

ЗАПАСЫ УСТОЙЧИВОСТИ И РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

© 2010 г. А. Г. Александров

Москва, ИПУ РАН

Поступила в редакцию 15.07.09 г., после переработки 30.05.10 г.

Рассматриваются линейные системы, коэффициенты объектов которых принимают значения из заданных интервалов. Исследуются запасы устойчивости по фазе и модулю таких систем. Получена связь длин интервалов, при которых система теряет устойчивость, с частотными характеристиками системы. Доказано, что при малых запасах устойчивости малы длины таких интервалов.

Введение. Системам автоматического управления присуща высокая чувствительность протекающих в них процессов к неопределенности параметров объекта управления. Это связано с тем, что параметры регулятора определяются заданными целью управления и параметрами объекта, и если параметры последнего отличаются от тех, которые использовались при расчете регулятора, то цель управления не достигается. Это привело к частотной теории управления, где для расчета регулятора применяются частотные характеристики реализованного объекта, получаемые экспериментально. Началом этой теории явился критерий Найквиста [1], который, в частности, дает условия для частотных характеристик объекта и регулятора, когда система находится на границе устойчивости. Близость к этой границе определяется запасами устойчивости по фазе (φ_3) и модулю (L), введенными Боде [2]. Обеспечение минимально допустимых значений запасов $\varphi_3 = 30^\circ$ и $L = 2$ является стандартным требованием при проектировании систем автоматического управления [3, 4], допускающим экспериментальную проверку.

В последние десятилетия развивается интервальный подход [5, 6], в котором объект описывается дифференциальными уравнениями с коэффициентами, заданными их интервалами, и исследуется устойчивость систем регулирования с такими объектами. Разработаны критерии устойчивости, когда известен интервальный характеристический полином системы. Однако если построить, используя интервальную арифметику, этот полином для системы с интервальным объектом, то его интервалы часто существенно завышены и поэтому указанные критерии дают лишь весьма грубые достаточные условия устойчивости.

Эти два направления анализа систем при не точно известных параметрах объекта развиваются независимо, и поэтому возникает задача нахождения связи между запасами устойчивости и длинами интервалов значений коэффициентов объ-

екта, при которых система сохраняет (либо теряет) устойчивость. Такие исследования были начаты в книге [7], где получены частные результаты. Одна из трудностей состояла в том, что запас по фазе определяется на основе частот среза системы при том, что их может быть несколько. Ниже вводится радиус запасов устойчивости, являющийся обобщением [8] запасов устойчивости по фазе и модулю и не связанный с частотами среза.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальными уравнениями

$$d_n(1 + \delta_n)y^{(n)} + d_{n-1}(1 + \delta_{n-1})y^{(n-1)} + \dots + d_1(1 + \delta_1)\dot{y} + y = k_m(1 + \delta_{n+m+1})u^{(m)} + \dots + k_0(1 + \delta_{n+1})u, \quad m < n, \quad (1.1)$$

$$d_{p,n_p}u^{(n_p)} + \dots + d_{p,1}\dot{u} + d_{p,0}uk_{p,m_p}y^{(m_p)} + \dots + k_{p,1}\dot{y} + k_{p,0}y, \quad m_p \leq n_p, \quad (1.2)$$

где $y(t)$ – измеряемый выход объекта (1.1), $u(t)$ – измеряемый выход регулятора (1.2), коэффициенты объекта d_i , k_j , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, m}$, и регулятора $d_{p,i}$, $i = \overline{0, n_p}$, $k_{p,i}$, $i = \overline{0, m_p}$ – заданные числа, δ_i , $i = \overline{1, n + m + 1}$, – неизвестные числа, называемые параметрическими возмущениями, которые удовлетворяют неравенствам

$$|\delta_k| \leq \overline{\delta_k^*}, \quad (k = \overline{1, n + m + 1}), \quad (1.3)$$

где δ_k^* , $k = \overline{1, n + m + 1}$, – заданные числа, являющиеся допусками возможных значений коэффициентов объекта. Числа $2\overline{\delta_k^*}$, $k = \overline{1, n + m + 1}$, – длины интервалов этих коэффициентов.

Преобразуя уравнения (1.1), (1.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, запишем характеристический полином системы

$$d_c(\delta, s) = d(\delta, s)d_p(s) - k(\delta, s)k_p(s), \quad (1.4)$$

где

$$d(\delta, s) = \sum_{i=1}^n d_i(1 + \delta_i)s^i + 1, \quad (1.5)$$

$$k(\delta, s) = \sum_{i=0}^m k_i(1 + \delta_{n+1+i})s^i.$$

$$d_p(s) = \sum_{i=0}^{n_p} d_{p,i}s^i, \quad k_p(s) = \sum_{i=0}^{m_p} k_{p,i}s^i. \quad (1.6)$$

Введем множество A векторов $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_{n+m+1}]$ параметрических возмущений

$$A = \left\{ \delta : |\delta_k| \leq \delta_k^*, k = \overline{1, n+m+1} \right\}. \quad (1.7)$$

Система (1.1), (1.2) называется робастно-устойчивой, если для всех $\delta \in A$ корни $\lambda_i, \dots, i = \overline{1, n+n_p}$, ее характеристического полинома (1.4) имеют отрицательные вещественные части: $\text{Re}\lambda_i < 0, \dots, i \in \overline{1, n+n_p}$. Эта система не обладает робастной устойчивостью, если существует вектор $\delta \in A$, такой, что ее характеристический полином (1.4) имеет хотя бы один чисто мнимый корень

$$\text{Re}\lambda_i = 0, \quad i \in \overline{1, n+n_p}. \quad (1.8)$$

Невозмущенная система — это система (1.1), (1.2), у которой параметрические возмущения отсутствуют: $\delta = 0$. Она записывается как

$$d(s)y = k(s)u, \quad d_p(s)u = k_p(s)y, \quad (1.9)$$

где

$$d(s) = \sum_{i=1}^n d_i s^i + 1, \quad k(s) = \sum_{i=1}^m k_i s^i. \quad (1.10)$$

Будем полагать, что невозмущенная система (1.9) асимптотически устойчива. Передаточная функция невозмущенной системы

$$w(s) = -w_o(s)w_p(s) = -\frac{k(s)k_p(s)}{d(s)d_p(s)}. \quad (1.11)$$

где $w_o(s) = \frac{k(s)}{d(s)}$ — передаточная функция невозмущенного объекта, $w_p(s) = \frac{k_p(s)}{d_p(s)}$ — передаточная функция регулятора.

Показателем чувствительности системы (1.1), (1.2) к параметрическим возмущениям являются запасы устойчивости по фазе и модулю. Радиус запасов устойчивости r обобщает [8] понятия запасов устойчивости по фазе и модулю и определяется как

$$r^2 = \inf_{0 \leq \omega \leq \infty} |1 + w(j\omega)|^2. \quad (1.12)$$

При запасах устойчивости по фазе $\varphi_3 = 42^\circ$ и модулю $L = 1.75$, которые близки к минимально допустимым значениям, величина $r = 0.75$. Если

радиус приближается к нулю, то запасы устойчивости по фазе и модулю стремятся к нулю.

Задача состоит в том, чтобы исследовать зависимость длин интервалов коэффициентов объекта, при которых система не обладает робастной устойчивостью, от величины радиуса запасов устойчивости и показать, что при малых значениях радиуса длины таких интервалов малы. Существо подхода к исследованию состоит в следующем.

Обозначим A_g — множество векторов $\delta \in A$, при которых характеристический полином (1.4) системы (1.1), (1.2) имеет хотя бы один чисто мнимый корень (система (1.1), (1.2) не обладает робастной устойчивостью)

$$A_g = \{ \delta : d_c(\delta, j\omega) = 0, \quad 0 \leq \omega \leq \infty \}. \quad (1.13)$$

Это множество является объединением множеств $\delta \in A$, задаваемых равенством $d_c(\delta, j\omega) = 0$ для каждого фиксированного $\omega \in [0, \infty)$. Выделим из множества A_g подмножество $\delta \in A$, соответствующее

$$\omega = \omega_{ms}, \quad (1.14)$$

где ω_{ms} — частота, при которой расстояние амплитудно-фазовой характеристики невозмущенной системы (1.9), определяемое радиусом запасов устойчивости, от критической точки $(-1, j0)$ является наименьшим. Будем называть частоту $\omega = \omega_{ms}$, при которой правая часть выражения (1.12) достигает нижней грани, частотой максимальной чувствительности системы. Такое название связано с функцией чувствительности системы

$$S(s) = \frac{1}{1 + w(s)}.$$

Нетрудно видеть, что модуль этой функции при $s = \pm j\omega_{ms}$ имеет наибольшее значение. Из определения частоты ω_{ms} следует, что

$$r^2 = |1 + w(j\omega_{ms})|^2. \quad (1.15)$$

Будем полагать, что

$$d(\delta, j\omega_{ms}) \neq 0, \quad d_p(j\omega_{ms}) \neq 0. \quad (1.16)$$

Тогда равенство $d_c(\delta, j\omega_{ms}) = 0$, описывающее множество A_g , можно представить как

$$1 + w(\delta, j\omega_{ms}) = 0, \quad (1.17)$$

где

$$w(\delta, s) = -\frac{k(\delta, s)}{d(\delta, s)} w_p(s) \quad (1.18)$$

Отсюда следуют уравнения

$$\text{Re}w(\delta, j\omega_{ms}) = -1, \quad \text{Im}w(\delta, j\omega_{ms}) = 0, \quad (1.19)$$

которые можно записать как

$$|w(\delta, j\omega_{ms})| = 1, \quad \text{Arg}w(\delta, j\omega_{ms}) = -\pi + 2\pi\nu, \quad (1.20)$$

$$\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти уравнения являются достаточными условиями, при которых система не обладает робастной

устойчивостью. Они дают связь радиуса запасов устойчивости с параметрическими возмущениями.

2. Связь сепаратных возмущений звеньев с частотной характеристикой невозмущенной системы. Левые части уравнений (1.20) выражаются сложными нелинейными функциями параметриче-

ских возмущений, поэтому будем использовать параметрические возмущения элементарных звеньев, которые известным образом связаны с параметрическими возмущениями объекта. В связи с этим запишем передаточную функцию системы как

$$w(\delta, s) = \frac{k(\delta, s)}{d(\delta, s)} w_p(s) = -k_0(1 + c_0) \times \frac{\prod_{i=1}^{\check{n}_1} [\check{T}_i(1 + \check{c}_i)s + 1] \prod_{i=\check{n}_1+1}^{\check{n}_1+\check{n}_2} [T_i^2(1 + \check{c}_i)^2 s^2 + 2\check{T}_i\check{\xi}_i(1 + \check{c}_i)(1 + \check{c}_{n_2+i})s + 1]}{\prod_{i=1}^{n_1} [T_i(1 + c_i)s + 1] \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} [T_i^2(1 + c_i)^2 s^2 + 2T_i^2\xi_i(1 + c_i)(1 + c_{n_2+i})s + 1]} w_p(s), \quad (2.1)$$

где $T_i, c_i, i = \overline{1, n_1}$ – постоянные времена и параметрические возмущения апериодических звеньев соответственно, $T_i, \xi_i, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$, – постоянные времена и декременты затухания ($|\xi_i| < 1$) колебательных звеньев, $(n_1 + 2n_2 = n)$, $c_i, c_{n_2+i}, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$, – параметрические возмущения этих звеньев, $\check{T}_i, \check{c}_i, (i = \overline{1, \check{n}_1})$, – постоянные времена и параметрические возмущения дифференцируемых звеньев первого порядка, $\check{T}_i, \check{\xi}_i, i = \overline{\check{n}_1 + 1, \check{n}_1 + \check{n}_2}$, – постоянные времена и декременты затухания ($|\check{\xi}_i| < 1$), дифференцирующих звеньев второго порядка, $(\check{n}_1 + 2\check{n}_2 = m)$, $\check{c}_i, \check{c}_{\check{n}_2+i}, i = \overline{\check{n}_1 + 1, \check{n}_1 + \check{n}_2}$, – их параметрические возмущения, k_0 – коэффициент усиления (передачи) системы, c_0 – его параметрическое возмущение. Далее, для простоты, не рассматриваются возмущения дифференцирующих звеньев: $\check{c}_i, \check{c}_{\check{n}_2+i} = 0, (i = \overline{1, \check{n}_1 + \check{n}_2})$.

Введем векторы

$$c_{[i]} = [c_0, 0 \dots 0, c_i, 0 \dots 0], \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

которые описывают возмущения усилительного и i -го, $i = \overline{1, n_1}$, апериодического звеньев, либо усилительного и $n_1 + i$ -го, $i = \overline{1, n_2}$, колебательного звеньев. При этом возмущения постоянной времени и декремента затухания колебательного звена предполагаются независимыми. Векторы (2.2) будем называть *сепаратными возмущениями звеньев*.

Постоянные времена, декременты затухания и коэффициент k_0 находятся по известным коэффициентам полиномов $d(s)$ и $k(s)$, а вектор δ параметрических возмущений коэффициентов объек-

та выражается через сепаратные возмущения звеньев как

$$\delta_k^{(i)} = \beta_k^{(i)} c_i \quad (i = \overline{1, n_1}),$$

$$\delta_k^{(i)} = \beta_k^{(i)} c_i + \beta_k^{(ii)} c_i^2 \quad (i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}), \quad k = \overline{1, n} \quad (2.3)$$

$$\delta_k^{(i)} = \beta_k^{(i)} c_i \quad (i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n_1 + 2n_2}), \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$\delta_{n+k}^{(i)} = c_{0,i} \quad (i = \overline{1, n + m}), \quad k = \overline{1, m + 1},$$

где βc соответствующими индексами – известные числа, определяемые коэффициентами невозмущенного объекта, которые получаются в результате сравнения полиномов $d(\delta, s)$ и $k(\delta, s)$ с полиномами числителя и знаменателя передаточной функции в правой части выражения (2.1)

Используя мнимую и вещественную составляющие частотной характеристики невозмущенной системы $\text{Im}w(j\omega_{ms})$ и $\text{Re}w(j\omega_{ms})$, найдем значение тангенса фазочастотной и величину амплитудно-частотной характеристик на частоте максимальной чувствительности

$$\varphi_m = \frac{\text{Im}w(j\omega_{ms})}{\text{Re}w(j\omega_{ms})}, \quad (2.4)$$

$$a_m = \sqrt{\text{Im}^2 w(j\omega_{ms}) + \text{Re}^2 w(j\omega_{ms})}.$$

Для краткости обозначим $T_i \omega_{ms} = q_i, i = \overline{1, n_1 + n_2}$.

У т в е р ж д е н и е 1. Параметрические возмущения коэффициента усиления и постоянной времени любого апериодического звена, приводящие к потере системой (1.1) (1.2) асимптотической устойчивости (к отсутствию робастной устойчивости), имеют вид

$$c_i = \frac{(1 + q_i^2)\varphi_m}{q_i(1 - q_i\varphi_m)}, \quad c_{0,i} = \sqrt{1 + p_i} a_m - 1,$$

$$p_i = \frac{(2c_i + c_i^2)q_i^2}{1 + q_i^2}, \quad i \in \overline{1, n_1}. \quad (2.5)$$

Доказательство этого и последующих утверждений приведено в Приложении.

Утверждение 2. Параметрические возмущения коэффициента усиления и постоянной

времени любого колебательного звена, когда система (1.1), (1.2) теряет асимптотическую устойчивость (не является робастно устойчивой), выражаются как

$$c_i = \frac{-2[(1+q_i^2)q_i\xi_i + q_i^2(1-q_i^2)\varphi_m - 2q_i^2\xi_i^2\varphi_m]}{2q_i^2[2q_i\xi_i + (1-q_i^2)\varphi_m]} + \sqrt{\frac{4(1+q_i^2)q_i\xi_i + q_i^2(1-q_i^2)\varphi_m - 2q_i^2\xi_i^2\varphi_m}{2q_i^2[2q_i\xi_i + (1-q_i^2)\varphi_m]} + 4q_i^2[2q_i\xi_i + (1-q_i^2)\varphi_m][(1-q_i^2)^2\varphi_m + 4q_i^2\xi_i^2\varphi_m]}}{2q_i^2[2q_i\xi_i + (1-q_i^2)\varphi_m]}, \quad (2.6)$$

$$c_{0,i} = \sqrt{1+p_i a_m} - 1, \quad p_i = \frac{[-2(1-q_i^2)q_i^2 + q_i^4(2c_i + c_i^2) + 4q_i^2\xi_i^2]}{(1-q_i^2)^2 + 4q_i^2\xi_i^2} (2c_i + c_i^2) \quad (2.7)$$

$(i \in \overline{n_1 + 1}, n_1 + n_2).$

Утверждение 3. Параметрические возмущения коэффициента усиления и декремента затухания любого колебательного звена, при которых система (1.1), (1.2) не обладает робастной устойчивостью, имеют вид

$$c_{n_2+i} = \frac{(1-q_i^2)^2 + 4q_i^2\xi_i^2}{2q_i\xi_i[1-q_i^2 - 2q_i\xi_i\varphi_m]} \varphi_m, \quad c_{0,n_2+i} = \frac{\sqrt{1+p_{n_2+i}}}{a_m} - 1, \quad (2.8)$$

$$p_{n_2+i} = \frac{4q_i^2\xi_i^2[2c_{n_2+i} + (c_{n_2+i})^2]}{(1-q_i^2)^2 + 4q_i^2\xi_i^2}, \quad (i \in \overline{n_1 + 1}, n_1 + n_2).$$

Подытожим изложенное в форме процедуры проверки выполнения достаточных условий потери робастной устойчивости:

1. Используя передаточную функцию невозмущенной системы, вычислим радиус запасов устойчивости, частоту максимальной чувствительности ω_{ms} и числа φ_m и a_m .

2. Найдем по формулам (2.5)–(2.8) параметрические возмущения звеньев.

3. Сформируем на основе (2.3) векторы параметрических возмущений коэффициентов объекта и проверим выполнение неравенств

$$|\delta_k^{(i)}| \leq \delta_k^* \quad (i = \overline{1, n}), \quad k = \overline{1, n+m+1}. \quad (2.9)$$

Если для некоторого $i, i \in \overline{1, n}$, эти неравенства выполняются, то система не является робастно устойчивой.

3. Непрерывная зависимость параметрических возмущений, при которых система не обладает робастной устойчивостью, от радиуса запасов устойчивости.

Параметрические возмущения звеньев (2.5)–(2.8), вызывающих утрату системой робастной устойчивости, зависят от значений φ_m и a_m тангенса фазочастотной и амплитудно-частотной характеристик невозмущенной системы на частоте максимальной чувствительности ω_{ms} . Чтобы найти зависимость этих возмущений от радиуса запасов устойчивости, достаточно связать числа φ_m и a_m с радиусом запасов устойчивости. Эта связь имеет вид

$$\varphi_m = \frac{r\rho}{-1+r\sqrt{1-\rho^2}}, \quad (3.1)$$

$$a_m = \sqrt{1-2r\sqrt{1-\rho^2}+r^2}, \quad (3.2)$$

где $|\rho| \leq 1$.

Действительно, рассмотрим годограф амплитудно-фазовой характеристики системы, показанный на рис. 1

Из треугольника с вершинами $0, \omega_{ms}, (-1, j0)$ следуют выражения

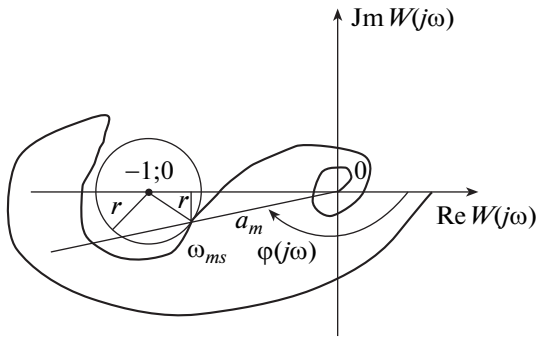
$$\begin{aligned} \operatorname{Im}w(j\omega_{ms}) &= r \sin \gamma, \\ \operatorname{Re}w(j\omega_{ms}) &= -1 + r \cos \gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

и таким образом,

$$\varphi_m = \frac{\operatorname{Im}w(j\omega_{ms})}{\operatorname{Re}w(j\omega_{ms})} = \frac{r \sin \gamma}{-1 + r \cos \gamma}. \quad (3.4)$$

Аналогично

$$a_m = \sqrt{w(j\omega_{ms})^2 + w(j\omega_{ms})} = \sqrt{(r \sin \gamma)^2 + (-1 + r \cos \gamma)^2}. \quad (3.5)$$



Рисунок

Обозначая $\rho = \sin \gamma$, получим выражения (2.4) и (3.2).

Утверждение 4. Возмущения звеньев, при которых система (1.1), (1.2) не обладает робастной устойчивостью, являются следующими функциями радиуса запасов устойчивости:

$$c_i = -\rho m_i r + 0_i^c(r), \quad c_{0,i} = m_{0,i} r + 0_{0,i}^c(r), \quad (3.6)$$

$$i \in \overline{1, n_1 + 2n_2},$$

где $0_i^c(r)$ $0_{0,i}^c(r)$ – функции, исчезающие вместе с r так, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{0_i^c(r)}{r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{0_{0,i}^c(r)}{r} = 0, \quad i \in \overline{1, n_1 + 2n_2}, \quad (3.7)$$

а m_i $m_{0,i}$ – масштабы радиуса запасов, которые имеют вид:

а) для апериодических звеньев

$$m_i = \frac{(1 + q_i^2)}{q_i}, \quad m_{0,i} = -\frac{q_i^2}{1 + q_i^2} \rho m_i + \sqrt{1 - \rho^2}, \quad (3.8)$$

$$i \in \overline{1, n_1};$$

б) для постоянных времени колебательных звеньев

$$m_i = \frac{(1 - q_i^2)^2 + 4q_i^2 \xi_i^2}{2(1 + q_i^2)q_i \xi_i},$$

$$m_{0,i} = -\frac{-2(1 - q_i^2)q_i^2 + 4q_i^2 \xi_i^2}{(1 - q_i^2)^2 + 4q_i^2 \xi_i^2} \rho m_i + \sqrt{1 - \rho^2}, \quad (3.9)$$

$$(i \in \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2});$$

с) для декрементов затухания колебательных звеньев

$$m_{n_2+i} = \frac{(1 - q_i^2)^2 + 4q_i^2 \xi_i^2}{2q_i \xi_i [1 - q_i^2]},$$

$$m_{0, n_2+i} = -\frac{4q_i^2 \xi_i^2}{(1 - q_i^2)^2 + 4q_i^2 \xi_i^2} \rho m_{n_2+i} + \sqrt{1 - \rho^2}, \quad (3.10)$$

$$i \in \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}.$$

Используя это утверждение, подставим приведенные выше зависимости возмущений звеньев от радиуса запасов устойчивости в соотношения (2.3) для возмущений коэффициентов объекта.

Утверждение 5. Возмущения коэффициентов объекта, при которых система (1.1), (1.2) не является робастно устойчивой, связаны с радиусом запасов устойчивости соотношениями

$$\delta_k^{(i)} = \mu_k^{(i)} r + 0_i^{\delta}(r), \quad k, i = \overline{1, n}, \quad (3.11)$$

$$\delta_{n+k}^{(i)} = \mu_{0,i} r + 0_{0,i}^{\delta}(r), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m+1},$$

где $\mu_k^{(i)} = \rho \beta_k^{(i)} m_i, \dots \mu_{0,i} = \rho m_{0,i}, i = \overline{1, n}, \beta_k^{(i)}$ – известные числа, определяемые по постоянным времени невозмущенного объекта, $0_i^{\delta}(r)$ $0_{0,i}^{\delta}(r)$ – функции, исчезающие вместе с r так, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{0_i^{\delta}(r)}{r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{0_{0,i}^{\delta}(r)}{r} = 0, \quad i \in \overline{1, n}. \quad (3.12)$$

Учитывая, что $|\rho| \leq 1$, заключаем на основе утверждения 5 следующее.

Утверждение 6. Для любого заданного вектора δ^* границ возможных возмущений коэффициентов объекта (как бы малы не были его компоненты) всегда найдется радиус запасов устойчивости, такой, что система (1.1), (1.2) не является робастно устойчивой.

Заметим, что из выражения (3.8) следует, что масштабы радиуса запасов устойчивости для апериодических звеньев достигают по модулю минимума $m_i/2, i = \overline{1, n_1}$, когда

$$q_i = 1, \quad i = \overline{1, n_1}. \quad (3.13)$$

При такой величине q_i модуль масштабов радиуса запасов устойчивости для колебательных звеньев принимает, как следует из (3.9), значение

$$m_i = \xi_i, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}. \quad (3.14)$$

4. Пример. Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$d_3(1 + \delta_3)y + d_2(1 + \delta_2)\dot{y} + d_1(1 + \delta_1)\ddot{y} + y = k_1(1 + \delta_5)\dot{u} + k_0(1 + \delta_4), \quad (4.1)$$

где

$$d_3 = 0,1, \quad d_2 = 1,52, \quad d_1 = 5,3, \quad (4.2)$$

$$k_1 = -0,4, \quad k_0 = 1,$$

а

$$|\delta_i| \leq 0,05, \quad i = \overline{1,5}, \quad (4.3)$$

Передаточная функция невозмущенного объекта

$$w_0(s) = \frac{(T_4 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad (4.4)$$

где

$$T_1 = 5, \quad T_2 = 0,2, \quad T_3 = 0,1, \quad T_4 = -0,4. \quad (4.5)$$

Регулятор объекта (4.1) представлен уравнением

$$d_{p,2}\ddot{u} + d_{p,1}\dot{u} + d_{p,0}u = k_{p,2}\ddot{y} + k_{p,1}\dot{y} + k_{p,0}y, \quad (4.6)$$

Возьмем два набора его коэффициентов, при каждом из которых система имеет различные значения радиуса запасов устойчивости. Для полученных таким образом систем найдем возмущения коэффициентов объекта, используя процедуру разд. 3.

Первый регулятор имеет коэффициенты

$$\begin{aligned} d_{p,2} &= 0,16, & d_{p,1} &= 0,67, & d_{p,0} &= 1, \\ k_{p,2} &= -0,032, & k_{p,1} &= -0,48 & k_{p,0} &= -1,6. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Система с этим регулятором обладает следующими свойствами. Ее радиус запасов устойчивости и частота максимальной чувствительности

$$r = 0,77, \quad \omega_{ms} = 1,19, \quad (4.8)$$

а граничные возмущения коэффициентов объекта при сепаратных возмущениях каждого из трех

апериодических звеньев передаточной функции объекта имеют следующие значения.

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= [-1,52 \quad -1,5 \quad -1,44 \quad 1,07 \quad 1,07], \\ \delta^{(2)} &= [2,55 \quad 1,7 \quad 0,096 \quad 3,85 \quad 3,85], \\ \delta^{(3)} &= [4,58 \quad 1,56 \quad 0,086 \quad 3,54 \quad 3,54]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Второй регулятор содержит коэффициенты

$$\begin{aligned} d_{p,2} &= 4,2 \times 10^{-5}, & d_{p,1} &= 3,3 \times 10^{-3}, \\ d_{p,0} &= 1, & k_{p,2} &= -0,22, & k_{p,1} &= -3,39 \\ & & k_{p,0} &= -9,23. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Система с этим регулятором характеризуется значениями:

$$r = 0,073, \quad \omega_{ms} = 28,6, \quad (4.11)$$

а граничные возмущения коэффициентов объекта составляют

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= [-0,61 \quad -0,606 \quad -0,579 \quad -0,58 \quad -0,58], \\ \delta^{(2)} &= [-0,061 \quad -0,041 \quad -0,0023 \quad 0,014 \quad 0,014], \\ \delta^{(3)} &= [-0,034 \quad -0,011 \quad -0,00065 \quad 0,0455 \quad 0,0455]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Последний вектор означает, что второй регулятор не обеспечивает робастной устойчивости системы.

Заключение. В результате проведенных исследований получены достаточные условия (утверждения 1–3) потери устойчивости при параметрических возмущениях. Предложена процедура проверки выполнения этих достаточных условий и представлен пример ее применения. Доказан (утверждения 4–6) интуитивно понятный факт, что при малых запасах устойчивости малы интервалы коэффициентов объекта, при которых система устойчива.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для удобства доказательства утверждений 1–4 рассмотрим общий случай, когда параметрические возмущения звеньев не сепаратны (могут присутствовать одновременно), а частота в достаточных условиях (1.20) пробегает все значения $\omega \in [0, \infty)$.

Утверждение 7. Система (1.1), (1.2) не обладает робастной устойчивостью, если для некоторых $\omega \in [0, \infty)$ и целого числа ν существует вектор $c = [c_0, c_1, \dots, c_{n_1+2n_2}, \check{c}_1, \dots, \check{c}_{\check{n}_1+2\check{n}_2}]$ параметрических возмущений звеньев, такой, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} & \lg \frac{k_0^2(1+c_0)^2}{k_0^2} - \sum_{i=1}^{n_1} \lg \frac{T_i^2 \omega^2 (1+c_i)^2 + 1}{T_i^2 \omega^2 + 1} + \sum_{i=1}^{\check{n}_1} \lg \frac{\check{T}_i^2 \omega^2 (1+\check{c}_i)^2 + 1}{\check{T}_i^2 \omega^2 + 1} - \\ & - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \lg \frac{[1 - T_i^2 \omega^2 (1+c_i)^2]^2 + 4 T_i^2 \omega^2 \xi_i^2 (1+c_i)^2 (1+c_{n_2+i})^2}{[1 - T_i^2 \omega^2]^2 + 4 T_i^2 \omega^2 \xi_i^2} + \\ & + \sum_{i=\check{n}_1+1}^{\check{n}_1+\check{n}_2} \lg \frac{[1 - \check{T}_i^2 \omega^2 (1+\check{c}_i)^2]^2 + 4 \check{T}_i^2 \omega^2 \check{\xi}_i^2 (1+\check{c}_i)^2 (1+\check{c}_{\check{n}_2+i})^2}{[1 - \check{T}_i^2 \omega^2]^2 + 4 \check{T}_i^2 \omega^2 \check{\xi}_i^2} = -\lg a^2(\omega); \end{aligned} \quad (П.1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1} \operatorname{arctg} \frac{T_i \omega c_i}{1 + (1 + c_i) T_i^2 \omega^2} - \sum_{i=1}^{\check{n}_1} \operatorname{arctg} \frac{\check{T}_i \omega \check{c}_i}{1 + (1 + \check{c}_i) \check{T}_i^2 \omega} + \\ & + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \operatorname{arctg} \frac{2 T_i \omega \xi_i [(1 - T_i^2 \omega^2)(1 + c_i)(1 + c_{n_2+i}) - 1 + T_i^2 \omega^2 (1 + c_i)^2]}{(1 - T_i^2 \omega^2)[1 - T_i^2 \omega^2 (1 + c_i)^2] + 4 T_i^2 \omega^2 \xi_i^2 (1 + c_i)(1 + c_{n_2+i})} - \\ & - \sum_{i=\check{n}_1+1}^{\check{n}_1+\check{n}_2} \operatorname{arctg} \frac{2 \check{T}_i \omega \check{\xi}_i [(1 - \check{T}_i^2 \omega^2)(1 + \check{c}_i)(1 + \check{c}_{n_2+i}) - 1] + \check{T}_i^2 \omega^2 (1 + \check{c}_i)^2}{(1 - \check{T}_i^2 \omega^2)[1 - \check{T}_i^2 \omega^2 (1 + \check{c}_i)^2] + 4 \check{T}_i^2 \omega^2 \check{\xi}_i^2 (1 + \check{c}_i)(1 + \check{c}_{n_2+i})} = \\ & = \pi - 2\pi v + 2\pi v^* + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} w(j\omega)}{\operatorname{Re} w(j\omega)}, \end{aligned} \tag{П.2}$$

где $a(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика невозмущенной системы: $a(\omega) = |w(j\omega)|$ а $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} w(j\omega)}{\operatorname{Re} w(j\omega)}$ – фазочастотная характеристика этой системы, которая определена с точностью

до числа $2\pi v^*$, где v^* – известное значение, $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Доказательство утверждения 7. Передаточной функции (2.1) соответствуют следующие амплитудно-частотная $a(c, \omega)$ и фазочастотная $\varphi(c, \omega)$ характеристики

$$\begin{aligned} a^2(c, \omega) &= |w(c, j\omega)|^2 = k_0^2 (1 + c_0)^2 \times \\ & \times \frac{\prod_{i=1}^{\check{n}_1} [\check{T}_i^2 \omega^2 (1 + \check{c}_i)^2 + 1] \prod_{i=\check{n}_1+1}^{\check{n}_1+\check{n}_2} [(1 - \check{T}_i^2 \omega^2 (1 + \check{c}_i)^2)^2 + 4 \check{T}_i^2 \omega^2 \check{\xi}_i^2 (1 + \check{c}_i)^2 (1 + \check{c}_{n_2+i})^2]}{\prod_{i=1}^{n_1} [T_i^2 \omega^2 (1 + c_i)^2 + 1] \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} [(1 - T_i^2 \omega^2 (1 + c_i)^2)^2 + 4 T_i^2 \omega^2 \xi_i^2 (1 + c_i)^2 (1 + c_{n_2+i})^2]} |w_p(j\omega)|^2; \end{aligned} \tag{П.3}$$

$$\begin{aligned} \varphi(c, \omega) &= \arg w(c, \omega) = - \sum_{i=1}^{n_1} \operatorname{arctg} T_i \pi (1 + c_i) + \sum_{i=1}^{\check{n}_1} \operatorname{arctg} \check{T}_i \omega (1 + \check{c}_i) - \\ & - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \operatorname{arctg} \frac{2 T_i \xi_i \omega (1 + c_i)(1 + c_{n_2+i})}{1 - T_i^2 \omega^2 (1 + c_i)^2} + \sum_{i=\check{n}_1+1}^{\check{n}_1+\check{n}_2} \operatorname{arctg} \frac{2 \check{T}_i \check{\xi}_i \omega (1 + \check{c}_i)(1 + \check{c}_{n_2+i})}{1 + \check{T}_i^2 \omega^2 (1 + \check{c}_i)^2} + \arg w_p(j\omega). \end{aligned} \tag{П.4}$$

Частотные характеристики невозмущенной системы $a^2(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ определяются этими выражениями при $c = 0$:

$$a^2(\omega) = a_0^2(\omega) a_p^2(\omega), \tag{П.5}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{Arg} w(j\omega) = \arg w(j\omega) + 2\pi v^*,$$

где $a_0^2(\omega) = |w_0(j\omega)|^2$, $a_p^2(\omega) = |w_p(j\omega)|^2$, v^* – известное число, определяемое как наименьшее целое отношения

$$\frac{\varphi(\omega)}{2\pi}, \quad \arg w(j\omega) = \operatorname{arctg} w(j\omega) w(j\omega).$$

Достаточные условия (1.20) записываются при параметрических возмущениях звеньев как

$$a^2(c, \omega) = 1, \quad \varphi(c, \omega) = -\pi + 2\pi v, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{П.6}$$

Разделим обе части первого из этих уравнений на $a^2(\omega)$ и после логарифмирования получим уравнение (П.1). Переходя к выражению (П.2), получим (опуская нижние индексы) на основе (П.4) для аperiodических звеньев

$$\operatorname{arctg} T\omega(1 + c) = \operatorname{arctg} T\omega + \operatorname{arctg} \alpha_3, \tag{П.7}$$

где $\alpha_3 = \frac{T\omega c}{1 + (1 + c)T^2\omega^2}$. Это выражение следует из тригонометрической формулы $\operatorname{arctg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{arctg} \alpha_1 + \operatorname{arctg} \alpha_3$ где

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1}.$$

Для колебательных звеньев используем формулу $\operatorname{arctg} \rho_1 = \operatorname{arctg} \rho_2 + \operatorname{arctg} \rho_3$, где

$$\rho_3 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{1 + \rho_1 \rho_2},$$

в результате имеем выражение

$$\operatorname{arctg} \frac{2T\xi\omega(1+c)(1+c_{n_2})}{1-T^2\omega^2(1+c)^2} = \operatorname{arctg} \frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2} + \operatorname{arctg} \rho_3,$$

где

$$\rho_3 = \frac{2T\omega\xi[(1-T^2\omega^2)(1+c)(1+c_{n_2}) - 1 + T^2\omega^2(1+c)^2]}{(1-T_i^2\omega^2)[1-T^2\omega^2(1+c)^2] + 4T^2\omega^2\xi^2(1+c)(1+c_{n_2})}$$

Составив разность $\varphi(\omega) - \varphi(c, \omega)$, приходим к формуле (П.2).

Доказательство утверждения 1. Тангенсы обеих частей равенств (П.2) приводят, если положить параметрические возмущения всех звеньев равными нулю, кроме i -го, $i \in \overline{1, n}$, и опустить нижний индексы, к уравнению

$$\frac{qc}{1+(1+c)q^2} = \varphi_m, \quad (\text{П.8})$$

из которого следует искомое

$$c = \frac{(1+q^2)\varphi_m}{(1-q\varphi_m)q}. \quad (\text{П.9})$$

Запишем уравнение (П.1) как

$$\frac{(1+c_0)^2(1+q^2)}{1+(1+c)^2q^2} = \frac{1}{a_m^2}. \quad (\text{П.10})$$

Из этого уравнения имеем

$$\begin{aligned} (1+c_0)^2 &= \frac{1+q^2+(2c+c^2)q^2}{(1+q^2)a_m^2} \\ &= \frac{1}{a_m^2} + \frac{(2c+c^2)q^2}{(1+q^2)a_m^2} = \frac{1+p}{a_m^2}, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где

$$p = \frac{(2c+c^2)q^2}{1+q^2}. \quad (\text{П.12})$$

Из последнего равенства получим вторые выражения утверждения.

Доказательство утверждения 2. Из (П.2) выводится аналогичное (П.8) уравнение

$$\frac{2q\xi[(1-q^2)(1+c)-1+q^2(1+c)^2]}{(1-q^2)[1-q^2(1+c)^2]+4q^2\xi^2(1+c)} = \varphi_m. \quad (\text{П.13})$$

Отсюда запишем уравнение относительно неизвестной $(1+c)$

$$\begin{aligned} &q^2[2q\xi+(1-q^2)\varphi_m](1+c)^2 + \\ &+ 2[(1-q^2)q\xi-2q^2\xi^2\varphi_m](1+c) - \\ &- [2q\xi+(1-q^2)\varphi_m] = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

После несложных преобразований получим уравнения для определения параметрического возмущения c

$$\begin{aligned} &q^2[2q\xi+(1-q^2)\varphi_m]c^2 + \\ &+ 2[(1+q^2)q\xi+q^2(1-q^2)\varphi_m-2q^2\xi^2\varphi_m]c - \\ &- [(1-q^2)^2\varphi_m+4q^2\xi^2\varphi_m] = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Это уравнение имеет два решения. Наименьшее из них дает первую формулу утверждения.

Запишем на основе (П.1) уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{(1+c_0)^2a_m^2}{1+\frac{-2(1-q^2)q^2+q^4(2c+c^2)+4q^2\xi^2}{(1-q^2)^2+4q^2\xi^2}(2c+c^2)} = \\ &= (1+c_0)^2a_m^2(1+p) = 1, \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

где

$$p = \frac{-2(1-q^2)q^2+q^4(2c+c^2)+4q^2\xi^2}{(1-q^2)^2+4q^2\xi^2}(2c+c^2), \quad (\text{П.17})$$

решение которого относительно c_0 дает вторую формулу утверждения.

Доказательство утверждения 3. Из (П.8) следует аналогичное (4.20) уравнение

$$\frac{2q\xi[(1-q^2)(1+c_{n_2})-1+q^2]}{(1-q^2)^2+4q^2\xi^2(1+c_{n_2})} = \varphi_m, \quad (\text{П.18})$$

решение которого порождает первые формулы выражений (2.8).

Уравнение (П.1) дает соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{(1+c_0)^2[(1-q^2)^2+4q^2\xi^2]a_m^2}{(1-q^2)^2+4q^2\xi^2(1+c_{n_2})^2} = \\ &= \frac{(1+c_0)^2a_m^2}{4q^2\xi^2[2c_{n_2}+(c_{n_2})^2]} = \frac{(1+c_0)^2a_m^2}{1+p_{n_2}} = 1, \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

где

$$p_{n_2} = \frac{4q^2\xi^2[2c_{n_2}+(c_{n_2})^2]}{(1-q^2)^2+4q^2\xi^2}, \quad (\text{П.20})$$

приводящие к вторым формулам утверждения.

Доказательство утверждения 4. Разобьем его на несколько частей.

1. Предварительные сведения Доказательство основано на разложении функций (2.5)–(2.8) в ряды по параметру φ_m и последующем использовании зависимости (3.4) этого параметра от радиуса r . Приведем два известных ряда, рассматриваемых далее

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots; \quad (\text{П.21})$$

$$\sqrt{1+x} = 1+12x-18x^2+116x^3-\dots \quad (\text{П.22})$$

Область сходимости этих рядов: $|x| < 1$. Кроме того, для доказательства выражений (3.9) будет применяться решение квадратного уравнения

$$lx^2 + bx + g = 0 \tag{П.23}$$

при $l \rightarrow 0$. Чтобы найти такое решение, представим его в виде $x = -\frac{g}{b} + z$, где z находится из уравнения

$$z^2 + \left(\frac{b}{l} - \frac{2g}{b}\right)z + g^2b^2 = 0, \tag{П.24}$$

решение которого имеет с учетом (П.22) и условия $\left|\frac{4lg}{b^2}\right| < 1$ вид

$$z = -\left(\frac{b}{2l} - \frac{g}{b}\right) + \frac{b}{2l}\sqrt{1 - \frac{4lg}{b^2}} = -\left(\frac{b}{2l} - \frac{g}{b}\right) + \frac{b}{2l}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{4lg}{b^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{4lg}{b^2}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{4lg}{b^2}\right)^3 - \dots\right] = -\frac{lg^2}{b^3} - 2\frac{l^2g^3}{b^5} - \dots \tag{П.25}$$

(знак “+” перед квадратными скобками соответствует наименьшему из двух значений z) и, следовательно,

$$x = -\frac{g}{b} - \frac{lg^2}{b^3} - 2\frac{l^2g^3}{b^5} - \dots \tag{П.26}$$

2. *Аперриодические звенья.* Рассмотрим выражения (2.5), первые из которых запишем как $c = m(\varphi_m)\varphi_m$, где

$$m(\varphi_m) = \frac{(1+q^2)}{q(1-q\varphi_m)}. \tag{П.27}$$

Используя ряд (П.21), получим при $|q\varphi_m| < 1$

$$m(\varphi_m) = (1+q^2)q\left[1 + q\varphi_m + (q\varphi_m)^2 - (q\varphi_m)^3 + \dots\right] = m + 0_1(\varphi_m), \tag{П.28}$$

где

$$m = \frac{(1+q^2)}{q}, \tag{П.29}$$

$0_1(\varphi_m)$ – функция, исчезающая вместе с φ_m : $\lim_{\varphi_m \rightarrow 0} 0_1(\varphi_m) = 0$. Аналогично выразим зависимость (3.4) как

$$\varphi_m = -r \sin \gamma [1 + r \cos \gamma + \dots] = -r\rho + 0_2(r), \tag{П.30}$$

где $0_2(r)$ – функция, исчезающая вместе с r : $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{0_2(r)}{r} = 0$. Из выражений (П.28) и (П.30) следуют первые соотношения (3.6) и (3.8) утверждения. Обозначим

$$\eta = -r^2 + 2r\sqrt{1-\rho^2}. \tag{П.31}$$

Тогда вторые выражения (2.5) принимают вид

$$c_0 = \frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{1-\eta}} - 1 = \left[1 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{8}p^2 + \dots\right] \times \left[1 + \frac{1}{2}\eta + \frac{3}{8}\eta^2 + \dots\right] - 1 = p + \frac{1}{2}\eta + \left(-\frac{1}{8}p^2 + \frac{3}{8}\eta^2 + \frac{1}{4}p\eta\right) + \dots \tag{П.32}$$

Отсюда, учитывая (П.12), (П.30) и (П.31), следуют вторые соотношения (3.8) и (3.6) утверждения.

3. *Колебательные звенья (возмущения постоянных времени).* Будем искать решение уравнения (П.15) в виде $s\bar{m}\varphi_m$. После сокращения на φ_m приходим к уравнению вида (П.23): $l\bar{m}^2 + b\bar{m} + g = 0$, где $l = q^2[2q\xi\varphi_m^2 + (1-q^2)\varphi_m]$,

$$b = 2[(1+q^2)q\xi + q^2(1-q^2)\varphi_m - 2q^2\xi^2\varphi_m],$$

$$g = -[(1-q^2)^2 + 4q^2\xi^2].$$

Используя ряд (П.21) при $\left|\frac{q^2(1-q^2) - 2q^2\xi^2}{(1+q^2)q\xi}\varphi_m\right| < 1$, получим на основе (П.26)

$$\bar{m} = -\frac{g}{b} - \frac{lg^2}{b^3} - \dots = \frac{(1-q^2)^2 + 4q^2\xi^2}{2[(1+q^2)q\xi + q^2(1-q^2)\varphi_m - 2q^2\xi^2\varphi_m]} - \frac{q^2[2q\xi\varphi_m + (1-q)\varphi_m]g^2}{b^3}\varphi_m = m + 0_3(\varphi_m), \tag{П.33}$$

где

$$m = \frac{(1-q^2)^2 + 4q^2\xi^2}{2(1+q^2)q\xi}, \tag{П.34}$$

$0_3(\varphi_m)$ – функция, исчезающая вместе с φ_m : $\lim_{\varphi_m \rightarrow 0} 0_3(\varphi_m) = 0$, и таким образом, имеем первые из выражений (3.6), (3.9) утверждения. Вторые из соотношений утверждения следуют из соотношений (П.17), (П.30)–(П.32).

4. *Колебательные звенья (возмущения декрементов затухания).* Рассмотрим выражения (2.8), первые из которых представим как $c_{n_2} = m(\varphi_m)\varphi_m$, где

$$m(\varphi_m) = \frac{(1-q^2)^2 + 4q^2\xi^2}{2q\xi[1-q^2-2q\xi\varphi_m]}, \tag{П.35}$$

Привлекая ряд (П.21) при $\left|\frac{2q\varphi_m\xi}{1-q^2}\right| < 1$, получим первые из выражений (3.6), (3.10) утверждения, а формулы (П.20), (П.30)–(П.32) и (П.35) дают вторые выражения утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nyquist R.* Reperation theory // Bell Syst. Tech. J. 1932. V. 11. P. 126–147.
2. *Бодe Г.* Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М: Изд-во иностр. лит., 1948.
3. *Ольденбургер Р.* Изображение частотных характеристик, стандарты и расчетные критерии // Частотные методы в автоматике. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
4. Основы теории автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. М: Машгиз, 1954.
5. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
6. *Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H.* Robust Control. The Parametric Approach. Prentice Hall, 1995.
7. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986. 272 с.
8. *Александров А.Г.* Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления // АиТ. 2007. № 8. С. 4–20.