

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ С ПИД-РЕГУЛЯТОРАМИ ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗМУЩЕНИИ

А.Г. Александров, Д.А. Хомутов

Получены зависимости ошибок регулирования в системах с ПИ- и ПИД-регуляторами от уровня внешних возмущений. Предложено использовать ПИД-регулятор с производными ошибки регулирования более первой, если ошибки превышают допустимые. Необходимые для определения коэффициентов такого ПИД-регулятора дополнительные сведения об объекте предложено получать путем частотной идентификации объекта.

Ключевые слова: ПИД-регулятор, ограниченное возмущение, частотная идентификация.

ВВЕДЕНИЕ

По различным оценкам [1] ПИД-регуляторы [2—4] составляет 90—95 % всех регуляторов, используемых в промышленности. Однако в сложной продукции, такой как самолеты, корабли, электроприводы и др., ПИД-регуляторы используются редко, и соотношение более сложных регуляторов и ПИД-регуляторов обратное. Это связано с тем, что эта продукция работает в условиях интенсивных внешних возмущений (например, порывы ветра для самолетов, волнение моря для кораблей). Для обеспечения малых ошибок регулирования в этих условиях необходимо увеличение коэффициента усиления регулятора, что приводит к необходимости увеличения числа производных ошибки в регуляторе, которые служат для обеспечения устойчивости системы.

Причины столь широкого распространения ПИД-регуляторов в промышленности разные. Объективные причины состоят в том, что в промышленности низок уровень внешних возмущений либо большие ошибки регулирования, возникающие при интенсивных внешних возмущениях, удовлетворяют требованиям технологического процесса. Субъективные причины заключаются в том, что технологи смиряются с большими ошибками регулирования, а специалисты по автоматизации технологических процессов не сообщают технологам, что эти ошибки могут быть существенно уменьше-

ны с помощью более сложных регуляторов, зная, что это приведет к дополнительным трудностям в настройке и эксплуатации таких регуляторов.

В настоящей работе исследуются системы с ПИ- и ПИД-регуляторами при внешних возмущениях. Получены зависимости ошибок регулирования от уровня внешних возмущений. Если эти ошибки превышают допустимые, то предлагается использовать ПИД-регулятор с производными ошибки регулирования более первой, реализация которого основана на идентификации объекта.

Существо подхода состоит в следующем. Обычно параметры ПИД-регулятора находятся на основе модели объекта, описываемой уравнениями второго порядка и запаздыванием в управлении. Природа запаздывания различна — физическое (транспортное) запаздывание и модельное запаздывание, которое служит для учета неизвестных «малых» постоянных времени. При больших значениях транспортного запаздывания учет дополнительных производных ошибки малоэффективно. Иная ситуация при модельном запаздывании. Здесь точность регулирования может быть значительно увеличена, если известны значения «малых» постоянных времени, и чем больше этих постоянных времени известно, тем большую точность можно обеспечить, определяя по ним коэффициенты регулятора при второй, третьей и далее производных ошибки в ПИД-регуляторе.



Таким образом, для повышения точности ПИД-регулятора необходима идентификация малых постоянных времени. Это затруднено неизвестными внешними возмущениями. Известно несколько методов идентификации в таких условиях: метод инструментальных переменных [5, 6], рандомизированные алгоритмы [7, 8] и метод конечно-частотной идентификации [9]. В этих методах используют идентифицирующее (испытательное) воздействие на объект. Наиболее развит для практического применения метод конечно-частотной идентификации, в соответствии с которым испытательное воздействие представляет собой сумму гармоник с самонастраиваемыми амплитудами и частотами.

Далее исследуются особенности применения этого метода для некоторого класса объектов.

1. СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ С ПИД-РЕГУЛЯТОРОМ

Рассмотрим систему управления

$$d_m y^{(m)} + \dots + d_1 \dot{y} + y = k_o u + f, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

$$u(t) = k_p \left[a_1 \dot{\varepsilon}(t) + a_0 \varepsilon(t) + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau \right], \quad (2)$$

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t), \quad (3)$$

где $y(t)$ — измеряемый выход объекта (1), $u(t)$ — управление, формируемое регулятором (2), $g(t)$ — задающее воздействие, коэффициенты объекта d_i , $i = 1, \dots, m$, и k_o — неизвестные числа, k_p , a_0 и a_1 — коэффициенты ПИД-регулятора, $f(t)$ — неизвестное и неизмеряемое, ограниченное внешнее возмущение, $\varepsilon(t)$ — ошибка регулирования.

Задающее воздействие $g(t)$ является ступенчатой функцией

$$g(t) = g_0, \quad t \geq t_0, \quad g(t) = 0, \quad t = t_0. \quad (4)$$

Число g_0 неизвестно, но удовлетворяет неравенству $|g_0| \leq g^*$, в котором g^* — заданное число.

Передаточная функция объекта (1) по управлению имеет вид

$$W_o(s) = \frac{k_o}{d(s)} = \frac{k_o}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \prod_{i=n+1}^m (T_i s + 1)},$$

где n — порядок рабочей модели объекта (1), $T_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, — постоянные времени рабочей модели объекта — известные числа, $T_i > 0$, $i = n + 1, \dots, m$, — постоянные времени немоделируемой динамики объекта — неизвестные числа.

Постоянные времени T_p , $i = 1, \dots, m$, объекта упорядочены следующим образом:

$$T_i \geq 2T_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m - 1. \quad (5)$$

Внешнее возмущение — гармоническая функция с неизвестной амплитудой и частотой из заданного диапазона частот $f(t) = a \sin \omega_f t$, $|a| \leq f^*$, $t \geq t_0 + t_{\text{пер}}$, $\omega_a \leq \omega_f \leq \omega_b$, где ω_a и ω_b — границы диапазона частот внешнего возмущения, f^* — заданное число, $t_{\text{пер}}$ — время регулирования (время затухания переходного процесса, возбужденного задающим воздействием).

Ошибка регулирования в системе $\varepsilon(t) = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_f(t)$, $t \geq t_0 + t_{\text{пер}}$, где $\varepsilon_g(t)$ — ошибка регулирования по задающему воздействию, $\varepsilon_f(t)$ — ошибка регулирования по внешнему возмущению.

Цель управления заключается в том, чтобы ошибка регулирования $\varepsilon(t)$ удовлетворяла требованию

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^*, \quad t \geq t_0 + t_{\text{пер}}, \quad (6)$$

где ε^* — заданное число.

Пусть цель управления (6) не достигается ни при каких значениях параметров k_p , a_0 и a_1 ПИД-регулятора (2). Задача состоит в том, чтобы добиться достижения цели (6) с помощью ПИД-регулятора с производными ошибки.

2. СИСТЕМА С ПИД-РЕГУЛЯТОРОМ С ПРОИЗВОДНЫМИ ОШИБКИ

2.1. ПИД-регулятор с производными ошибки

Будем пользоваться следующим дифференциальным уравнением ПИД-регулятора с порядком производной ошибки, равным $n - 1$:

$$T_{g, n-1} u^{n-1} + \dots + T_{g1} \dot{u} + u(t) = k_p \left[a_{n-1} \varepsilon^{n-1}(t) + \dots + a_1 \dot{\varepsilon}(t) + a_0 \varepsilon(t) + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau \right],$$

где a_p , $i = 0, \dots, n - 1$, и T_{g_i} , $i = 1, \dots, n - 1$, — коэффициенты регулятора.

Передаточная функция ПИД-регулятора с производными ошибки имеет вид

$$W_p(s) = k_p \frac{\prod_{i=1}^n (T_{p_i} s + 1)}{(T_g s + 1)^{n-1} s}, \quad (7)$$

где T_{p_i} , $i = 1, \dots, n$, — постоянные времени ПИД-регулятора с производными ошибки.

Далее будем полагать, что коэффициент регулятора k_p выбран как

$$k_p = \frac{1}{4T_n k_0}, \quad (8)$$

а его постоянные времени удовлетворяют условиям

$$T_{pi} = T_p, \quad i = 1, \dots, n, \quad T_g < T_n. \quad (9)$$

2.2. Условие достижения цели управления

Утверждение. Пусть параметры регулятора (7) определяются из выражений (8) и (9), тогда найдется такое малое значение T_g , что для достижения цели (6) при условии (5) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon^* \geq \frac{4T_n f^*}{T_1 + T_2}. \quad \blacklozenge \quad (10)$$

Отсюда следует, что всегда найдется такой порядок n рабочей модели объекта (1)–(3), при котором ошибка слежения удовлетворяет требованию к точности (6). Таким образом, если вновь выбранный порядок рабочей модели n окажется неудовлетворительным для этого условия, то необходимо увеличивать порядок рабочей модели и строить более сложный регулятор (7) до тех пор, пока это условие не выполнится.

Доказательство этого утверждения приведено в Приложении.

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТА

Для нахождения постоянных времени регулятора, которые выбираются равными постоянным времени объекта (9), необходимо идентифицировать последние. Приведем особенности метода конечно-частотной идентификации [9] для объекта (1), связанные с видом частотных уравнений, используемых в алгоритме конечно-частотной идентификации.

Для идентификации объекта на него подается гармонический испытательный сигнал в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^p \rho_k \sin \omega_k t, \quad t_0 \leq t < t_0 + \tau, \quad (11)$$

где параметры ρ_1, \dots, ρ_p — испытательные амплитуды, $\omega_1, \dots, \omega_p$ — испытательные частоты, τ — время идентификации — самонастраиваются в процессе идентификации (алгоритмы самонастроек

здесь опущены, см. работу [9]), p — число гармоник в сигнале, определяемое как

$$p = \left\langle \frac{n}{2} \right\rangle, \quad (12)$$

где операция $\langle x \rangle$ означает округление x вверх до целого.

Выход объекта подается на фильтр Фурье

$$\hat{\alpha}_k(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} y(t) \sin \omega_k t dt,$$

$$\hat{\beta}_k(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} y(t) \cos \omega_k t dt, \quad k = 1, p. \quad (13)$$

Для оценивания коэффициентов объекта управления (1) решаются следующие частотные уравнения:

$$\hat{d}(j\omega_k) + 1 = \frac{k_0}{\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k}, \quad (14)$$

где $\hat{d}(s) = \hat{d}_m s^m + \hat{d}_{m-1} s^{m-1} + \dots + \hat{d}_1 s + 1$, \hat{d}_i , $i = 1, \dots, m$, — оценки коэффициентов d_i , $i = 1, \dots, m$, объекта (1).

4. ПРИМЕР

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления (1) при $m = 4$:

$$d_4 y^{(4)} + d_3 \ddot{y} + d_2 \dot{y} + d_1 y + y = k_0 u + f,$$

где $d_1 = 1,248$, $d_2 = 0,2579$, $d_3 = 0,99 \cdot 10^{-2}$, $d_4 = 6,4 \cdot 10^{-5}$, $k_0 = 1$.

Его передаточная функция имеет вид

$$W_0(s) = \frac{k_0}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)},$$

где $T_1 = 1$, $T_2 = 0,2$, $T_3 = 0,04$, $T_4 = 0,008$.

Внешнее возмущение $f(t) = a \sin \omega_f t$ с неизвестной амплитудой a , ограниченной числом $f^* = 5$ ($a \leq 5$) и частотой ω_f из диапазона $[0,1; 100]$.

На объект в начальный момент времени подается ступенчатое воздействие (4) величиной $g_0 = 30$.

Требуется построить ПИД-регулятор, при котором установившаяся ошибка была бы меньше заданной ($\varepsilon^* = 0,7$).



**4.2. Второй порядок рабочей модели объекта
($n = 2$, T_1 и T_2 известны)**

Передаточная функция ПИД-регулятора (7) для такого объекта имеет вид

$$W_p(s) = k_p \frac{(T_{p1}s + 1)(T_{p2}s + 1)}{(T_g s + 1)s}, \quad (15)$$

где параметры k_p , T_{p1} , T_{p2} и T_g вычисляем по формулам (8) и (9): $k_p = 1,25$, $T_{p1} = 1$, $T_{p2} = 0,2T_g = 0,1$, $T_{p2} = 0,02$.

Максимальное значение ошибки $\epsilon_f = 2,23$ достигается на частоте $1,1 \text{ с}^{-1}$.

Ошибка по возмущению, оцененная по выражению (10),

$$\frac{4f^*T_2}{T_1 + T_2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 0,2}{1 + 0,2} \cong 3,33.$$

На рис. 1 приведен график выхода объекта, замкнутого указанным ПИ-регулятором при внешнем возмущении $f(t) = 5\sin(1,3t)$. Ошибка регулирования на этом графике не превышает значения $\epsilon = 2,22$.

4.3. Идентификация третьей постоянной времени

При $n = 3$ объект (1) примет вид

$$d_3 \ddot{y} + d_2 \dot{y} + d_1 y + y = k_0 u + f(t), \quad t \geq t_0, \quad (16)$$

где $d_1 = T_1 + T_2 + T_3$, $d_2 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$, $d_3 = T_1 T_2 T_3$, постоянная времени T_3 — неизвестна, ее значение необходимо идентифицировать.

Процедура идентификации состоит из следующих операций.

Операция 1. К объекту прикладывается испытательный сигнал (11), где p вычисляем по формуле (12) как $p = \langle 1,5 \rangle = 2$

$$u(t) = \rho_1 \sin \omega_1 t + \rho_2 \sin \omega_2 t,$$

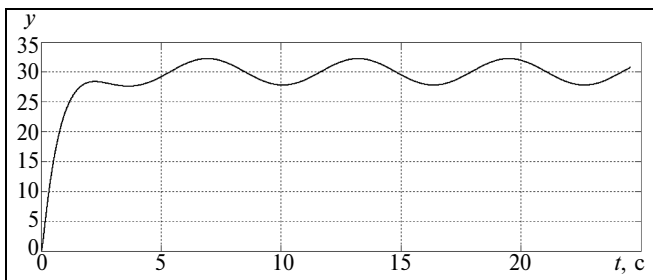


Рис. 1. Выход системы с ПИД-регулятором (15) при задающем воздействии и возмущении

где

$$\rho_1 = 2,267, \quad \rho_2 = 45,16, \quad \omega_1 = 1/T_1 = 1, \\ \omega_2 = b/T_2 = 25,$$

где значение $b = 5$ выбирается достаточно большим.

Операция 2. Получаем оценки по формулам (13).

Операция 3. Оценки коэффициентов уравнения (16) вычисляем по формулам

$$\hat{d}_1 = \frac{k_0 \hat{\beta}_2 \omega_1^3 (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2) - k_0 \hat{\beta}_1 \omega_2^3 (\hat{\alpha}_2^2 + \hat{\beta}_2^2)}{\omega_1 \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2) (\hat{\alpha}_2^2 + \hat{\beta}_2^2)} = 1,255,$$

$$\hat{d}_2 = \frac{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2 - k_0 \hat{\alpha}_1}{\omega_1^2 (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2)} = 0,2618, \quad (17)$$

$$\hat{d}_3 = \frac{k_0 \hat{\beta}_2 \omega_1 (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2) - k_0 \hat{\beta}_1 \omega_2 (\hat{\alpha}_2^2 + \hat{\beta}_2^2)}{\omega_1 \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2) (\hat{\alpha}_2^2 + \hat{\beta}_2^2)} = 0,01011.$$

Эти формулы следуют из уравнений (14). Их вывод приведен в Приложении.

Операция 4. Формируем полином (16)

$$\hat{d}(s) = \hat{d}_3 s^3 + \hat{d}_2 s^2 + \hat{d}_1 s + 1 = \\ = 0,01011 s^3 + 0,2618 s^2 + 1,255 s + 1.$$

Находим его корни и представляем его в виде

$$\hat{d}(s) = (\hat{T}_1 + 1)(\hat{T}_2 s + 1)(\hat{T}_3 s + 1) = \\ = (1,004 s + 1)(0,200 s + 1)(0,0503 s + 1).$$

**4.4. Третий порядок рабочей модели объекта
($n = 3$, T_1 , T_2 и T_3 известны)**

Полученные постоянные времени объекта используем для построения ПИД-регулятора (7)

$$W_p(s) = k_p \frac{(T_{p1}s + 1)(T_{p2}s + 1)(T_{p3}s + 1)}{(T_g s + 1)^2 s}, \quad (18)$$

где параметры k_p , T_{p1} , T_{p2} и T_{p3} вычислены по формулам (8) и (9):

$$k_p = 4,97, \quad T_{p1} = 1,004, \quad T_{p2} = 0,2, \\ T_{p3} = 0,0503, \quad T_g = 0,00503.$$

Максимальное значение ошибки $\epsilon = 0,776$ достигается на частоте $1,94 \text{ с}^{-1}$.

Ошибка по возмущению, оцененная по выражению (10),

$$\frac{4f^*T_3}{T_1 + T_2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 0,0503}{1 + 0,2} \cong 0,834.$$

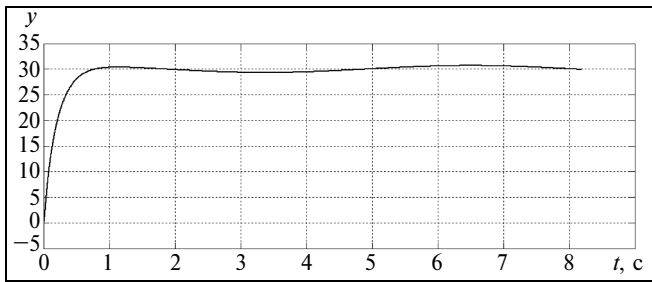


Рис. 2. Выход системы с ПИД-регулятором (18) при задающем воздействии и возмущении

На рис. 2 приведен график выхода объекта, замкнутого указанным ПИД-регулятором. Ошибка регулирования на этом графике не превышает значения $\varepsilon = 0,683$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована система с ПИД-регулятором с производными ошибки при внешних возмущениях. Показано, что увеличение числа производных ошибки позволяет повысить точность регулирования при внешних возмущениях. Для вычисления коэффициентов предложен метод идентификации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Выражение для ошибки $\varepsilon_f(t)$ имеет вид

$$\varepsilon_f = \Phi_f(s)f, \quad (19)$$

где $\Phi_f(s)$ — передаточная функция системы, связывающая ошибку регулирования с внешним возмущением (передаточная функция ошибки по возмущению).

Покажем, что

$$\Phi_f(s) = \frac{1}{d(s)[1 + W_p(s)W_o(s)]}.$$

Действительно, преобразуя по Лапласу уравнения (1) и (3), а также учитывая передаточную функцию (7), получим следующее выражение для ошибки регулирования:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + W(s)}g - \frac{1}{d(s)[1 + W_p(s)W_o(s)]}f.$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения представляет собой ошибку $\varepsilon_g(t)$, обусловленную переходным процессом от ступенчатого воздействия (4), второе — ошибку регулирования $\varepsilon_f(t)$, обусловленную влиянием внешнего возмущения $f(t)$.

Из выражения (19) следует, что цель управления (6) достигается, если выполняется условие

$$H \leq \varepsilon^*/f^*, \quad (20)$$

где

$$H = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |\Phi_f(j\omega)|. \quad (21)$$

Найдем амплитудно-частотную характеристику $|\Phi_f(j\omega)|$ системы с ПИД-регулятором (7) с производными по ошибке. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \Phi_f(s) &= \frac{1/d(s)}{W(s)+1} = \frac{1}{d(s)} \frac{1}{W_p(s)W_o(s)+1} = \\ &= \frac{(T_g s + 1)^{n-1} s}{D(s)}, \end{aligned}$$

где $D(s)$ — характеристический полином замкнутой системы

$$\begin{aligned} D(s) &= s \prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \prod_{i=n+1}^m (T_i s + 1)(T_g s + 1)^{n-1} + \\ &+ \prod_{i=1}^n (T_{pi} s + 1)k, \quad k = k_p k_o. \end{aligned}$$

С учетом равенств (9)

$$\Phi_f(s) = \frac{(T_g s + 1)^{n-1} s}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \left[k + s(T_g s + 1)^{n-1} \prod_{i=n+1}^m (T_i s + 1) \right]}.$$

Пренебрегая здесь малыми постоянными времени, получим

$$\tilde{\Phi}_f(s) = \frac{s}{[k + s] \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}.$$

При условии (8) это выражение может быть представлено в виде

$$\tilde{\Phi}_f(s) = \frac{s}{\frac{1}{4T_n} (4T_n s + 1) \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}. \quad (22)$$

Покажем, что малые постоянные времени T_i , $i = n + 1, \dots, m$, и T_g будут мало влиять на запас устойчивости по фазе. Для этого запишем передаточную функцию разомкнутой системы

$$\begin{aligned} W(s) &= W_p(s)W_o(s) = \\ &= \frac{k_p \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}{(T_g s + 1)^{n-1} s} \frac{k_o}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \prod_{i=n+1}^m (T_i s + 1)} = \\ &= \frac{k}{s(T_g s + 1)^{n-1} \prod_{i=n+1}^m (T_i s + 1)}. \end{aligned}$$



Ее частота среза близка к значению k , вычисленно-му по формуле (8):

$$\omega_{cp} \cong k = 1/4T_n.$$

Действительно, амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы при таком k близка к 1 на частоте среза ω_{cp} :

$$|W(j\omega_{cp})| = \frac{1/4T_n}{\frac{1}{4T_n} \left(\frac{T_g^2}{16T_n^2} + 1 \right)^{\frac{n-2}{2}} \prod_{i=n+1}^m \sqrt{\frac{T_i^2}{16T_n^2} + 1}} \approx 1.$$

Фазово-частотная характеристика $W(s)$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - (n-1)\text{arctg}(T_g\omega) - \sum_{i=n+1}^m \text{arctg}(T_i\omega), \quad (23)$$

а условие устойчивости с запасом по фазе имеет вид $\varphi(\omega_{cp}) \geq -\pi + \varphi_3$, где φ_3 — запас устойчивости системы (1)–(3) по фазе.

Положим $\varphi_3 = \pi/4$. Подставляя это значение в предыдущее выражение и решая его совместно с выражением (23), получим

$$(n-1)\text{arctg}(T_g\omega_{cp}) + \sum_{i=n+1}^m \text{arctg}(T_i\omega_{cp}) < \frac{\pi}{4}.$$

При условии (5)

$$\sum_{i=n+1}^m \text{arctg}(T_i\omega_{cp}) < \frac{\pi}{8}. \quad (24)$$

Действительно, ввиду малости углов запишем это выражение в виде

$$\frac{1}{4T_n} \sum_{i=n+1}^m T_i < \frac{\pi}{8}. \quad (25)$$

Сумма $T_i, i = n+1, \dots, m$, при условии (5) удовлетворяет (по свойству суммы геометрической прогрессии) неравенству

$$\sum_{n+1}^m T_i \leq 2T_{n+1} \leq T_n.$$

Используя это выражение в формуле (25), получаем, что неравенство (24) выполняется. Следовательно, постоянные времени $T_i, i = n+1, \dots, m$, и T_g будут мало влиять на запас устойчивости по фазе.

Оценим уровень амплитудно-частотной характеристики (22). Имеем

$$|\tilde{\Phi}_f(j\omega)| = \frac{4T_n\omega}{\sqrt{16T_n^2\omega^2} \prod_{i=1}^n \sqrt{T_i^2\omega^2 + 1}}. \quad (26)$$

Оценка сверху (мажоранта) этой функции при $n \geq 2$ имеет вид

$$|\Phi^*(j\omega)| = \frac{4T_n\omega}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}\sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (27)$$

Действительно, разность мажоранты (27) и амплитудно-частотной характеристики (26) при $n > 2$ всегда положительна (случай $n = 2$ рассмотрен далее). Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |\Phi^*(j\omega)| - |\tilde{\Phi}_f(j\omega)| &= \\ &= \frac{4T_n\omega \left[\sqrt{4T_n^2\omega^2 + 1} \prod_{i=3}^n \sqrt{T_i^2\omega^2 + 1} - 1 \right]}{\sqrt{16T_n^2\omega^2} \prod_{i=1}^n \sqrt{T_i^2\omega^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках положительно при $0 < \omega < \infty$, поэтому все выражение положительно. При $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ оно обращается в нуль. Таким образом, мажоранта выполняется для случая $n > 2$.

Покажем, что мажоранта (27) справедлива и для случая $n = 2$. Имеем

$$\begin{aligned} |\Phi^*(j\omega)| - |\tilde{\Phi}_f(j\omega)|_{n=2} &= \\ &= \frac{4T_2\omega [\sqrt{16T_2^2\omega^2 + 1} - \sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}]}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}\sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}\sqrt{16T_2^2\omega^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что выражение в квадратных скобках положительно при $0 < \omega < \infty$, а при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ оно обращается в нуль. Таким образом, мажоранта (27) выполняется и для случая $n = 2$.

Найдем максимум мажоранты (27). Ее производная

$$\frac{\partial |\Phi^*(j\omega)|}{\partial \omega} = \frac{4T_n(1 - T_1^2T_2^2\omega^4)}{\sqrt{(T_1^2\omega^2 + 1)^3}\sqrt{(T_2^2\omega^2 + 1)^3}}.$$

Она обращается в нуль при частоте $\omega = \omega^* = 1/\sqrt{T_1T_2}$, и соответственно

$$\sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |\Phi^*(j\omega)| = \frac{4T_n}{T_1 + T_2}.$$

Таким образом, максимум амплитудно-частотной характеристики (26) $\tilde{H} = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |\tilde{\Phi}(j\omega)|$ удовлетворяет условию

$$\tilde{H} \leq \frac{4T_n}{T_1 + T_2}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad n \geq 2. \quad (28)$$

Максимумы (28) и (21) связаны выражением $H = \tilde{H} + \xi$, где ξ — малое число, зависящее от малых постоянных времени T_g и $T_i, i = n+1, m$.

При $T_g = 0$ и $T_i = 0, i = n+1, m$, число $\xi = 0$. По непрерывности заключаем, что всегда существуют достаточно малые T_g и $T_i, i = n+1, m$, такие, что для лю-

бого наперед заданного сколь угодно малого ξ^* будет выполняться условие $\xi \leq \xi^*$. Поэтому для проверки условия (20) будем пользоваться выражением $\varepsilon^* \geq \tilde{H}f^*$. Подставляя сюда условие (20), получаем выражение (10).

Вывод формул (17). Уравнения (14) при $n = 3$ принимают вид

$$-j\hat{d}_3 \omega_k^3 - \hat{d}_2 \omega_k^2 + j\hat{d}_1 \omega_k = k_o / (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k) - 1.$$

Отсюда, выделяя мнимую и действительную части, получаем следующие уравнения

$$-\hat{d}_3 \omega_1^3 + \hat{d}_1 \omega_1 = k_o \frac{-\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2}, \quad (29)$$

$$-\hat{d}_2 \omega_1^2 = k_o \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2} - 1, \quad (30)$$

$$-\hat{d}_3 \omega_2^3 + \hat{d}_1 \omega_2 = k_o \frac{-\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_2^2 + \hat{\beta}_2^2}. \quad (31)$$

Оценка \hat{d}_2 входит только в уравнение (30). Для оп-ределения оценок \hat{d}_1 и \hat{d}_3 запишем уравнения (29) и (31) в виде следующей системы:

$$\begin{bmatrix} -\omega_1^3 & \omega_1 \\ -\omega_2^3 & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d}_3 \\ \hat{d}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_o \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2 \\ -k_o \hat{\beta}_2 \\ \hat{\alpha}_2^2 + \hat{\beta}_2^2 \end{bmatrix}.$$

Решая их, а также выражая из уравнения (30) оцен-ку \hat{d}_2 , получаем формулы (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисенко В.В. Разновидности ПИД-регуляторов // Автоматизация в промышленности. — 2007. — № 6. — С. 45—50.
2. Ротач В.Я. Расчет промышленных автоматических систем регулирования. — М.: Энергия, 1973.
3. Astrom K.J., and Hagglund T. Advanced PID control. — ISA, 2006.
4. Voda A.A., and Landau I.D. A method for the auto-calibration of PID-Controllers // Automatic. — 1995. — Vol. 31, N 1. — P. 41—53.
5. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользовате-ля. — М.: Наука, 1991.
6. Wong K.Y., Polak E. Identification of linear discrete-time sys-tems using instrumental variable method // IEEE Trans. Auto- mat. Control. — 1967. — Vol. AC-12. — P. 707—718.
7. Граничин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных поме-хах. — М.: Наука, 2003.
8. Бунич А.Л., Бахтадзе Н.Н. Синтез и применение дискрет-ных систем управления с идентификатором. — М.: Наука, 2003. — 232 с.
9. Александров А.Г. Конечно-частотная идентификация: са-монастройка испытательных частот // Робастное управле-ние и частотная идентификация: Сб. науч. тр. — Электро-сталь, ЭПИ МИСиС, 2004. — С. 67—97.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Александров Альберт Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, ✉ alex7@ipu.rssi.ru,

Хомутов Дмитрий Алексеевич — вед. инженер, ✉ serrew@yandex.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-76-41.

Содержание специального выпуска сборника «Управление большими системами», посвященного математической теории игр и ее приложениям (<http://ubs.mtas.ru>)

- ✓ Васильев В.А. Об одной аксиоматизации обобщенного расширения Оуэна. — С. 5—17.
- ✓ Винниченко С.В. Непрерывная игра НИМ. — С. 18—31.
- ✓ Кацев И.В., Яновская Е.Б. Промежуточные между пред k - и пред n -ядрами решения кооперативных игр. — С. 32—54.
- ✓ Мазалов В.В., Сакагучи М. Равновесие в бескоалиционной игре n лиц с выбором момента времен. — С. 55—78.
- ✓ Наумова Н.И. Ограниченная согласованность, порожденная функциями полезности коалиций. — С. 79—99.
- ✓ Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Принципы устойчивой кооперации. — С. 100—120.
- ✓ Петросян Л.А., Седаков А.А. Многошаговые сетевые игры с полной информацией. — С. 121—138.
- ✓ Тур А.В. Линейно-квадратичные неантагонистические дискретные игры. — С. 139—163.
- ✓ Чуйко Ю.В. Задача маршрутизации с разделяемым трафиком и неполной информацией. — С. 164—176.
- ✓ Галегов А.И., Гарнаев А.Ю. Налоговая игра в дуополии Курно. — С. 177—192.
- ✓ Гарнаев А. Ю., Торицын А.О. Игровая задача справедливого распределения ресурсов при наличии активных помех. — С. 193—208.
- ✓ Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхртишвили А. Г. Модели репутации и информационного управления в социальных сетях. — С. 209—234.
- ✓ Зенкевич Н.А., Колабутин Н.В., Янг Д.В.К. Стохастическая модель устойчивого совместного предприятия. — С. 235—269.
- ✓ Ивашко А.А. Игра наилучшего выбора двух объектов с полной информацией. — С. 270—286.
- ✓ Искаков М.Б., Павлов П.А. Равновесие в безопасных стратегиях в модели пространственной конкуренции Хотеллинга. — С. 287—318.
 - ✓ Коргин Н.А. Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов. — С. 319—347.
 - ✓ Угольников Г.А. Оптимизационные и теоретико-игровые модели управления инвестиционно-строительными проектами. — С. 348—365.
 - ✓ Реттиева А.Н. Кооперативное регулирующее условие в задаче разделения биоресурсов. — С. 366—384.
 - ✓ Шевкопляс Е.В. Уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью. — С. 385—408.

