragile, or optimal? // IEEE Trans. Automat. Control,1997,V. 42., No8 ,pp.1098-1105.

[4.9] *Александров А.Г.* Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления . //Автоматика и телемеханика, No 8, 2007, стр. 4-20.

[4.10] *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности, II.//Автоматика и телемеханика. 1998,No8,стр.124-138.

[4.11] *Alexandrov A.G.* Guaranteed stabilized plant.// European Control Conference ECC'03, cambridge,UK,Final programm with abstracts,pp.59,ECC2003 Conference Papers on CD-ROM.

К главе 5

[5.1] *Мееров В.М.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1959. 284 с.

[5.2] *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967. 336 с.

[5.3] *Кухтенко А.И.* Проблема инвариантности в автоматике. Киев,Наукова думка, 1963.

[5.4] *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н. и др.* Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М.: Машиностроение, 1972.

[5.5] *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.

[5.6] *Саридис Дж.* Самоорганиэующиеся стохастические системы управления. М.: Наука, 1980. 400 с.

[5.7] *Нарендра К.С., Валавани Л.С.* Устойчивые адаптивные наблюдения и управления: Пер. с англ. //ТИИЭР. 1976. Т. 64. No 8.

[5.8] *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспоисковых самонастраивающихся систем с моделью. //Автоматика и телемеханика. 1967. No 6. с 88-94.

[5.9] *Narendra K.S., Valavani L.S.* Stable Adaptive Controller Desing-Direct Controll.// IEEE Trans. of Automat. Control, 1979. Vol. AC- 23, No 4.

[5.10] *Parks P.S.* Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control System. // IEEE Autom. Control, 1966, Vol. AC- 11, No 3, p.362 - 367.

[5.11] *Narendra K.C.,Annaswamy F.M.* Robust Adaptive Control in the presence of Bounded Disturbance.//IEEE Autom.Control,1986,vol AC-31,No4.

[5.12] *Андерсон Б. и др.* Устойчивость адаптивных систем.М.: Мир.1989.263с.

[5.13] *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах.М.: Наука.1990.296с.

[5.14] *Бобцов А.А.* Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонной моделью. //Автоматика и телемеханика, №6, 2003.с.104-113.

[5.15] *Александров А.Г.* Адаптивное управление с эталонной моделью при внешних возмущениях //Автоматика и телемеханика, №5, 2004, стр.77-90.

К главе 6

[6.1] *Саварачи Е., Соэда Т., Накамизо Т.* "Классические методы и оценивание временных рядов". //Современные методы идентификации систем. /Под ред. *П.Эйкхоффа.* М.: Наука , 1983. 400 с.

[6.2] *Л.Льюнг* Идентификация систем.Теория для пользователя.М.: Наука,1991.

[6.3] *Гроп Д.* Методы идентификации систем. М.: Наука, 1979. 302 с.

[6.4] *Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж.* Теория управления (идентификация и оптимальное управление). М.: Наука, 1973. 248 с.

[6.5] *Кашьян Р.Л., Рао А.Р.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М.: Наука, 1983. 384 с.

[6.6] *Фомин В.Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984. 286 с.

[6.7] *Цыпкин Я.З.* Основы информационной теории идентификации. М.: наука, 1984. 320 с.

[6.8] *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.

[6.9] *Бунич А.Л., Бахтадзе Н.Н.* Синтез и применение дискретных систем управления с идентификатором. М.: Наука, 2003.

[6.10] *Alexandrov A.G.* Finite-frequency method of identification // 10-th IFAC Sympos. Syst. Identification. Preprints. 1994. V. 2. P. 523-527.

[6.11] *Wong K.Y., Polak E.* Identification of linear discrete time systems using instrumental variable method // IEEE Trans. Automat. Control. 1967. V. AC-12. P. 707-718.

[6.12] *Рабкин Г.Л., Митрофанов Б.А., Штеренберг Ю.О.* Об определении численных значений коэффициентов передаточных функций линеаризованных звеньев и систем по экспериментальным частотным характеристикам //Автоматика и телемеханика. 1955. Т. 16. 5. С. 488-494.

[6.13] *Кардашов А.А., Карнюшин Л.В.* Определение параметров системы по экспериментальным (заданным) частотным характеристикам // Автоматика и телемеханика. 1958. Т. 19. 4. С. 334-345.

[6.14] *Pintelon R., Guillaume P., Rolain Y., et al.* Parametric identification of transfer functions in the frequency domain – a survey // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. AC-39. No. 11. P. 2245-2260.

[6.15] *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: границы частот испыта- тельного сигнала.//Автоматика и телемеханика , №11, 2001.стр.3-14.

[6.16] *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: самонастройка испытательных частот.//Сборник научных трудов "Робастное управление и частотная идентификация ЭПИ МИСиС, 2004, стр. 67-97.

[6.17] *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Сравнение двух методов идентификации при неизвестных ограниченных возмущениях // Автоматика и телемеханика, No10, 2005, стр. 128-147.

[6.18] *Alexandrov A.G.* Finite-frequency identification: selftuning of test signal.// Preprints of the 16th IFAC World Congress , Prague, Czech Republic, 3-8 Jily 2005, CD-ROM.

[6.19] *Александров А.Г.* Метод частотных параметров . //Автоматика и телемеханика, No12, 1989, стр. 3 - 15.

[6.20] *Александров А.Г.* Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении. // Автоматика и телемеханика, No4, 2000, стр. 106 - 116 .

[6.21] *Александров В.А.*

Цифровое управление неопределенным объектом по измерениям частотных параметров// Канд. диссертация, ИСА РАН,1995.

[6.22] *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация дискретных объектов // 6-той Санкт-Петербургский симпозиум по теории адаптивных систем, Сборник трудов, том 2, стр. 5-8 (SPAS'99), 7-9 сентября,1999.

К главе 7

[7.1] *Sun J., Ioannou P.* Robust adaptive LQ control schemes // IEEE Trans. Automat. Control, 1992. V. AC-37. No. 1. P. 100-106.

[7.2] *Radenkovic M.S., Michel A.N.* Robust adaptive systems and self stabilization // IEEE Trans. Automat. Control, 1992. V. AC-37. No. 9. P. 1355-1369.

[7.3] *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Доклады АН СССР, 1966. Т. 166. 6. С. 1308-1311.

[7.4] *Фомин В.Н.* Синтез адаптивного регулятора в задаче независисмых аддитивных помех // Синтез регуляторов в некоторых задачах адаптивного управления. Деп. в ВИНИТИ, 1977,No 1411-77, стр.51-57.

[7.5] *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление с гарантированным результатом в условиях ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика, 1994. Т. 55. 2. С. 121-131.

[7.6] *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в l_1 -постановке // Автоматика и телемеханика, 1998. Т. 59. 3. С. 107-131.

[7.7] *Fan J.C., Kobayachi T.* Simple adaptive PI controller for linear system with constant disturbances // IEEE Trans. Automat. Control, 1998. V. AC-43. No. 5.

[7.8] *Lilly J.H.* Adaptive state regulation in the presence of disturbances of known frequency range // IEEE Trans. Automat. Control, 1998. V. AC-43. No. 7.

[7.9] *Якубович В.А.* Адаптивная стабилизация линейных процессов // Автоматика и телемеханика, 1988. Т. 49. 4. С. 97-107.

[7.10] *Zhao X., Lozano R.* Adaptive pole placement for continuous-time system in the presence of bounded disturbance // 12-th World Congress of IFAC. Sydney. Australia. Preprints, 1993. V. 1. P. 205-210.

[7.11] *Alexandrov A.G.* Accurate adaptive control // Proceedings of the IASTED International Conference “Automation Control and Information Technology”. Novosibirsk: ACTA Press, June 10-13 2002. ISNB: 0-88986-342-3. P. 212-217.

[7.12] *Александров А.Г.* Адаптивное управление на основе идентификации частотных характеристик // Известия РАН: <Теория и системы управления>, 1995. 2. С. 63-71.

556.

[7.13] *Alexandrov A.G., Orlov Yu.F.* Frequency adaptive control of multivariable plants // Preprints of the 15-th Trienial World Congress of the IFAC, Barcelona, Spain, 21-26 Jily 2002, CD-ROM, T-Th-M03-3.

[7.14] *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Частотное адаптивное управление многомерными объектами // Автоматика и телемеханика, No7, 2006, стр.104-119 .

[7.15] . *Ротач В.Я.* Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования.М.:Энергия,1973.

[7.16] *Astrom,K.J.and T.Hagglund* Advanced PID Control. ISA,2006.

[7.17] *Voda A.A. and I.D.Landau* A method for the Auto-calibration of PID Controllers// Automatica,vol.31,No 1.pp.41-53,1995.

[7.18] *Мазуров В.М.,А.В.Литюга, А.В.Спицин* Развитие технологий адаптивного управления в SCADA системе TRACE MODE //ж.Приборы и системы, No 1,2002, сс.28-33.

[7.19] *Visioli A.* Improving the load disturbance rejection performance of IMC-tuned PID Controllers.//15th Triennial Word Congress,Barcelona,Spain.2002.

К главе 8

[8.1] *Astrom K.J., Bohlin T., Wensmark S.* Automatic construction of linear stochastic dynamic models for stationary industrial processes with random disturbances using operating records. //Report TP 18.150, IBM Nordic laboratory, Sweden, 1965.

[8.2] *Wieslander J.* SYNPAC commands–user's guide Report CODEN: LUTFD2/TFRT–3159/1-130(1980), Dept. of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1980.

[8.3] Автоматизированное проектирование систем управления (Под ред. М. Джамшиди и Ч.ДЖ. Хергета). М.: Машиностроение,1989.

[8.4] *Moler C.* MATLAB - user's Guide', Department of Computer Science, University of New Mexico, Alberquerque, USA, 1980.

[8.5] Справочник по теории автоматического управления /Под ред. А.А.Красовского. - М.: Наука, 1987.

[8.6] Диалоговая система проектирования систем автоматического управления ДИСПАС, верси 2.–М.: МАИ, 1981.

[8.7] *Козлов О.С., Кондаков Д.Е., Скворцов Л.М. и др.* Программный комплекс "МВТУ современное средство автоматизированного исследования и проектирования систем управления// Труды II Международной конференции по проблемам управления. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. 2003.

[8.8] *A. G. Alexandrov, Yu.F.Orlov* Training in the identification and adaptive control processes using the package ADAPLAB .// Workshop on Control Education and Technology Transfer Isssues, Brasil, Curitiba, 1995, p.p. 117 - 120.

[8.9] *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Пакет программ АДАПЛАБ для идентификации и адаптивного управления//Автоматизация в промышленности,8, 2003,стр.16-19.

[8.10] *A. G. Alexandrov, Yu.F.Orlov, L.S. Mikhailova* ADAPLAB-M:IDENTIFICATION AND ADPTATION TOOLBOX FOR MATLAB.// Proceedings of 13-th IFAC Symposium on System Identification, on CD, p.995-1000, 2003.

[8.11] *Стеранов М.Ф.* Автоматическое решение формализованных задач теории автоматического управления. – Саратов: Сарат.гос.техн.ун-т, 2000.

[8.12] Александров А. Г. Небалуев Н. А., Асмолова Л. Я., Крупенина Л. Я. Математическое обеспечение синтеза и анализа передаточных матриц регуляторов многомерных линейных систем автоматического регулирования. Комплексы программ ГАММА-1, ГАММА-2 для ЭВМ типа М-220. Учебное пособие. – Саратов. политех. институт, 1975.

[8.13] Марков А. А., Степанов М. Ф. Диалоговый пакет прикладных программ "ГАММА-1М"для синтеза и анализа линейныз многомерных систем управдения по заданной точности и качеству.// Межвузовский научный сб. "Аналитические методы синтеза регуляторов' – Саратов: СПИ, 1982.

[8.14] Alexandrov A. G., Panin S. Yu., Stepanov M. F. GAMMA-1PC - CAD system to synthesis of Controllers. //All-Union Conference on the problems of Multivariable control of thechnological processes. Preprints, Odessa, USSR, 1991.

[8.15] *Mikhailova L.S., Isakov R.V., Riazanthev R.P., Vnukov A.V.* Development of researcher's environment fragments for CACSD GAMMA-1PC, //Proceedings of 7th International Student Olympiad on Automatic Control, Saint-Petersburg, 1999, pp. 158-162.

[8.16] *Александров А.Г., Михайлова Л.С., Исаков Р.В.* Структура программного обеспечения для автоматизации разработки алгоритмов автоматического управления// Автоматика и телемеханика,4, 2005. - С. 176-184.

[8.17] *Александров А.Г., Михайлова Л.С.* ГАММА-2PC. Система программ для автоматизации разработки алгоритмов управления. Руководство пользователя. ЭПИ МИСИС, Электросталь, 2006.

[8.18] *Михайлова Л.С.* Разработка и исследование программных средств синтеза линейных систем автоматического управления. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Институт проблем управления РАН, 2007.