Конечно-Частотная Идентификация: Неустановившиеся Процессы

А. Г. Александров[†], Ю. Ф. Орлов[‡]

[†] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117 997, Москва, Профсоюзная, 65. E-mail: alex7@ipu.rssi.ru

[‡] Электростальский политехнический институт (филиал) Московского государственного института стали и сплавов (технологического университета)
Россия, 144 000, Электросталь, Московской обл., Первомайская, 7

1. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый асимптотически устойчивый объект, описываемый разностным уравнением

$$\begin{gathered} y(k)+d_{n-1}y(k-1)+\cdots+d_0y(k-n)= \\ =b_{n-1}u(k-1)+\cdots+b_0u(k-n)+f(k-1), \quad k=\overline{1,N}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $y(k)$ и $u(k)$ – выход объекта и его вход – измеряемые функции; $f(k)$ – внешнее возмущение – неизвестная ограниченная функция:

$$|f(k-1)|\le f^*, \quad k=\overline{1,N}. \tag{2}$$

Управляемый вход представляет собой испытательный сигнал

$$u(k)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\sin\omega_i k, \quad k=\overline{1,N}, \tag{3}$$

в котором $\rho_i>0$ – заданные амплитуды; ω_i $(i=\overline{1,n})$ – частоты – заданные числа, удовлетворяющие условиям

$$0<\omega_i<\pi \ \ (i=\overline{1,n}), \quad \omega_i\ne\omega_j \ \ (i\ne j). \tag{4}$$

Задача идентификации *состоит в определении оценок* $\hat{d}_i$ *и* $\hat{b}_i$ $(i=\overline{0,n-1})$ *коэффициентов объекта* (1) *таких, чтобы выполнились требования*

$$\begin{cases} |\hat{d}_i-d_i|\le\varepsilon_i^d|d_i| \quad \text{если} \quad d_i\ne0 \quad \text{либо} \quad |\hat{d}_i|\le\varepsilon_i^d \quad \text{если} \quad d_i=0, \\ |\hat{k}_i-k_i|\le\varepsilon_i^k|k_i| \quad \text{если} \quad k_i\ne0 \quad \text{либо} \quad |\hat{k}_i|\le\varepsilon_i^k \quad \text{если} \quad k_i=0, \end{cases} \tag{5}$$

к относительной точности идентификации, в которых ε_i^d *и* ε_i^b $(i=\overline{0,n-1})$ *– заданные положительные числа.*

2. Алгоритм идентификации в установившемся режиме

Решались уравнения

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\hat{\alpha}_j\cos\omega_j i+\hat{\beta}_j\sin\omega_j i\right)\hat{d}_{n-i}+\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\omega_j i\hat{b}_{n-i}=\hat{\alpha}_j, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\hat{\alpha}_j\sin\omega_j i-\hat{\beta}_j\cos\omega_j i\right)\hat{d}_{n-i}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\omega_j i\hat{b}_{n-i}=\hat{\beta}_j, \end{cases} \quad j=\overline{1,n}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_j=\alpha_j(N)&=\frac{2}{\rho_j N}\sum_{k=0}^{N-1}y(k)\sin\omega_j k, \\ \hat{\beta}_j=\beta_j(N)&=\frac{2}{\rho_j N}\sum_{k=0}^{N-1}y(k)\cos\omega_j k, \end{aligned} \quad j=\overline{1,n} \quad (7)$$

– оценки частотных параметров объекта (1):

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty}\alpha_j(N)=\alpha_j\doteq\operatorname{Re}w(e^{\mathrm{j}\bar{\omega}_j}), \\ \lim_{N\to\infty}\beta_j(N)=\beta_j\doteq\operatorname{Im}w(e^{\mathrm{j}\bar{\omega}_j}), \end{aligned} \quad j=\overline{1,n} \quad (8)$$

– значений его передаточной функции

$$w(z)=\frac{b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_1z+b_0}{z^n+d_{n-1}z^{n-1}+d_{n-2}z^{n-2}+\cdots+d_1z+d_0} \quad (9)$$

на наборе частот (4).

3. Алгоритм идентификации в переходном режиме

④

Решаются уравнения

$$\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{v}, \tag{10}$$

где

$$\boldsymbol{M} \doteq \begin{pmatrix} S & C \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times \begin{pmatrix} -Y & U \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} S & C \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y},$$

$$S \doteq \frac{2}{N}\begin{pmatrix} \sin\omega_1 & \sin\omega_2 & \cdots \sin\omega_n \\ \sin\omega_1 2 & \sin\omega_2 2 & \cdots \sin\omega_n 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\omega_1 N & \sin\omega_2 N & \cdots \sin\omega_n N \end{pmatrix}, \quad C \doteq \frac{2}{N}\begin{pmatrix} \cos\omega_1 & \cos\omega_2 & \cdots \cos\omega_n \\ \cos\omega_1 2 & \cos\omega_2 2 & \cdots \cos\omega_n 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\omega_1 N & \cos\omega_2 N & \cdots \cos\omega_n N \end{pmatrix},$$

$$Y \doteq \begin{pmatrix} y(0) & y(-1) & \cdots & y(1-n) \\ y(1) & y(0) & \cdots & y(2-n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-1) & y(N-2) & \cdots & y(N-n) \end{pmatrix}, \quad U \doteq \begin{pmatrix} u(0) & u(-1) & \cdots & u(1-n) \\ u(1) & u(0) & \cdots & u(2-n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(N-1) & u(N-2) & \cdots & u(N-n) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d} \doteq \begin{bmatrix} d_{n-1} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} \doteq \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{y} \doteq \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}.$$

Доказана сходимость предлагаемого здесь алгоритма: $\hat{\boldsymbol{\theta}} \to \boldsymbol{\theta}$ при $N \to \infty$ для полностью управляемого объекта при ограниченных (2) внешних возмущениях, когда частоты испытательного сигнала удовлетворяют условиям (4) и не содержатся в спектре частот внешнего возмущения.

4. Пример

Пусть имеется полностью управляемый асимптотически устойчивый объект, описываемый разностным уравнением

$$
\begin{gathered}
y(k) - 2{,}937y(k-1) + 2{,}877y(k-2) - 0{,}940y(k-3) = \\
-9{,}712\cdot 10^{-5}u(k-1) + 5{,}235\cdot 10^{-6}u(k-2) + 9{,}674\cdot 10^{-5}u(k-3) \\
+ 8{,}205\cdot 10^{-7}f(k-1) + 3{,}231\cdot 10^{-6}f(k-2) + 7{,}954\cdot 10^{-7}f(k-3),
\end{gathered} \tag{11}
$$

$k = \overline{1, N}$**, с возмущением**

$$f(k) = \mathrm{sign}(\sin 0{,}0275k). \tag{12}$$

На вход объекта подаётся испытательный сигнал

$$u(k) = 3(\sin 0{,}002k + \sin 0{,}01k + \sin 0{,}05k). \tag{13}$$

Задача состоит в том, чтобы по известным (полученным в результате моделирования уравнения (11)) значениям $y(k)$ и $u(k)$ найти оценки коэффициентов объекта.

Примечание 1. Разностное уравнение (11) соответствует дифференциальному

$$\dddot{y} + 6{,}2\ddot{y} + 26{,}2\dot{y} + 5y = -2\dot{u} + 5u + f \tag{14}$$

и получено путём дискретизации последнего с интервалом дискретности $h = 0{,}01$ с. Для сравнения результатов идентификации с коэффициентами передаточной функции

$$w(s) = \frac{-2s+5}{s^3 + 6{,}2s^2 + 26{,}2s + 5} \tag{15}$$

дискретное описание объекта преобразуется к непрерывному. ■

Численные эксперименты проводились в системе MATLAB.

Первый эксперимент. Пусть начальные условия $y(0)=y(1)=0$ и $y(-2)=1$. Передаточная функция идентифицированного объекта при $N=75$ имеет вид

$$\hat{w}(s)=\frac{-6{,}01\cdot 10^{-3}s^2-1{,}937s+4{,}905}{s^3+6{,}1995s^2+26{,}198s+4{,}983}. \qquad (16)$$

Второй эксперимент. Используем при тех же начальных условиях алгоритм идентификации в установившемся режиме. Передаточная функция идентифицированного объекта при $N=75$ имеет вид

$$\hat{w}(s)=\frac{566{,}74s^2-217s-114{,}8}{s^3+2{,}947s^2+4{,}142s-0{,}2298}. \qquad (17)$$

Точность же идентификации первого эксперимента достигается при $N=94\,500$ (при этом приходится ждать 31,5 с. ($N_{\text{задержки}}=3\,150$), пока «успокоится» переходный процесс). Передаточная функция в этом случае имеет вид

$$\hat{w}(s)=\frac{0{,}01598s^2-2{,}083s+5{,}197}{s^3+6{,}354s^2+27{,}17s+5{,}209}. \qquad (18)$$

Примечание 2. Точности идентификации первого эксперимента можно достичь за $N=6\,300$ если при этом подождать 63 с. ($N_{\text{задержки}}=6\,300$), пока «успокоится» переходный процесс. Передаточная функция в этом случае примет вид

$$\hat{w}(s)=\frac{0{,}001155s^2-1{,}978s+4{,}945}{s^3+6{,}192s^2+25{,}92s+4{,}947}. \qquad (19)$$

Примечание 3. Для сравнения, точная передаточная функция (15) объекта имеет вид:

$$w(s)=\frac{-2s+5}{\ldots} \qquad (20)$$