УДК 62-50

# КОНЕЧНО-ЧАСТОТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ: ДИНАМИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

А.Г. Александров, Ю.Ф. Орлов

Предложен новый алгоритм конечно-частотной идентификации линейного устойчивого объекта в присутствии неизвестного ограниченного возмущения, позволяющий получить более высокую точность. Доказана его сходимость.

**Ключевые слова:** идентификация, линейные системы, частотный подход, неизвестные ограниченные возмущения.

## ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени разработан ряд методов идентификации объектов управления, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Эти методы условно можно разделить на две группы в зависимости от предположений о помехах измерения и внешних возмущениях, приложенных к объекту.

Первую из них составляют методы идентификации объектов, помехи и внешние возмущения в которых — случайные процессы с известными статистическими характеристиками. Это различные варианты метода наименьших квадратов и метода стохастической аппроксимации. Их описание приводится в известных книгах [1, 2].

Вторая группа — это методы идентификации при неизвестных ограниченных помехах и внешних возмущениях (с неизвестными статистическими характеристиками): рандомизированные алгоритмы [3, 4] и конечно-частотная идентификация [5].

Особое место занимает метод инструментальных переменных [2, 6]. Разработанный в рамках первой группы он применим, в отличие от других методов этой группы, для решения задач второй группы, и поэтому будем относить его к последней.

Процесс идентификации может быть пассивным либо активным. В случае пассивной идентификации измеряемым входом объекта служит управление, которое зависит от целей объекта и не связано с задачей идентификации. Может случиться что при таком входе идентификация объекта невозможна. В связи с этим применяется активная идентификация, при которой измеряемый вход объекта содержит наряду с управлением дополнительное воздействие (испытательный сигнал), предназначенное для идентификации объекта.

Метод конечно-частотной идентификации предназначен для активной идентификации. Испытательный сигнал представляет собой сумму гармоник с автоматически настраиваемыми (самонастраиваемыми) амплитудами и частотами. Число этих гармоник не превышает размерности вектора состояний объекта управления. Самонастройка амплитуд осуществляется для выполнения требований к допустимым границам входа и выхода объекта, которые выполняются, когда испытательный сигнал отсутствует.

Полезно сравнить возможности метода конечно-частотной идентификации с другими методами второй группы, которые являются более общими и могут применяться как для пассивной, так и для активной идентификации.

Рандомизированные алгоритмы предполагают, что испытательный сигнал — случайный процесс с известными статистическими характеристиками и поэтому трудно гарантировать заданные допуски на выходы объекта.

В работе [7] сравниваются возможности методов инструментальных переменных и конечно-частотной идентификации для активной идентификации. Показано, что последний из них дает существенно бóльшую точность при заданном времени идентификации. Это достигается благодаря самонастройке частот испытательного сигнала.

Однако, если внешние возмущения и помехи малы (либо отсутствуют), а процессы в объекте возбуждаемы, в основном, начальными условиями, то ситуация обратная: метод инструментальных переменных дает более высокую точность.

Настоящая работа посвящена динамическому алгоритму конечно-частотной идентификации, который позволяет достичь точности идентификации, близкой к методу инструментальных переменных при малых внешних возмущениях, сохраняя преимущества метода конечно-частотной идентификации, когда процессы в объекте зависят, в основном, от внешних возмущений.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полностью управляемый асимптотически устойчивый объект, описываемый разностным уравнением

$$\begin{gathered} y(k) + d_{n-1}y(k-1) + \ldots d_0 y(k-n) = \\ = b_{n-1}u(k-1) + \ldots + b_0 u(k-n) + f(k-1), \\ k = k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots, \end{gathered} \tag{1}$$

где $y(k)$ — выход объекта, измеряемый в момент времени $kh \cong t$ ($h$ — интервал дискретности измерений); $u(k)$ — управляемый (в момент времени $kh$) вход; $f(k)$ — внешнее возмущение — неизвестная ограниченная фильтруемая фильтром Фурье [8] функция: $|f(k)| \leqslant f^*$, $k \geqslant k_0 - 1$, где $f^*$ — число (дополнительное ограничение на эту функцию дается в п. 2.1); $k_0 \cong t_0/h$, $t_0$ — начальное время. Коэффициенты $d_i$ и $b_i$, $i = 0, n-1$, неизвестны.

Управляемый вход представляет собой испытательный сигнал

$$\begin{gathered} u(k) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \sin\bar{\omega}_i (k - k_u), \\ k \geqslant k_u \geqslant k_0, \end{gathered} \tag{2}$$

в котором $\rho_i > 0$ — заданные амплитуды; $\bar{\omega}_i = \omega_i h$, где $\omega_i$, $i = \overline{1, n}$ — частоты — заданные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} 0 < \omega_i h < \pi, \quad i = \overline{1, n}, \\ \omega_i \neq \omega_j, \quad i \neq j. \end{gathered} \tag{3}$$

Испытательный сигнал прикладывается к объекту в момент времени $t_u = k_u h$, до которого функция (2) принимает нулевое значение: $u(k) = 0$ при $k_0 \leqslant k \leqslant k_u$.

*Задача идентификации* состоит в определении оценок $\hat{d}_i$ и $\hat{b}_i$, $i = \overline{0, n-1}$, коэффициентов объекта (1) таких, чтобы выполнились требования

$$\begin{cases} |\hat{d}_i - d_i| \le \varepsilon_i^d |d_i|, \text{ если } d_i \neq 0 \text{ либо} \\ \quad |\hat{d}_i| \le \varepsilon_i^d, \text{ если } d_i = 0, \\ |\hat{b}_i - b_i| \le \varepsilon_i^b |b_i|, \text{ если } b_i \neq 0 \text{ либо} \\ \quad |\hat{b}_i| \le \varepsilon_i^b, \text{ если } b_i = 0, \end{cases}$$

к относительной точности идентификации, в которых $\varepsilon_i^d$ и $\varepsilon_i^b$, $i = \overline{0, n-1}$, — заданные положительные числа.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

### 2.1. Частотные параметры объекта

**Определение 1** [8]. Набор $2n$ чисел

$$\alpha_i \cong \mathrm{Re}\, w(e^{j\bar{\omega}_i}), \quad \beta_i \cong \mathrm{Im}\, w(e^{j\bar{\omega}_i}), \quad i = \overline{1, n} \tag{4}$$

— значений передаточной функции

$$w(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + d_{n-1}z^{n-1} + \ldots + d_1 z + d_0}$$

на частотах (3), называется *частотными параметрами* объекта (1). ♦

Для экспериментального определения оценок $\hat{\alpha}_i$ и $\hat{\beta}_i$, $i = \overline{1, n}$ частотных параметров (4) ко входу объекта (1) прикладывается испытательное воздействие (2). Выход объекта подается на вход фильтра Фурье

$$\begin{gathered} \hat{\alpha}_i = \alpha_i(N) = \frac{2}{\rho_i N} \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k)\sin\bar{\omega}_i(k - k_u), \\ \hat{\beta}_i = \beta_i(N) = \frac{2}{\rho_i N} \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k)\cos\bar{\omega}_i(k - k_u), \\ i = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $k_u h$ — момент начала фильтрации, $Nh$ — время фильтрации, $N = 1, 2, \ldots$ Предполагается, что $Nh$ кратно базовому периоду $T_\delta = 2\pi/\omega_\delta$, где $\omega_\delta = \min(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$.

Решение уравнения (1) имеет следующую структуру:

$$y(k) = y_x(k) + y_u(k) + y_f(k), \tag{6}$$

где

$$y_u(k) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\alpha_i \sin\bar{\omega}_i (k - k_u) + \beta_i \cos\bar{\omega}_i (k - k_u)),$$

компоненту $y_f(k)$ образуют ненулевые внешние возмущения, компонента $y_x(k)$ — исчезающая функция: $\lim\limits_{k\to\infty} y_x(k) = 0$. Эта функция зависит, в частности, от ненулевых начальных условий $y(k_0 - 1)$, $y(k_0 - 2)$, ..., $y(k_0 - n)$.

Пусть $l_i^\alpha(N)$ и $l_i^\beta(N)$ — выходы фильтра Фурье, при $u(k) = 0$, $k \geqslant k_0$ ($y_u(k) = 0$).

**Определение 2** [8]. Возмущение $f(k)$, $k \geqslant k_0 - 1$ называется *ФФ-фильтруемым* (фильтруемым фильтром Фурье) на заданном наборе испытательных частот $\omega_i$, $i = \overline{1, n}$, если существует время фильтрации $N^*h$ такое, что выполняются неравенства

$$|l_i^\alpha(N)| \leqslant \varepsilon_i^\alpha, \quad |l_i^\beta(N)| \leqslant \varepsilon_i^\beta,$$
$$i = \overline{1, n}, \quad N \geqslant N^*,$$

в которых $\varepsilon_i^\alpha$ и $\varepsilon_i^\beta$, $i = \overline{1, n}$ — заданные числа.

Если это возмущение таково, что $\lim\limits_{N\to\infty} l_i^\alpha(N) = \lim\limits_{N\to\infty} l_i^\beta(N) = 0$, $i = \overline{1, n}$, то оно называется *строго ФФ-фильтруемым*. ♦

В частности, строго ФФ-фильтруемым является возмущение вида

$$f(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \sin(\bar{\omega}_\nu^f k + \varphi_\nu^f), \quad k \geqslant k_0 - 1, \qquad (7)$$

неизвестных частот $\bar{\omega}_\nu^f$, таких что $|\bar{\omega}_\nu^f| \neq |\bar{\omega}_i|$, $i = \overline{1, n}$ и фаз $\varphi_\nu^f$, $\nu = \overline{\nu, \infty}$. Для того чтобы функция (7) была ограниченной, ее неизвестные амплитуды должны удовлетворять при этом неравенству $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu| \leqslant f^*$, где $f^*$ — известное число.

ФФ-фильтруемость может быть проверена экспериментально.

Оценки (5) частотных параметров сходятся [8] к истинным значениям при любых ограниченных строго ФФ-фильтруемых внешних возмущениях: $\lim\limits_{N\to\infty} \alpha_i(N) = \alpha_i$, $\lim\limits_{N\to\infty} \beta_i(N) = \beta_i$, $i = \overline{1, n}$.

### 2.2. Частотные уравнения и статический алгоритм

Сформируем уравнение (так называемое тождество Безу)

$$d(q)\bar{b}(q) - b(q)\bar{d}(q) = b(q), \quad q = z^{-1}, \qquad (8)$$

где искомые полиномы $\bar{b}(q) = \bar{b}_{n-1} q + \bar{b}_{n-2} q^2 + ... + \bar{b}_1 q^{n-1} + \bar{b}_0 q^n$ и $\bar{d}(q) = \bar{d}_{n-1} q + \bar{d}_{n-2} q^2 + ... + \bar{d}_1 q^{n-1} + \bar{d}_0 q^n$.

Это уравнение имеет единственное решение

$$\bar{d}_i = d_i \text{ и } \bar{b}_i = b_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \qquad (9)$$

Разделим уравнение (8) на $d(q)$, положим $q_i = e^{-j\bar{\omega}_i}$ и, учитывая выражение (4), получим следующую систему $2n$ уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{n} e^{-j\bar{\omega}_i \nu} \bar{b}_{n-\nu} - (\alpha_i + j\beta_i) \sum_{\nu=1}^{n} e^{-j\bar{\omega}_i \nu} \bar{d}_{n-\nu} = \alpha_i + j\beta_i,$$
$$i = \overline{1, n}. \qquad (10)$$

Если объект полностью управляем, а испытательные частоты удовлетворяют условиям (3), то система линейных алгебраических уравнений (10) имеет единственное решение (9).

Статический алгоритм идентификации [8—10] состоит в определении оценок частотных параметров с помощью фильтра Фурье (5) и решения частотных уравнений (10), где $\alpha_i = \hat{\alpha}_i$ и $\beta_i = \hat{\beta}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Этот алгоритм имеет следующий недостаток. Пусть компонента $y_x(k)$ в выражении (6) доминирует:

$$|y_x(k)| > |y_u(k) + y_f(k)|, \quad k = \overline{k_0, k_0 + N_1 - 1}.$$

В этом случае точность идентификации в момент времени $(k_0 + N_1 - 1)h$ может быть мала. Ниже приводится новый алгоритм, который лишен этого недостатка.

## 3. ДИНАМИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

Умножим каждое из $N$ уравнений

$$y(k) + \sum_{\nu=1}^{n} d_{n-\nu} y(k - \nu) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{n-\nu} u(k - \nu) + f(k - 1),$$
$$k = \overline{k_u, k_u + N - 1} \qquad (1')$$

на модулирующие [11] функции $\sin\bar{\omega}_i(k - k_u)$, $\cos\bar{\omega}_i(k - k_u)$, $i = \overline{1, n}$ и после суммирования по $k$ получим:

$$\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k)\sin\bar{\omega}_i(k - k_u) + \sum_{v=1}^{n} d_{n-v} \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k - v)\sin\bar{\omega}_i(k - k_u) = \sum_{v=1}^{n} b_{n-v} \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} u(k - v)\sin\bar{\omega}_i(k - k_u) + \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} f(k - 1)\sin\bar{\omega}_i(k - k_u), \quad i = \overline{1, n};$$

$$\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k)\cos\bar{\omega}_i(k - k_u) + \sum_{v=1}^{n} d_{n-v} \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k - v)\cos\bar{\omega}_i(k - k_u) = \sum_{v=1}^{n} b_{n-v} \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} u(k - v)\cos\bar{\omega}_i(k - k_u) + \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} f(k - 1)\cos\bar{\omega}_i(k - k_u), \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Введем векторы $\mathbf{y} \cong [y(k_u)y(k_u + 1) \ldots y(k_u + N - 1)]^T$, $\mathbf{f} \cong [f(k_u - 1)f(k_u) \ldots f(k_u + N - 2)]^T$, $\mathbf{y}(k) \cong [y(k - 1)y(k - 2) \ldots y(k - n)]^T$, $\mathbf{u}(k) \cong [u(k - 1)u(k - 2) \ldots u(k - n)]^T$, $\mathbf{d} \cong [d_{n-1} \ldots d_1d_0]^T$ и $\mathbf{b} \cong [b_{n-1} \ldots b_1b_0]^T$ и матрицы

$$S \cong \frac{2}{N}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sin\bar{\omega}_1 & \sin\bar{\omega}_2 & \ldots & \sin\bar{\omega}_n \\ \sin\bar{\omega}_1 2 & \sin\bar{\omega}_2 2 & \ldots & \sin\bar{\omega}_n 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\bar{\omega}_1(N-1) & \sin\bar{\omega}_2(N-1) & \ldots & \sin\bar{\omega}_n(N-1) \end{pmatrix},$$

$$C \cong \frac{2}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cos\bar{\omega}_1 & \cos\bar{\omega}_2 & \ldots & \cos\bar{\omega}_n \\ \cos\bar{\omega}_1 2 & \cos\bar{\omega}_2 2 & \ldots & \cos\bar{\omega}_n 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\bar{\omega}_1(N-1) & \cos\bar{\omega}_2(N-1) & \ldots & \cos\bar{\omega}_n(N-1) \end{pmatrix},$$

$Y \cong (\mathbf{y}(k_u)\ \mathbf{y}(k_u + 1) \ldots \mathbf{y}(k_u + N - 1))^T$ и $U \cong (\mathbf{u}(k_u)\ \mathbf{u}(k_u + 1) \ldots \mathbf{u}(k_u + N - 1))^T$.

Тогда система уравнений (11) примет вид

$$M\theta = \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_f, \quad (12)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} -S^TY & S^TU \\ -C^TY & C^TU \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_y = \begin{bmatrix} S^T\mathbf{y} \\ C^T\mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{v}_f = \begin{pmatrix} -S^T\mathbf{f} \\ -C^T\mathbf{f} \end{pmatrix}.$$

Здесь на пересечении $v$-го столбца и $i$-й строки у блока $-S^TY$ стоит элемент $-\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k - v) \times \sin\bar{\omega}_i(k - k_u)$, у блока $S^TU$ соответственно $\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} u(k - v)\sin\bar{\omega}_i(k - k_u)$, у блока $-C^TY$ стоит элемент $-\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k - v)\cos\bar{\omega}_i(k - k_u)$, у блока $C^TU$ соответственно $\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} u(k - v)\cos\bar{\omega}_i(k - k_u)$; $v$-й элемент столбца $S^T\mathbf{y}$ имеет вид $\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k)\sin\bar{\omega}_v(k - k_u)$, $v$-й элемент столбца $C^T\mathbf{y}$ соответственно $\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} y(k) \times \cos\bar{\omega}_v(k - k_u)$; $v$-й элемент столбца $-S^T\mathbf{f}$ имеет вид $-\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} f(k - 1)\sin\bar{\omega}_v(k - k_u)$, $v$-й элемент столбца $-C^T\mathbf{f}$ соответственно $-\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} f(k - 1) \times \cos\bar{\omega}_v(k - k_u)$.

Элементы матрицы $M$ и вектора $\mathbf{v}_y$ системы уравнений (12) вычисляются по измеряемым входу и выходу объекта (1). Вектор $\mathbf{v}_f$ неизвестен, так как $f(k - 1)$ не измеряется. Поэтому оценку $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ вектора параметров объекта будем искать на основе уравнения

$$M(N)\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{v}_y(N). \qquad (14)$$

Очевидно, что решение $\hat{\boldsymbol{\theta}} = M^{-1}\mathbf{v}_y$ последнего существует, если $\det M \neq 0$ и совпадает с истинным значением $\boldsymbol{\theta}$ при $\mathbf{v}_f = 0$.

**Утверждение 1.** *Если внешнее возмущение строго ФФ-фильтруемо, то при $N \to \infty$ матричное уравнение* (14) *сходится к системе 2n уравнений* (10). ♦

Доказательство приведено в Приложении.

Алгоритм идентификации состоит из следующих операций.

1.Формируем матрицу $M(N)$ и вектор $\mathbf{v}_y(N)$ системы (13) для каждого $N$, $N = 1, 2, ...$

2.Решая систему линейных уравнений (14), вычисляем оценки $\boldsymbol{\theta}(N)$ для каждого $N$, $N = 1, 2, ...$

## 4. ПРИМЕР

Пусть имеется полностью управляемый асимптотически устойчивый объект, описываемый разностным уравнением

$$\begin{gathered} y(k) - 2{,}937y(k-1) + 2{,}877y(k-2) - \\ - 0{,}940y(k-3) = -9{,}712\cdot 10^{-5}u(k-1) + \\ + 5{,}235\cdot 10^{-6}u(k-2) + 9{,}674\cdot 10^{-5}u(k-3) + \\ + 8{,}205\cdot 10^{-7}f(k-1) + 3{,}231\cdot 10^{-6}f(k-2) + \\ + 7{,}954\cdot 10^{-7}f(k-3), \quad k = \overline{1, N}, \qquad (15) \end{gathered}$$

с возмущением $f(k) = \mathrm{sign}(\sin 0{,}0275k)$.

На вход объекта подается испытательный сигнал

$$u(k) = 3(\sin 0{,}002k + \sin 0{,}01k + \sin 0{,}05k).$$

Задача состоит в том, чтобы по известным (полученным в результате моделирования уравнения (15)) значениям $y(k)$ и $u(k)$ найти оценки коэффициентов передаточной функции объекта.

**Примечание 1.** Разностное уравнение (15) соответствует дифференциальному уравнению [12] $\dddot{y} + 6{,}2\ddot{y} + 26{,}2\dot{y} + 5y = -2\dot{u} + 5u + f$ и получено путем дискретизации последнего с интервалом дискретности $h = 0{,}01$ с. Для сравнения результатов идентификации с коэффициентами передаточной функции

$$w(s) = \frac{-2s + 5}{s^3 + 6{,}2s^2 + 26{,}2s + 5}$$

дискретное описание объекта преобразуется к непрерывному. ♦

Численные эксперименты проводились в системе MATLAB.

*Первый эксперимент.* Пусть начальные условия $y(0) = y(-1) = 0$ и $y(-2) = 1$. Передаточная функция идентифицированного объекта при $N = 75$ имеет вид:

$$\hat{w}(s) = \frac{-6{,}01\cdot 10^{-3}s^2 - 1{,}937s + 4{,}905}{s^3 + 6{,}1995s^2 + 26{,}198s + 4{,}983}.$$

*Второй эксперимент.* Используем при тех же начальных условиях статический алгоритм идентификации из п. 2.2. Передаточная функция идентифицированного объекта при $N = 75$ имеет вид:

$$\hat{w}(s) = \frac{566{,}74s^2 - 217s + 114{,}8}{s^3 + 2{,}947s^2 + 4{,}142s + 0{,}2298}.$$

**Примечание 2.** Точность идентификации в первом эксперименте с помощью статического алгоритма достигается при $N = 94\,500$ (при этом приходится ждать 31,5 с, пока «успокоится» переходный процесс). Передаточная функция в этом случае имеет вид

$$\hat{w}(s) = \frac{0{,}01598s^2 - 2{,}083s + 5{,}197}{s^3 + 6{,}354s^2 + 27{,}17s + 5{,}209}.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе построен динамический алгоритм конечно-частотной идентификации. Он позволяет получать более высокую точность идентификации в случае, когда в решении уравнения объекта доминирует компонента $y_x(k)$, зависящая от начальных условий. Если в решении доминирует компонента $y_f(k)$, то точность результатов идентификации, полученных статическим и динамическим алгоритмами, близка.

## *ПРИЛОЖЕНИЕ*

Доказательство утверждения 1. Введем функции

$$c_{\bullet}(\bar{\omega}_i, N) \cong \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} \bullet(k)\, e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)},$$

$$c_{\bullet}^{(v)}(\bar{\omega}_i, N) \cong \sum_{k=k_u}^{k_u+N-1} \bullet(k-v)\, e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}, \quad i, v = \overline{1, n},$$

значок • в определении которых используется для компактности как один из трех символов ($y$, $u$ либо $f$).

Эти функции связаны как

$$c_{\bullet}^{(v)}(\bar{\omega}_i, N) = c_{\bullet}(\bar{\omega}_i, N)\, e^{-j\bar{\omega}_i v} + \delta_{\bullet}^{(v)}(\bar{\omega}_i, N), \quad (\Pi 1)$$

где

$$\delta_{\bullet}^{(\nu)}(\bar{\omega}_i\,,\,N)\sum_{k=k_u}^{k_u+\nu-1}\bullet(k-\nu)\,e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}\;-$$

$$-\sum_{k=k_u+N}^{k_u+N+\nu-1}\bullet(k-\nu)\,e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)},\quad i,\,\nu=\overline{1,n}\,.$$

Преобразованная с учетом формулы Эйлера система (11) в этих обозначениях примет вид

$$c_y(\bar{\omega}_i\,,\,N)+\sum_{\nu=1}^{n}d_{n-\nu}c_y^{(\nu)}(\bar{\omega}_i\,,\,N)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}b_{n-\nu}c_u^{(\nu)}(\bar{\omega}_i\,,\,N)+c_f^{(1)}(\bar{\omega}_i\,,\,N),\quad i=\overline{1,n}\,.\quad(\Pi 2)$$

Обозначим

$$w^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=\frac{c_y(\bar{\omega}_i,N)}{c_u(\bar{\omega}_i,N)},\quad w_f^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=\frac{c_f(\bar{\omega}_i,N)}{c_u(\bar{\omega}_i,N)},$$

$$\delta_{d,\nu}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=\frac{\delta_y^{(\nu)}(\bar{\omega}_i,N)}{c_y(\bar{\omega}_i,N)},\quad \delta_{b,\nu}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=\frac{\delta_u^{(\nu)}(\bar{\omega}_i,N)}{c_u(\bar{\omega}_i,N)},$$

$$\delta_{m,1}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=\frac{\delta_f^{(1)}(\bar{\omega}_i,N)}{c_f(\bar{\omega}_i,N)}.\quad(\Pi 3)$$

Система (П2) с учетом выражения (П1) в обозначениях (П3) примет вид

$$-w^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})\sum_{\nu=1}^{n}(e^{-j\bar{\omega}_i\nu}+\delta_{d,\nu}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i}))d_{n-\nu}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}(e^{-j\bar{\omega}_i\nu}+\delta_{b,\nu}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i}))b_{n-\nu}=w^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})-$$

$$-\,w_f^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})(e^{-j\bar{\omega}_i}+\delta_{m,1}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})),\quad i=\overline{1,n}\,.\quad(\Pi 4)$$

Выпишем уравнение (10) с учетом формул (4) и (9):

$$-w(e^{j\bar{\omega}_i})\sum_{\nu=1}^{n}e^{-j\bar{\omega}_i\nu}d_{n-\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}e^{-j\bar{\omega}_i\nu}b_{n-\nu}=w(e^{j\bar{\omega}_i}),$$

$$i=\overline{1,n}\,.\quad(\Pi 5)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (П4) и (П5) совпадают, если

(a) $\lim\limits_{N\to\infty}w^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=w(e^{j\bar{\omega}_i})$,

(b) $\lim\limits_{N\to\infty}w_f^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=0$,

(c) $\lim\limits_{N\to\infty}\delta_{d,\nu}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=0$,

(d) $\lim\limits_{N\to\infty}\delta_{b,\nu}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=0$ и

(e) $\lim\limits_{N\to\infty}\delta_{m,1}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})<\infty$.

Доказательство каждого из этих соотношений начинается с индекса, обозначающего это соотношение.

(a) Подставим выражение (6) в формулу для $c_y(\bar{\omega}_i\,,\,N)$:

$$c_y(\bar{\omega}_i\,,\,N)=\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1}y(k)\,e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}=$$

$$=c_{yx}(\bar{\omega}_i\,,\,N)+c_{yu}(\bar{\omega}_i\,,\,N)+c_{yf}(\bar{\omega}_i\,,\,N),\quad i=\overline{1,n}\,.$$

В силу асимптотической устойчивости объекта имеем

$$\lim_{N\to\infty}\frac{c_{yx}(\bar{\omega}_i,N)}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1}y_x(k)\,e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}=0,$$

$$i=\overline{1,n}\,,$$

а в силу строгой ФФ-фильтруемости внешнего возмущения соответственно

$$\lim_{N\to\infty}\frac{c_{yf}(\bar{\omega}_i,N)}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1}y_f(k)\,e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}=0,$$

$$i=\overline{1,n}\,.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{c_{yu}(\bar{\omega}_i,N)}{N}=\frac{1}{N}\sum_{k=k_u}^{k_u+N-1}y_u(k)\,e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}=$$

$$=\rho_i\left(\frac{\beta_i-j\alpha_i}{2}+\frac{\beta_i+j\alpha_i}{2N}\cdot\frac{e^{-j2\bar{\omega}_iN}-1}{e^{-j2\bar{\omega}_i}-1}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n}\rho_\nu\left(\frac{\beta_\nu-j\alpha_\nu}{2N}\cdot\frac{e^{j(\bar{\omega}_\nu-\bar{\omega}_i)N}-1}{e^{j(\bar{\omega}_\nu-\bar{\omega}_i)}-1}+\frac{\beta_\nu+j\alpha_\nu}{2N}\cdot\frac{e^{-j(\bar{\omega}_\nu+\bar{\omega}_i)N}-1}{e^{-j(\bar{\omega}_\nu+\bar{\omega}_i)}-1}\right).$$

Аналогично, можно показать, что

$$\frac{c_u(\bar{\omega}_i,N)}{N}=\frac{\rho_i}{2j}\left(1-\frac{1}{N}\cdot\frac{e^{-j2\bar{\omega}_iN}-1}{e^{-j2\bar{\omega}_i}-1}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n}\frac{\rho_\nu}{2jN}\left(\frac{e^{j(\bar{\omega}_\nu-\bar{\omega}_i)N}-1}{e^{j(\bar{\omega}_\nu-\bar{\omega}_i)}-1}+\frac{e^{-j(\bar{\omega}_\nu+\bar{\omega}_i)N}-1}{e^{-j(\bar{\omega}_\nu+\bar{\omega}_i)}-1}\right).$$

Таким образом,

$$\lim_{N\to\infty}w^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=\lim_{N\to\infty}\frac{c_y(\bar{\omega}_i,N)}{c_u(\bar{\omega}_i,N)}=\lim_{N\to\infty}\frac{c_{yu}(\bar{\omega}_i,N)/N}{c_u(\bar{\omega}_i,N)/N}=$$

$$=\rho_i\frac{\beta_i-j\alpha_i}{2}\Big/\frac{\rho_i}{2j}=\alpha_i+j\beta_i=w(e^{j\bar{\omega}_i}),\quad i=\overline{1,n}\,.$$

(b) В силу строгой ФФ-фильтруемости функция $c_f(\bar{\omega}_i\,,\,N)$, $i=\overline{1,n}$ ограничена и следовательно

$$\lim_{N\to\infty}w_f^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})=\lim_{N\to\infty}\frac{c_f(\bar{\omega}_i,N)}{c_u(\bar{\omega}_i,N)}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{c_f(\bar{\omega}_i,N)/N}{c_u(\bar{\omega}_i,N)/N}=0,\quad i=\overline{1,n}\,.$$

(c) Предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty}\delta_{d,\,v}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i}) = \lim_{N\to\infty}\frac{\delta_y^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)}{c_y(\bar{\omega}_i,\,N)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{\delta_{yx}^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)/N + \delta_{yu}^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)/N + \delta_{yf}^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)/N}{c_{yx}(\bar{\omega}_i,\,N)/N + c_{yu}(\bar{\omega}_i,\,N)/N + c_{yf}(\bar{\omega}_i,\,N)/N},$$

$$i,\,v = \overline{1,n}.$$

В силу асимптотической устойчивости объекта (1):

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_{yx}^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=k_u}^{k_u+v-1} e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}\,(y_x(k-v) -$$

$$- y_x(N+k-v)e^{-j\bar{\omega}_i N}) = 0,\quad i,\,v = \overline{1,n}.$$

В силу ФФ-фильтруемости внешнего возмущения:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_{yf}^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=k_u}^{k_u+v-1} e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}\,(y_f(k-v) -$$

$$- y_f(N+k-v)e^{-j\bar{\omega}_i N}) = 0,\quad i,\,v = \overline{1,n}.$$

Из ограниченности функции

$$\delta_{yu}^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N) = \sum_{k=k_u}^{k_u+v-1} e^{-j\bar{\omega}_i(k-k_u)}\,(y_u(k-v) -$$

$$- y_u(N+k-v)e^{-j\bar{\omega}_i N}),\quad i,\,v = \overline{1,n},$$

следует

$$\lim_{N\to\infty}\delta_{d,\,v}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i}) = \lim_{N\to\infty}\frac{\delta_{yu}^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)/N}{c_{yu}(\bar{\omega}_i,\,N)/N} = 0,\quad i,\,v = \overline{1,n}.$$

(d) Из ограниченности функции $\delta_u^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)$ следует:

$$\lim_{N\to\infty}\delta_{b,\,v}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i}) = \lim_{N\to\infty}\frac{\delta_u^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)}{c_u(\bar{\omega}_i,\,N)} = \lim_{N\to\infty}\frac{\delta_u^{(v)}(\bar{\omega}_i,\,N)/N}{c_u(\bar{\omega}_i,\,N)/N} = 0,$$

$$i,\,v = \overline{1,n}.$$

(e) Из ограниченности функции $\delta_f^{(1)}(\bar{\omega}_i,\,N) = f(k_u - 1) - f(k_u + N - 1)e^{-j\bar{\omega}_i N}$, $i = \overline{1,n}$, следует:

$$\lim_{N\to\infty} w_f^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i})\,\delta_{m,\,1}^{(N)}(e^{j\bar{\omega}_i}) = \lim_{N\to\infty}\frac{\delta_f^{(1)}(\bar{\omega}_i,\,N)}{c_u(\bar{\omega}_i,\,N)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{\delta_f^{(1)}(\bar{\omega}_i,\,N)/N}{c_u(\bar{\omega}_i,\,N)/N} = 0,\quad i = \overline{1,n}.$$

Утверждение 1, таким образом, доказано.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
2. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. — М.: Наука, 1991. — 432 с.
3. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. — М.: Наука, 2003. — 291 с.
4. *Бунич А.Л., Бахтадзе Н.Н.* Синтез и применение дискретных систем управления с идентификатором. — М.: Наука, 2003. — 232 с.
5. *Alexandrov A.G.* Finite-frequency method of identification // Preprints of 10th IFAC Symposium on System Identification. — Copenhagen, Denmark, 1994. — Vol. 2. — P. 523—527.
6. *Wong K.Y., Polak E.* Identification of linear discrete time systems using the instrumental variable approach // IEEE Trans. Automat. Control. — 1967. — Vol. AC-12. — P. 707—718.
7. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Сравнение двух методов идентификации при неизвестных ограниченных возмущениях // Автоматика и телемеханика. — 2005. — Т. 66, № 10. — С. 128—147.
8. *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация дискретных объектов // Тр. 6-го Санкт-Петербургского симпозиума по теории адаптивных систем, посвященного памяти Я.З. Цыпкина. SPAS'99. — СПб., 7 — 9 сентября 1999. — Т. 2. — С. 5—8.
9. *Alexandrov A.G., Orlov Yu.F.* Frequency adaptive control of multivariable plants // Preprints of the 15th Trienial World Congress of the IFAC. — Barcelona, Spain, 21—26 Jily 2002. On CD-ROM T-Th-M03-3.
10. *Alexandrov A.G.* Finite-frequency identification: selftuning of test signal // Preprints of the 16th IFAC World Congress. — Prague, Czech Republic, 3—8 Jily 2005, CD-ROM.
11. *Shinbrot M.* On the analysis of linear and nonlinear systems // Trans. ASME. — 1957. — Vol. 79. — P. 547—552.
12. *Graebe S.F.* Robust and adaptive control of an unknown plant: A benchmark of new format // Preprints of 12th World Congress of IFAC. — Sydney, Australia, 1993. — Vol. 3. — P. 165—170.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Ф. Пащенко.*

**Александров Альберт Георгиевич** — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, ☎(495) 334-76-41, ✉ alex7@ipu.rssi.ru,

**Орлов Юрий Феликсович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, Электростальский политехнический институт, ☎(49657) 5-36-55, ✉ yu_orlov@mail.ru.