Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Лаборатория адаптивных и робастных систем

Руководство пользователя пакета «Автоматика»

Москва, г. 2011

Введение

Работа реальных систем управления характеризуется показателями качества: установившаяся ошибка, время регулирования, перерегулирование по каждой регулируемой переменной.
Синтез регуляторов по этим показателям затруднен, из-за неопределенности границ внешнего возмущения и неизвестных коэффициентов объекта, которые могут менять свои значения. Это свойство объекта описывается с помощью модели многорежимного объекта.
Пакет «Автоматика» предназначен для синтеза регуляторов при таких условиях. Он ориентирован на две группы пользователей. Первая группа — это исследователи, хорошо знающие теорию управления и проблемы управления в конкретной предметной области. Исследователи создают программы для решения реальных задач (далее такие программы будем называть «директивы»). Директива представляет собой программу, состоящую из трех частей: программное обеспечение для пользовательского интерфейса, вычислительная часть и средства вывода промежуточных и окончательных результатов. Каждая директива решает определенный класс задач построения законов управления.
Вторая группа пользователей — инженеры-разработчики систем автоматического управления. Цели этой группы и ограниченное время на разработку систем управления исключают возможность их участия в создании программного обеспечения для решения их задач. Кроме того необходимость глубоких знаний теории управления также является препятствием для участия в разработке директив. Инженер выбирает директиву, которая решает его задачу из списка директив пакета и вводит описание задачи. Решение задачи выполняется автоматически. Проанализировав результаты, он принимает решение о приемлемости разработанного регулятора.
Пакет «Автоматика» содержит 3 группы директив: синтез регуляторов, конечно-частотная идентификация, частотное адаптивное управление. Этот пакет является расширением ранее разработанного программного обеспечения. Директивы пакета GAMMA-1PC [1] для синтеза регуляторов многомерных систем были написаны на FORTRAN. Теперь они разработаны в среде MATLAB [2]. Пакет ADAPLAB-3 [3] улучшен возможностью самонастройки тестового сигнала. Это очень важная модификация. Суть заключается в том, что базой для адаптивного управления является метод конечно-частотной идентификации [4]. Этот метод использует тестовый сигнал, в котором число гармоник не превышает порядка объекта. Определение амплитуд и частот тестового сигнала составляет главную трудность метода. Амплитуды настраиваются таким образом, чтобы разность между текущим выходом объекта и в отсутствие тестового сигнала лежала в допустимых границах. Самонастройка частот позволяет уменьшить длительность идентификации. В отличие от пакета ADAPLAB-3, который позволяет осуществлять самонастройку тестового сигнала для одномерных объектов, пакет «Автоматика» позволяет производить самонастройку для многомерных объектов.
Сравним возможности представленного пакета с подобными пакетами MATLAB. Пакет Control System Toolbox предназначен для первой группы пользователей (исследователей), которые владеют обширными знаниями по теории управления и знаниями в области применения теории управления (например, авиация, энергетика и т. д.). Такие специалисты используют широкий спектр m-функций для разработки процедур решения реальных систем проектирования. Но использование такого пакета затруднительно для инженера-разработчика систем управления.
Пакет идентификации Frequency-domain system identification toolbox может применяться только в отсутствии внешнего возмущения, или если оно представляет собой белый шум (частотный метод, метод наименьших квадратов). Метод инструментальных переменных [5] применим для

произвольного внешнего возмущения, но нет возможности проводить настройку регулируемого выхода объекта. Из-за этого длительность идентификации может существенно увеличиться. По этой причине метод мало пригоден для адаптивного управления.

1 Директива «Синтез регулятора» (asrmi3m)

1.1 Назначение директивы

Директива предназначена для разработки алгоритма управления заданного объекта с двумя входами и двумя выходами и с заданными требованиями к точности управления в условиях неизвестных внешних возмущений.
Дан объект:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mf(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор переменных состояния объекта; $y(t) \in R^2$ — вектор измеряемых переменных, $u(t) \in R^2$ — вектор управляющих воздействий, $f(t) \in R^2$ — вектор неизвестных внешних возмущений, для которого заданы только границы возмущений $f\_ \in R^2$ такие что $|f_i(t)| < f_i\_ \quad (i = \overline{1,2})$, $A \in R^{n \times n}$, B и $M \in R^{n \times 2}$, $C \in R^{2 \times n}$, $D \in R^{2 \times 2}$ — числовые матрицы.
Заданы требования к точности по выходу объекта причем $|y_i(t)| < y_i\_, \quad (i = \overline{1,2})$, где $y_i\_$ — заданные числа.
В результате работы программы синтезируется регулятор, обеспечивающий заданные требования к точности управления. Решение задачи сводится к минимизации функционала:

$$J_\varepsilon = \int_0^\infty [y^T Q^{(0)} y + \varepsilon_1^{[0]} u_1^2 + \varepsilon_1^{[1]} \dot{u}_1^2 + \ldots + \varepsilon_1^{[\gamma_1]} u_1^{(\gamma_1)2} + \varepsilon_2^{[0]} u_2^2 + \varepsilon_2^{[1]} \dot{u}_2^2 + \ldots + \varepsilon_2^{[\gamma_2]} u_2^{(\gamma_2)2}]dt \tag{1.2}$$

где $Q^{(0)} = diag[q_{11} \; q_{22}]$, $\varepsilon_i^j \quad (i = \overline{1,2}), \quad (j = \overline{1,\gamma_1}$ или $j = \overline{1,\gamma_2})$, γ_1 и γ_2 — заданные числа.

$$q_{ii} = \left(\frac{f_i\_}{y_i\_} \right)^2, \quad (i = \overline{1,2}). \tag{1.3}$$

Регулятор имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t), \end{cases} \tag{1.4}$$

где A_c, B_c, C_c, D_c — матрицы регулятора.
Исходные данные и результаты директивы:
[Ac,Bc,Cc,Dc]=asrmi3m(A,B,C,D,nu,mu,y1_,y2_,f1_,f2_,alpha1,alpha2) (1.5)

Входные данные:
A, B, C и D — матрицы объекта (1.1);
nu, mu — вектора, содержащие максимальные степени полиномов знаменателей и числителей передаточной матрицы объекта по ее столбцам;

$y_{i\_}$, $(i=\overline{1,2})$ — требования к точности по выходу объекта $y_{\_} \in R^2$;

$f_{i\_}$, $(i=\overline{1,2})$ — границы внешних возмущений $f_{\_} \in R^2$;

$alpha_i$, $(i=\overline{1,2})$ — заданные параметры синтеза регулятора.

Выходные данные:

$A_c \in R^{n_c \times n_c}$, $B_c \in R^{n_c \times 2}$, $C_c \in R^{2 \times n_c}$, $D_c \in R^{2\times 2}$ — матрицы регулятора (1.4).

1.2 Алгоритм

1.2.1 Директива имеет следующую структуру:

<asrmi3m> = <cauio><stdecom><srezmicau><Formeps><formLq>
<lqr><contrcond><formwu><radimi><contrio> (1.6)

Объект (1.1), без внешнего возмущения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t); \end{cases} \qquad (1.7)$$

для него необходимо построить регулятор вида (1.4).

1.2.2 Приведение объекта (1.7) к форме «вход-выход» выполняется программой **cauio**:

$$R_b(s)y(t) = G_p(s)u(t), \qquad (1.8)$$

где $G_p(s) = \begin{pmatrix} g_p^{11}(s) & g_p^{12}(s) \\ g_p^{21}(s) & g_p^{22}(s) \end{pmatrix}$ и $R_b(s) = \begin{pmatrix} r_b^{11}(s) & r_b^{12}(s) \\ r_b^{21}(s) & r_b^{22}(s) \end{pmatrix}$, $g_p^{ij}(s)$ и $r_b^{ij}(s)$, $(i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,2})$ — полиномы.

1.2.3 Программа **stdecom** приводит матрицу G_p к следующему виду:

$$\begin{aligned} G_p &= G_p^n s^n + G_p^{n-1}s^{n-1} + \ldots + G_p^1 s + G_p^0 = G_p^0\left(G_p^0\right)^{-1}(G_p^n s^n + G_p^{n-1}s^{n-1} + \ldots + G_p^1 s + G_p^0) = \\ &= G_p^0\left(\bar{G}_p^n s^n + \bar{G}_p^{n-1}s^{n-1} + \cdots + \bar{G}_p^1 s + E\right) = G_p^0 \bar{G}_p, \end{aligned} \qquad (1.9)$$

формирует условные управления

$$\bar{u}(t) = \bar{G}_p u(t). \qquad (1.10)$$

1.2.4 Вычисление передаточной матрицы объекта с учетом условных управлений. Вычисление производится по следующим формулам:

$$y(t) = R_b^{-1}(s)G_p^0\bar{u}(t) = T(s)\bar{u}(t), \qquad (1.11)$$

$$T(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{t_{ap}^{11}(s)}{t_{bp}(s)} & \dfrac{t_{ap}^{12}(s)}{t_{bp}(s)} \\ \dfrac{t_{ap}^{21}(s)}{t_{bp}(s)} & \dfrac{t_{ap}^{22}(s)}{t_{bp}(s)} \end{pmatrix}; \qquad (1.11')$$

$$t_{bp}(s) = r_b^{11}(s)r_b^{22}(s) - r_b^{12}(s)r_b^{21}(s), \qquad (1.12)$$

$$t_{ap}^{11}(s)=g_p^{11}(s)r_b^{22}(s)-g_p^{21}(s)r_b^{12}(s), \quad (1.13)$$

$$t_{ap}^{12}(s)=g_p^{12}(s)r_b^{22}(s)-g_p^{22}(s)r_b^{12}(s), \quad (1.14)$$

$$t_{ap}^{21}(s)=-g_p^{11}(s)r_b^{21}(s)+g_p^{21}(s)r_b^{11}(s), \quad (1.15)$$

$$t_{ap}^{22}(s)=-g_p^{12}(s)r_b^{21}(s)+g_p^{22}(s)r_b^{11}(s). \quad (1.16)$$

1.2.4 Частоты среза $\omega_{cpi}, \quad (i=\overline{1,2})$ системы определяются с помощью функции **srezmicau**. Поиск частот производится для объекта в форме (1.11) и осуществляется на наборе частот $\omega=[\omega_0 \ \omega_1 \ \dots \ \omega_N]$. Для каждого значения частоты из выбранного набора формируется матрица

$$E+L=E+T^T\left(-j\omega_k\right)QT\left(-j\omega_k\right), \quad (k=\overline{1,N}). \quad (1.17)$$

Для каждой матрицы вычисляем выражение:

$$m(k)=\left|\sqrt{eig(E+L)}-2\cdot E\right|_k \ (k=\overline{1,N}); \quad (1.18)$$

$$\min[m_1(k)] \text{ дает } k_{cp1} \text{ и } \omega_{cp1}=\omega_{k_{cp1}}; \quad (1.19)$$

$$\min[m_2(k)] \text{ дает } k_{cp2} \text{ и } \omega_{cp2}=\omega_{k_{cp2}}. \quad (1.19')$$

1.2.5 Формируется самосопряженный полином:

$$\varepsilon_j(s^2)=1+\varepsilon_{ji}^2 s^2+\ldots+\varepsilon_{ji}^2 s^{2\gamma}, \quad (j=\overline{1,2}, \ i=\overline{1,\gamma_j}); \quad (1.20)$$

где $\varepsilon_{ji}^2=\dfrac{C_n^i}{\alpha^{2i}\omega_{cpi}^{2i}}, \quad (i=\overline{0,\gamma_j})$, а γ_1 и γ_2 — этот параметры, определяющий порядок результирующего полинома, α — это заданное число, является параметром алгоритма синтеза, $\omega_{cpi}, \ (i=\overline{1,2})$ — частота среза системы, C — число сочетаний из *n* элементов по *i*.

Для формирования полиномов (1.20) вызывается функция **formeps**, в результате работы которой получаем два полинома $\varepsilon_1(s)$ и $\varepsilon_2(s)$.

1.2.6 Для преобразования системы (1.7) к расширенной форме Коши вызывается модуль **formLq**, в котором происходят необходимые операции. На выходе модуля получаем новую форму Коши вида

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}\tilde{u}; \quad (1.21)$$

где $\bar{A}$ и $\bar{B}$ имеют особую структуру, а функционал оптимизации примет вид:

$$J_\varepsilon=\int_0^\infty[\bar{x}^T\bar{Q}^{(0)}\bar{x}+\tilde{u}_1^2+\tilde{u}_2^2]dt. \quad (1.22)$$

1.2.7 Решается уравнение Риккати вида:

$$P\bar{A}+\bar{A}^TP-P\bar{B}\bar{B}^TP+\bar{Q}=0. \quad (1.23)$$

Решение осуществляется с помощью стандартной функции **lqr**. В результате решения получаем матрицу регулятора $\tilde{u}(t) = K\overline{x}(t)$.

1.2.8 После нахождения матрицы *K* формируется уравнение регулятора. Сначала находим регулятор в форме «вход-выход» и передаточной матрицы:

$$\text{«вход-выход» вида: } EE(s)\tilde{u}(t) = R(s)y(t); \tag{1.24}$$

$$\text{передаточная матрица, вида: } \tilde{u}(t) = EE^{-1}(s)R(s)y(t) = W_c(s)y(t), \tag{1.25}$$

Эти операции производятся при вызове модуля **contrcond**, который по матрицам объекта формы (1.7) и матрице *K* строит регулятор в виде (1.24) и (1.25).

1.2.9 Производится анализ системы, замкнутой регулятором, на соответствие требованиям по запасам устойчивости. Анализ производится с помощью вызов двух программ. Первым вызывается модуль **formwu**, который формирует разомкнутую систему по формуле

$$W_u(s) = -W_c(s)W(s), \tag{1.26}$$

где $W_u(s\ )$ — передаточная матрица разомкнутой системы. Затем вызывается модуль **radimi**, который вычисляет значения передаточной функции системы на заданном наборе частот. По полученным значениям находятся запасы устойчивости системы по модулю.

1.2.10 Осуществляется переход от введенных ранее условных управлений к естественным. Для этого воспользуемся функцией **contrio**. Этот модуль оставляет общий вид регулятора без изменений, то есть форму (1.24), но производит преобразование в матрице $EE(s)$.

1.2.11 Приведение уравнений регулятора к форме Коши (1.4). Эта форма наиболее удобна для моделирования. В результате вызова функции **ss** получаем искомый регулятор вида (1.4). На этом работа директивы заканчивается.

2 Модули директивы «Синтез регулятора»

2.1 Программа (модуль) перехода от формы Коши к форме «вход-выход» (cauio)

2.1.1 Назначение модуля

Модуль предназначен для преобразования объекта, заданного в форме (1.7) к форме «вход-выход» вида (1.8).

2.1.2 Алгоритм

В этом модуле применяется алгоритм восстановления, схожий с алгоритмом, используемом в модуле **contrcond** (описывается ниже), с той лишь разницей, что входы и выходы меняются местами, а матрица *K*, являющаяся в **contrcond** матрицей регулятора, рассчитывается по следующим формулам:

$$K = \begin{pmatrix} K^{[1]} \\ K^{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1} \\ C_2 A^{r_2} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где — r_1 и r_2 порядок объекта по первому и второму выходам соответственно.

2.1.3 Исходные данные и результаты

[rb11,rb12,rb21,rb22,gp11,gp12,gp21,gp22]=cauio2(A,B,C,r1,r2) (2.2)

Входные данные:

$A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times 2}$, $C \in R^{2\times n}$ — матрицы объекта формы Коши (1.7);
r1, r2 — порядок полиномов объекта по первому и второму выходам соответственно.
Выходные данные:
$gp_{i,j}(s), \quad (i, j = \overline{1,2})$ — полиномы матрицы объекта $G_p(s)$ из (1.8);
$rb_{i,j}(s), \quad (i, j = \overline{1,2})$ — полиномы матрицы объекта $R_b(s)$ из (1.8);

2.2 Программа (модуль) преобразования полиномиальной матрицы (stdecom)

2.2.1 Назначение модуля
Программа предназначена для преобразования заданной квадратной полиномиальной матрицы.

$$G(s) = G_n s^n + G_{n-1} s^{n-1} + \ldots + G_1 s + G_0, \tag{2.3}$$

$$G(s) = G_0 G_0^{-1}(G_n s^n + G_{n-1} s^{n-1} + \ldots + G_1 s + G_0) = G_0(\bar{G}_n s^n + \bar{G}_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \bar{G}_1 s + E); \tag{2.4}$$

где E-единичная матрица.
2.2.2 Алгоритм
Исходными данные являются полиномы $g_{11}(s)$, $g_{12}(s)$, $g_{21}(s)$, $g_{22}(s)$, которые составляют матрицу:

$$G(s) = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{pmatrix}; \tag{2.5}$$

Из этих полиномов формируем матрицу $G(s)$ вида (2.4). Выделяется матрица G_0, и строятся матрицы $\bar{G}_k$ вида:

$$\bar{G}_k = G_0^{-1} G_k \quad (k = \overline{1,n}). \tag{2.6}$$

2.2.3 Исходные данные и результаты
[g011,g012, g021,g022,g_11,g_12, g_21,g_22]=stdecom(g11,g12, g21,g22) (2.7)

Входные данные:
$g_{i,j}(s), \quad (i, j = \overline{1,2})$ — полиномы матрицы вида (2.5).
Выходные данные:
$g_{0i,j}, \quad (i, j = \overline{1,2})$ — элементы числовой матрицы G_0 из выражения (2.6);
$\bar{g}_{i,j}(s), \quad (i, j = \overline{1,2})$ — полиномы матрицы, состоящей из матриц $\bar{G}_k$ из выражения (2.6).

2.3 Программа (модуль) нахождения частот среза системы (srezmicau)

2.3.1 Назначение модуля
Программа предназначена для определения частот среза ω_{cp} системы, объект которой задан в форме «вход-выход» (1.8).
2.3.2 Алгоритм
Объект в форме «вход-выход» в котором: $R(s)$ и $G(s)$ — полиномиальные матрицы вида:

$$R(s)=\begin{pmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{pmatrix}, \qquad G(s)=\begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

Вначале вычисляется передаточная матрица объекта (1.7)

$$T(s)=R^{-1}(s)G(s); \tag{2.8}$$

Используя представление

$$R^{-1}(s)=\begin{pmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{22}(s) & -r_{12}(s) \\ -r_{21}(s) & r_{11}(s) \end{pmatrix}\frac{1}{t_b(s)};$$

$$t_b(s)=r_{11}(s)r_{22}(s)-r_{12}(s)r_{21}(s).$$

Вычисляя произведение (2.8) находится

$$T(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{ta_{11}(s)}{t_b(s)} & \dfrac{ta_{12}(s)}{t_b(s)} \\ \dfrac{ta_{21}(s)}{t_b(s)} & \dfrac{ta_{22}(s)}{t_b(s)} \end{pmatrix}; \tag{2.9}$$

Далее находится значение элементов матрицы (2.9) для заданного набора частот $\omega=[\omega_1\ \omega_2\ \dots\ \omega_N]$: от $\omega_1=\omega_{\min}$ до $\omega_N=\omega_{\max}$ шагом $T=\dfrac{\omega_{\max}-\omega_{\min}}{N}$. Из числовых матриц $T(j\omega_k), \quad (k=\overline{1,N})$ формируется набор матриц вида:

$$E+L=E+T^T\left(-j\omega_k\right)QT\left(-j\omega_k\right), \quad (k=\overline{1,N}), \tag{2.10}$$

где матрица $Q=diag[q_{11}\ q_{22}]$, где $q_{ii}(i=\overline{1,r})$ — параметры функционала оптимизации, и находятся вектора чисел:

$$m(k)=\left|\sqrt{eig(E+L)}-2E\right|_k, \quad (k=\overline{1,N}); \tag{2.11}$$

$$\min[m_1(k)] \text{ дает } k_{cp1} \text{ и } \omega_{cp1}=\omega_{k_{cp1}}; \tag{2.12}$$

$$\min[m_2(k)] \text{ дает } k_{cp2} \text{ и } \omega_{cp2}=\omega_{k_{cp2}}. \tag{2.12'}$$

2.3.3 Исходные данные и результаты

[omsrmi1,omsrmi2]=srezmicau(q11,q22,rb11,gp11,rb12,gp12,

rb21,gp21,rb22,gp22,Nom,omin,omax) (2.13)

Входные данные:

$q_{ii}, \quad (i=\overline{1,r})$ — параметры функционала оптимизации;

$gp_{i,j}(s), \quad (i,j=\overline{1,2})$ — полиномы матрицы регулятора $G(s)$ из (1.8);

$rb_{i,j}(s), \quad (i,j=\overline{1,2})$ — полиномы матрицы регулятора $R(s)$ из (1.8);

Nom — число частот в наборе;

omin, omax — минимальная и максимальная частоты для набора.

Выходные данные:

omsrmi1, omsrmi2 — частоты среза оптимальной системы (2.12) и (2.12').

2.4 Программа (модуль) формирования полинома реализуемости (Formeps)

2.4.1 Назначение модуля

Функция определения коэффициентов самосопряженного полинома реализуемости вида:

$$\varepsilon(s^2) = 1 + \varepsilon_1^2 s^2 + \ldots + \varepsilon_\gamma^2 s^{2\gamma}. \tag{2.14}$$

2.4.2 Алгоритм

На вход модуля поступают параметры: γ — этот параметр определяет порядок результирующего полинома, α — это заданное число, является параметром алгоритма синтеза, ω — частота среза системы. По этим входным данным производится расчет коэффициентов искомого полинома по следующей формуле:

$$\varepsilon_i^2 = \frac{C_n^i}{\alpha^{2i}\omega^{2i}}, \qquad (i = \overline{0,\gamma}), \tag{2.15}$$

где α, γ, и ω — уже описаны выше, а C — число сочетаний из *n* элементов по *i*.

В функции расчет коэффициентов производится с помощью обычной рекурсии.

2.4.3 Исходные данные и результаты

[e]=formeps(gam,alpha, omega) (2.16)

Входные данные:

gam — параметр определяет порядок полинома реализуемости;

alpha — заданное число, является параметром алгоритма синтеза;

omega — частота среза системы.

Выходные данные:

e — коэффициенты самосопряженного полинома реализуемости.

2.5 Программа (модуль) формирования расширенной формы Коши и преобразование функционала оптимизации (formLq)

2.5.1 Назначение модуля

Модуль предназначен для формирования модели объекта управления (1.7) в расширенной форме Коши и преобразования функционала оптимизации (1.2).

На входе модуля имеются числовые матрицы *A*, *B*, *C*, *D*, которые являются матрицами формы Коши, матрица $\tilde{Q} = diag[q_{11}\ q_{22}]$, содержащая параметры функционала оптимизации, также задаются два полинома реализуемости системы: $\varepsilon_1(s)$ и $\varepsilon_2(s)$ и γ_1 и γ_2 — параметры синтеза регулятора.

На выходе модуля получаем для объекта (1.7) новую форму Коши вида (1.21), где $\bar{A}$ и $\bar{B}$ имеют особую структуру. Производится преобразование функционала оптимизации (1.2) к новому виду (1.22)

2.5.2 Алгоритм

При выполнении модуля происходит формирование системы (1.21) и функционала (1.22) по исходным данным, матрицы этих выражений имеют специальные структуры. Матрица $Q^{(0)}$ из (1.22) формируется как

$$Q^{(0)} = C^T \cdot \tilde{Q} \cdot C. \qquad (2.17)$$

Распишем подробнее матрицы, входящие в состав (1.21) и (1.22).
Матрица $\overline{A}$ формируется следующим образом:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_{\gamma_1 - 1} & 0 & E_{\gamma_2 - 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.18)$$

где A — матрица формы Коши (1.1), b_1 и b_2 — соответствующие столбцы матрицы B, $E_{\gamma_1 - 1}$ и $E_{\gamma_2 - 1}$ — единичные матрицы размеров $\left[(\gamma_1 - 1)\times(\gamma_1 - 1)\right]$ и $\left[(\gamma_2 - 1)\times(\gamma_2 - 1)\right]$ соответственно.
Матрица $\overline{B}$ формируется как:

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0_1 & 0_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n \\ 0_{n+1} & 0_{n+1} \\ \vdots & \vdots \\ \left(\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_1^{[\gamma_1+1]}}}\right)_{\gamma_1+n} & 0_{\gamma_1+n} \\ \vdots & \vdots \\ 0_{\gamma_1+\gamma_2+n} & \left(\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_2^{[\gamma_2+1]}}}\right)_{\gamma_1+\gamma_2+n} \end{pmatrix}, \qquad (2.19)$$

где нижние индексы элементов матрицы показывают номер элемента матрицы в столбце, начиная с верхней строки.
Матрица $\overline{Q}$ формируется как:

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} Q^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.20)$$

где $Q^{(0)}$ — матрица из (2.17), а e_1 и e_2 имеют следующий вид $e_i = diag(\varepsilon_i^{[2k]}),\ (k = \overline{1, \gamma_i}),\ (i = \overline{1, 2})$.
Формирование матриц производится простой подстановкой исходных данных в заготовки матриц в соответствии с приведенными схемами заполнения.
2.5.3 Исходные данные и результаты
[Awi,Bwi,Qwi,Rwi]=formLq(As1,Bs1,Cs1,q11,q22,e1,e2,gam1,gam2) (2.21)

Входные данные:
$As1 \in R^{n\times n}$, $Bs1 \in R^{n\times 2}$, $Cs1 \in R^{2\times n}$ — матрицы объекта в форме Коши (1.7);
q11 и q22 — параметры функционала оптимизации $\tilde{Q} = diag[q_{11}\ q_{22}]$;

e1 и e2 — коэффициенты самосопряженных полиномов реализуемости $\varepsilon_1(s)$ и $\varepsilon_2(s)$;

gam1 и gam2 — параметры синтеза регулятора γ_1 и γ_2.

Выходные данные:

Awi — матрица (2.18), Bwi — матрица (2.19), Qwi — матрица (2.20);

Rwi — единичная матрица.

2.6 Программа (модуль) формирования уравнения регулятора (contrcond)

2.6.1 Назначение

Модуль предназначен для формирования уравнения регулятора, который получен в результате решения задачи LQ-оптимизации с функционалом, содержащим производные управления.

2.6.2 Алгоритм

Дан объект с двумя входами и двумя выходами, описываемый уравнениями (1.7).

Регулятор получен из решения задачи о минимуме функционала (1.2).

Он имеет вид

$$\overline{u}(t) = K_w \overline{x}(t); \tag{2.22}$$

где

$$\overline{u}_1 = \sqrt{\varepsilon_1^{[\gamma_1]}} u_1^{(\gamma_1)};\ \overline{u}_2 = \sqrt{\varepsilon_2^{[\gamma_2]}} u_2^{(\gamma_2)}; \tag{2.23}$$

$$\overline{x}^T = [x^T,\ u_1,\ \dot{u}_1,\ \ldots,\ u_1^{(\gamma_1-1)},\ u_2,\ \dot{u}_2,\ \ldots,\ u_2^{(\gamma_2-1)}]. \tag{2.24}$$

Результатом работы программы является уравнения регулятора

$$EE(s)u(t) = R(s)y(t); \tag{2.25}$$

где $EE(s) = \begin{pmatrix} ee_{11}(s) & ee_{12}(s) \\ ee_{21}(s) & ee_{22}(s) \end{pmatrix}, \qquad R(s) = \begin{pmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{pmatrix},$

$ee_{i,j}(s)$ и $r_{i,j}(s), \quad (i, j = \overline{1,2})$ — полиномы.

Уравнение (2.22) можно представить как

$$\overline{u} = Kx + K_w^{(1)} x^{(1)} + K_w^{(2)} x^{(2)}; \tag{2.26}$$

где $x^{(1)T} = [u_1,\ \dot{u}_1,\ \ldots,\ u_1^{(\gamma_1-1)}]; \quad x^{(2)T} = [u_2,\ \dot{u}_2,\ \ldots,\ u_2^{(\gamma_1-1)}];$

Заменяя производные символом *s*, запишем:

$$\sqrt{\varepsilon_1^{[\gamma_1]}} u_1^{(\gamma_1)} = K^{(1)} x + g_{c_{11}}(s) u_1 + g_{c_{12}}(s) u_2; \tag{2.27}$$

$$\sqrt{\varepsilon_2^{[\gamma_2]}} u_2^{(\gamma_2)} = K^{(2)} x + g_{c_{21}}(s) u_1 + g_{c_{22}}(s) u_2; \tag{2.27'}$$

$$K = \begin{pmatrix} K^{[1]} \\ K^{[2]} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases} gd_{11}(s)u_1 + gd_{12}(s)u_2 = K^{[1]} \cdot x; \\ gd_{21}(s)u_1 + gd_{22}(s)u_2 = K^{[2]} \cdot x; \end{cases} \tag{2.28}$$

$$G_d(s)u(t) = Kx(t). \tag{2.28'}$$

Обозначим $G_d(s) = \begin{pmatrix} gd_{11}(s) & gd_{12}(s) \\ gd_{21}(s) & gd_{22}(s) \end{pmatrix}$.

Исключим из уравнения (2.30') вектор *x*, используя доказанную ниже его связь с измеряемыми векторами *y* и *u*

$$x(t) = F_y(s)y(t) + F(s)u(t); \tag{2.29}$$

Подставляя выражение (2.29) в (2.28) получим искомые матрицы регулятора (2.25), где

$$EE(s) = G_d(s) + G_b(s); \tag{2.30}$$

$$G_b(s) = KF(s); \tag{2.30’}$$

$$R(s) = KF_y(s); \tag{2.30’’}$$

Матрицы $F_y(s)$ и $F(s)$ строятся следующим образом: продифференцируем $r_1 - 1$ раз первое из уравнений $y = C \cdot x$ и $r_2 - 1$ раз второе из этих уравнений $(r_1 + r_2 = n)$. Тогда получим систему из *n* алгебраических уравнений для нахождения вектора *x*.

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 x(t); \\ \dot{y}_1(t) = C_1\dot{x}(t) = C_1\left[Ax(t) + Bu(t)\right] = C_1Ax(t) + C_1Bu(t); \\ \ddot{y}_1(t) = C_1A\dot{x}(t) + C_1B\dot{u}(t) = C_1A^2x(t) + C_1ABu(t) + C_1B\dot{u}(t); \\ \dddot{y}_1(t) = C_1A^3x(t) + C_1A^2Bu(t) + C_1AB\dot{u}(t) + C_1B\ddot{u}(t); \\ \vdots \\ y_1^{(r_1-1)}(t) = C_1A^{(r_1-1)}x(t) + C_1A^{(r_1-2)}Bu(t) + C_1A^{(r_1-3)}B\dot{u}(t) + \ldots + C_1Bu^{(r_1-2)}(t). \\ y_2(t) = C_2x(t); \\ \dot{y}_2(t) = C_2\dot{x}(t) = C_2\left[Ax(t) + Bu(t)\right] = C_2Ax(t) + C_2Bu(t); \\ \ddot{y}_2(t) = C_2A\dot{x}(t) + C_2B\dot{u}(t) = C_2A^2x(t) + C_2ABu(t) + C_2B\dot{u}(t); \\ \dddot{y}_2(t) = C_2A^3x(t) + C_2A^2Bu(t) + C_2AB\dot{u}(t) + C_2B\ddot{u}(t); \\ \vdots \\ y_2^{(r_2-1)}(t) = C_2A^{(r_2-1)}x(t) + C_2A^{(r_2-2)}Bu(t) + C_2A^{(r_2-3)}B\dot{u}(t) + \ldots + C_2Bu^{(r_2-2)}(t). \end{cases} \tag{2.31}$$

Введём вектор:

$$\overline{y} = [y_1,\ \dot{y}_1,\ \ldots,\ y_1^{(r_1-1)},\ y_2,\ \dot{y}_2,\ \ldots,\ y_2^{(r_2-1)}]^T; \tag{2.32}$$

и запишем систему (2.31) как

$$\overline{y}(t) = Mx(t) + \overline{F}(s)u(t); \tag{2.33}$$

где

$$M^T=[C_1,\ C_1A,\ \ldots,\ C_1A^{(r_1-1)},\ C_2,\ C_2A,\ \ldots,\ C_2A^{(r_2-1)}];\qquad(2.34)$$

$$\bar F(s)u(t)=\begin{bmatrix}0\\ C_1B_1\\ \vdots\\ C_1A^{(r_1-2)}B_1\\ 0\\ C_2B_1\\ \vdots\\ C_2A^{(r_2-2)}B_1\end{bmatrix}u_1(t)+\begin{bmatrix}0\\ C_1B_2\\ \vdots\\ C_1A^{(r_1-2)}B_2\\ 0\\ C_2B_2\\ \vdots\\ C_2A^{(r_2-2)}B_2\end{bmatrix}u_2(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ C_1A^{(r_1-3)}B_1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ C_2A^{(r_2-3)}B_1\end{bmatrix}su_1(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ C_1A^{(r_1-3)}B_2\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ C_2A^{(r_2-3)}B_2\end{bmatrix}su_2(t)+\ldots;\qquad(2.34')$$

Из выражения (2.33) следует

$$x(t)=M^{-1}\bar y(t)+M^{-1}\bar F(s)u(t).\qquad(2.35)$$

Преобразуем это равенство. Для этого введём матрицу вида:

$$\psi(s)=\begin{pmatrix}1 & s & \cdots & s^{r_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s & \cdots & s^{r_2-1}\end{pmatrix};\qquad(2.36)$$

и запишем $\bar y=\psi(s)y$.

Тогда матрица связи имеет вид (2.29), где

$$F_y(s)=M^{-1}\psi(s);\qquad(2.37)$$

$$F(s)=M^{-1}\bar F(s).\qquad(2.37’)$$

2.6.3 Исходные данные и результаты

[ac11,ac12,ac21,ac22,bc,r11,r12,r21,r22,ee11,ee12,ee21,ee22]=

contrcond(A, B, C, Kwi ,r1 ,r2, gam1, gam2, e11, e22) (2.38)

Входные данные:

$A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, $C\in R^{r\times n}$ — матрицы формы Коши (1.7);

Kwi — матрица регулятора из выражения (2.22);

r1, r2 — r_1 и r_2 порядок системы по первому и второму выходу соответственно;

gam1, gam2 — параметры синтеза регулятора γ_1 и γ_2 соответственно;

e11, e22 — коэффициенты при производных управления из функционала (1.2), стоящие при степенях γ_1 и γ_2 соответственно.

Выходные данные:

$ee_{i,j}(s),\quad (i,j=\overline{1,2})$ — полиномы матрицы регулятора $EE(s)$ из выражения (2.25);

$r_{i,j}(s),\quad (i,j=\overline{1,2})$ — полиномы матрицы регулятора $R(s)$ из выражения (2.25);

$ac_{i,j}(s),\quad (i,j=\overline{1,2})$ и $bc(s)$ — полиномы регулятора при его записи в виде передаточной матрицы вида:

$$u = EE^{-1}(s)\cdot R(s)\cdot y = W_c(s)\cdot y,$$

$$W_c(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{ac_{11}(s)}{bc(s)} & \dfrac{ac_{12}(s)}{bc(s)} \\ \dfrac{ac_{21}(s)}{bc(s)} & \dfrac{ac_{22}(s)}{bc(s)} \end{pmatrix};$$

2.7 Программа (модуль) формирования передаточной матрицы разомкнутой системы (formwu)

2.7.1 Назначение модуля

Программа предназначена для формирования передаточной матрицы разомкнутой системы по передаточным матрицам объекта и регулятора.

2.7.2 Алгоритм

Пусть известны передаточные матрицы регулятора и объекта:

$$W_c(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{ac_{11}(s)}{bc(s)} & \dfrac{ac_{12}(s)}{bc(s)} \\ \dfrac{ac_{21}(s)}{bc(s)} & \dfrac{ac_{22}(s)}{bc(s)} \end{pmatrix}; \tag{2.39}$$

$$W_p(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{ap_{11}(s)}{bp(s)} & \dfrac{ap_{12}(s)}{bp(s)} \\ \dfrac{ap_{21}(s)}{bp(s)} & \dfrac{ap_{22}(s)}{bp(s)} \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Тогда передаточная матрица разомкнутой системы

$$W_u(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{au_{11}(s)}{bu(s)} & \dfrac{au_{12}(s)}{bu(s)} \\ \dfrac{au_{21}(s)}{bu(s)} & \dfrac{au_{22}(s)}{bu(s)} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

находится как

$$W_u(s) = -W_c(s)W(s) \tag{2.42}$$

2.7.3 Исходные данные и результаты

[au11,bu11,au12,bu12,au21,bu21,au22,bu22]=formwu(ac11,ac12,ac21,ac22,bc,ap11,bp11,
ap12,bp12,ap21,bp21,ap22,bp22) (2.43)

Входные данные:

$ac_{i,j}(s), \quad (i,\, j=\overline{1,2})$ и $bc(s)$ — полиномы передаточной матрицы регулятора (2.39);

$ap_{i,j}(s), \quad (i,\, j=\overline{1,2})$ и $bp(s)$ — полиномы передаточной матрицы объекта (2.40).

Выходные данные:

$au_{i,j}(s), \quad (i,\, j=\overline{1,2})$ и $bu(s)$ — полиномы передаточной матрицы разомкнутой системы (2.41).

2.8 Программа (модуль) определения векторов для нахождения запасов устойчивости (radimi)

2.8.1 Назначение модуля
Программа предназначена для определения векторов для нахождения радиусов запасов устойчивости по передаточной матрице разомкнутой системы.
2.8.2 Алгоритм
Радиус запасов устойчивости определяется на некотором множестве частот из заданного интервала $\omega \in [\omega_{\min}\ \ \omega_{\max}]$.
При заданном числе — N — частот находится шаг

$$T_{om} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{N} \tag{2.44}$$

и формируется набор частот $\omega_i = i \cdot T_{om},\quad (i = \overline{1, N})$, для которых вычисляются значения матрицы — $W_u(s)$ — разомкнутой системы: $W_u(j\omega_i),\quad (i = \overline{1, N})$.
По этим значениям формируются матрицы

$$M(\omega_i) = \left[E + W_u(-j\omega_i)\right]^T \left[E + W_u(j\omega_i)\right],\ (i = \overline{1, N}), \tag{2.45}$$

и вычисляются для каждого ω_i собственные значения этой матрицы $ro_i = eig[M(\omega_i)],\quad (i = \overline{1, N})$.
По этим значениям формируются два N-мерных вектора:

$$v_{1i} = \sqrt{ro_{1i}} \text{ и } v_{2i} = \sqrt{ro_{2i}},\ (i = \overline{1, N}), \tag{2.46}$$

где индексы означают первое и второе собственные числа матрицы (2.45) для каждого значения частоты.
2.8.3 Исходные данные и результаты
[v1,v2]=radimi(s,au11,bu11,au12,bu12,au21,bu21,au22,bu22) (2.47)

Входные данные:
$s = [j\omega_1,\ \ldots,\ j\omega_N] \in R^N$ — вектор, содержащий произведение набора частот на мнимую единицу;
$au_{i,j}(s),\quad (i,\ j = \overline{1, 2})$ и $bu(s)$ — полиномы передаточной матрицы разомкнутой системы.
Выходные данные:
$v_i,\quad (i = \overline{1, 2})$ — вектора, содержащие значения, вычисленные по формуле (2.46).

2.9 Программа (модуль) преобразования регулятора при использовании условных управлений (contrio)

2.9.1 Назначение модуля
Программа предназначена для преобразования регулятора вида (1.24) при использовании условных управлений (1.10).
Условные управления используются, когда в управлениях объекта в форме «вход-выход» (1.8), которые в модуле **cauio** собственные числа определителя $\det[R_b(s)]$ имеют отрицательные вещественные части.

В таком случае используются условные управления (1.10) и задача синтеза решается для объекта вида

$$R_b(s)y(t) = G_p^0\bar{u}(t). \tag{2.48}$$

2.9.2 Алгоритм

Результат синтеза дает регулятор

$$EE(s)\bar{G}_p u(t) = R(s)y(t), \tag{2.49}$$

$$\text{или } G(s)u(t) = R(s)y(t), \tag{2.50}$$

где $G(s) = EE(s)\bar{G}_p$, исключая условные управления получим регулятор вида (1.24) откуда следует передаточная матрица регулятора.

2.9.3 Исходные данные и результаты

[ac11,ac12,ac21,ac22,bc,g11,g12,g21,g22]=contrio2(gp11,gp12,gp21,gp22,

ee11,ee12,ee21,ee22,r11,r12,r21,r22) (2.51)

Входные данные:

$ee_{i,j}(s), \quad (i, j = \overline{1,2})$ — полиномы матрицы регулятора $EE(s)$ из выражения (2.49);

$r_{i,j}(s), \quad (i, j = \overline{1,2})$ — полиномы матрицы регулятора $R(s)$ из выражения (2.49);

$g_{pi,j}, \quad (i, j = \overline{1,2})$ — элементы полиномиальной матрицы $\bar{G}_p$, полученной в результате выполнения модуля **stdecom**.

Выходные данные:

$ac_{i,j}(s), \quad (i, j = \overline{1,2})$ и $bc(s)$ — полиномы регулятора при его записи в виде передаточной матрицы вида:

$$u(t) = G^{-1}(s)R(s)y(t) = W_c(s)y(t),$$

$$W_c(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{ac_{11}(s)}{bc(s)} & \dfrac{ac_{12}(s)}{bc(s)} \\ \dfrac{ac_{21}(s)}{bc(s)} & \dfrac{ac_{22}(s)}{bc(s)} \end{pmatrix};$$

$g_{i,j}, \quad (i, j = \overline{1,2})$ — полиномы матрицы $G(s) = EE(s)\bar{G}_p$.

3 Директивы «Идентификации»

Директивы «Идентификации» предназначены для определения коэффициентов передаточной матрицы объекта с двумя входами и двумя выходами в условиях неизвестных ограниченных внешних возмущениях.

3.1 Идентификация при известных амплитудах и частотах испытательных сигналов

3.1.1 Назначение директивы

Директива предназначена для определения коэффициентов передаточной матрицы объекта с двумя входами и двумя выходами при известных амплитудах и частотах испытательных сигналов:

Дан объект:

$$y(t) = W_u(s) \cdot u(t) + W_f(s) \cdot f(t), \tag{3.1}$$

где *y(t)* — *r*-мерный вектор измеряемых переменных; *u(t)* — *m*-мерный вектор управления; *f(t)* — μ-мерный вектор неизмеряемых внешних возмущений, для которых заданы границы возмущений $f_i^* \in R^\mu \ (i = \overline{1,2})$ такие, что $|f_i(t)| < f_i^* \ (i = \overline{1,2})$; $W_u(s)$ — передаточная матрица объекта по управлению, $W_f(s)$ — передаточная матрица объекта по внешнему возмущению, матрицы имеют вид:

$$W_u(s) = \begin{pmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) \end{pmatrix}; \tag{3.2}$$

$$W_f(s) = \begin{pmatrix} w_{11f}(s) & w_{12f}(s) \\ w_{21f}(s) & w_{22f}(s) \end{pmatrix}, \text{ где} \tag{3.3}$$

$$w_{11}(s) = \frac{k_{11}(s)}{d_{11}(s)} = \frac{k_{11}^{[\gamma_{11}]} s^{\gamma_{11}} + \ldots + k_{11}^{[1]} s + k_{11}^{[0]}}{d_{11}^{[n_{11}]} s^{n_{11}} + \ldots + d_{11}^{[1]} s + d_{11}^{[0]}} \quad w_{12}(s) = \frac{k_{12}(s)}{d_{12}(s)} = \frac{k_{12}^{[\gamma_{12}]} s^{\gamma_{12}} + \ldots + k_{12}^{[1]} s + k_{12}^{[0]}}{d_{12}^{[n_{12}]} s^{n_{12}} + \ldots + d_{12}^{[1]} s + d_{12}^{[0]}} \tag{3.4}$$

$$w_{21}(s) = \frac{k_{21}(s)}{d_{21}(s)} = \frac{k_{21}^{[\gamma_{21}]} s^{\gamma_{21}} + \ldots + k_{21}^{[1]} s + k_{21}^{[0]}}{d_{21}^{[n_{21}]} s^{n_{21}} + \ldots + d_{21}^{[1]} s + d_{21}^{[0]}} \quad w_{22}(s) = \frac{k_{22}(s)}{d_{22}(s)} = \frac{k_{22}^{[\gamma_{22}]} s^{\gamma_{22}} + \ldots + k_{22}^{[1]} s + k_{22}^{[0]}}{d_{22}^{[n_{22}]} s^{n_{22}} + \ldots + d_{22}^{[1]} s + d_{22}^{[0]}} \tag{3.5}$$

где $n_{11},\ n_{12},\ n_{21},\ n_{22}$ и $\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \gamma_{21},\ \gamma_{22}$ порядки полиномов знаменателей и числителей передаточной матрицы (3.2). Коэффициенты этих передаточных функций неизвестные числа.
$k_{11}^{[\gamma_{11}]},\ \ldots, k_{11}^{[0]};\ k_{12}^{[\gamma_{12}]},\ \ldots, k_{12}^{[0]};\ k_{21}^{[\gamma_{21}]},\ \ldots, k_{21}^{[0]};\ k_{22}^{[\gamma_{22}]},\ \ldots, k_{22}^{[0]}$ и
$d_{11}^{[n_{11}]},\ \ldots, d_{11}^{[0]};\ d_{12}^{[n_{12}]},\ \ldots, d_{12}^{[0]};\ d_{21}^{[n_{21}]},\ \ldots, d_{21}^{[0]};\ d_{22}^{[n_{22}]},\ \ldots, d_{22}^{[0]}$ — коэффициенты соответствующих передаточных функций (3.4) и (3.5), подлежащие определению.

В результате работы директивы находятся оценки коэффициентов соответствующих передаточных функций, Решение задачи сводится к нахождению неизвестных коэффициентов из частотных уравнений:

$$\sum_{\mu=1}^{\gamma_{11}} k_{11}^{[\mu-1]} (s_{11i})^{\mu-1} - (\alpha_{11}^{[i]} + j\beta_{11}^{[i]}) \sum_{\mu=0}^{n_{11}} d_{11}^{[\mu]} (s_{11i})^{[\mu]} = \alpha_{11}^{[i]} + j\beta_{11}^{[i]}; \tag{3.6}$$

$$\sum_{\mu=1}^{\gamma_{12}} k_{12}^{[\mu-1]} (s_{12j})^{\mu-1} - (\alpha_{12}^{[j]} + j\beta_{12}^{[j]}) \sum_{\mu=0}^{n_{12}} d_{12}^{[\mu]} (s_{12i})^{[\mu]} = \alpha_{12}^{[j]} + j\beta_{12}^{[j]}; \tag{3.7}$$

$$\sum_{\mu=1}^{\gamma_{21}} k_{21}^{[\mu-1]} (s_{21q})^{\mu-1} - (\alpha_{21}^{[q]} + j\beta_{21}^{[q]}) \sum_{\mu=0}^{n_{21}} d_{21}^{[\mu]} (s_{21q})^{[\mu]} = \alpha_{21}^{[q]} + j\beta_{21}^{[q]}; \tag{3.8}$$

$$\sum_{\mu=1}^{\gamma_{22}} k_{22}^{[\mu-1]}(s_{22p})^{\mu-1} - (\alpha_{22}^{[p]} + j\beta_{22}^{[p]})\sum_{\mu=0}^{n_{22}} d_{22}^{[\mu]}(s_{22p})^{[\mu]} = \alpha_{22}^{[p]} + j\beta_{22}^{[p]}; \tag{3.9}$$

где $s_{11i} = j\omega_{11i}$, $s_{12i} = j\omega_{12i}$, $s_{21q} = j\omega_{21q}$, $s_{22q} = j\omega_{22q}$.

$\alpha_{11}^{[i]} = \operatorname{Re} w_{11i}(j\omega_{11i}), \alpha_{12}^{[j]} = \operatorname{Re} w_{12j}(j\omega_{12j}), \alpha_{21}^{[q]} = \operatorname{Re} w_{21q}(j\omega_{21q}), \alpha_{22}^{[p]} = \operatorname{Re} w_{22p}(j\omega_{22p})$ — действительные части частотных параметров соответствующих передаточных функций;

$\beta_{11}^{[i]} = \operatorname{Im} w_{11i}(j\omega_{11i}), \beta_{12}^{[j]} = \operatorname{Im} w_{12j}(j\omega_{12j}), \beta_{21}^{[q]} = \operatorname{Im} w_{21q}(j\omega_{21q}), \beta_{22}^{[p]} = \operatorname{Im} w_{22p}(j\omega_{22p})$ — мнимые части частотных параметров соответствующих передаточных функций;

$i = \overline{1, n_{11}},\ j = \overline{1, n_{12}}, q = \overline{1, n_{21}}, p = \overline{1, n_{22}}$ — индексы соответствующих размерностей;

Для определения (идентификации) коэффициентов передаточной матрицы объекта используется метод частотных параметров, который можно разделить на несколько типов.

3.1.2 Параллельные испытания

При данном типе идентификации ко входам прикладываются испытательные сигналы:

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \rho_{11i}\sin(\omega_{11i}t) + \sum_{j=1}^{n_{12}} \rho_{11j}\sin(\omega_{11j}t); \tag{3.10}$$

$$u_2(t) = \sum_{q=1}^{n_{21}} \rho_{21q}\sin(\omega_{21q}t) + \sum_{p=1}^{n_{22}} \rho_{22p}\sin(\omega_{22p}t); \tag{3.11}$$

где $\omega_{11i}, \omega_{12j}, \omega_{21q}, \omega_{22p}$ — вектора испытательных частот; $\rho_{11i}, \rho_{12j}, \rho_{21q}, \rho_{22p}$ — вектора соответствующих амплитуд.

Прикладывая испытательные сигналы (3.10) и (3.11), то при отсутствии внешнего возмущения $f(t) = 0$ и $t \to \infty$ выходы объекта имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} y_1(t) = &\sum_{i=1}^{n_{11}} \rho_{11i}[\alpha_{11i}\sin(\omega_{11i}t) + \beta_{11i}\cos(\omega_{11i}t)] + \sum_{j=1}^{n_{12}} \rho_{12j}[\alpha_{12j}\sin(\omega_{12j}t) + \beta_{12j}\cos(\omega_{12j}t)] + \\ &+ \sum_{q=1}^{n_{21}} \rho_{21q}[\alpha_{21q}\sin(\omega_{11q}t) + \beta_{11q}\cos(\omega_{21q}t)] + \sum_{p=1}^{n_{22}} \rho_{22p}[\alpha_{12p}\sin(\omega_{22p}t) + \beta_{12p}\cos(\omega_{22p}t)]; \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) = &\sum_{i=1}^{n_{11}} \rho_{11i}[\alpha_{21i}\sin(\omega_{11i}t) + \beta_{21i}\cos(\omega_{11i}t)] + \sum_{j=1}^{n_{12}} \rho_{12j}[\alpha_{22j}\sin(\omega_{12j}t) + \beta_{22j}\cos(\omega_{12j}t)] + \\ &+ \sum_{q=1}^{n_{21}} \rho_{21q}[\alpha_{21q}\sin(\omega_{21q}t) + \beta_{21q}\cos(\omega_{21q}t)] + \sum_{p=1}^{n_{22}} \rho_{22p}[\alpha_{22p}\sin(\omega_{22p}t) + \beta_{22p}\cos(\omega_{22p}t)]; \end{aligned} \tag{3.13}$$

Использование входов (3.12), (3.13) называется параллельными испытаниями.

Рассмотрим полиномы знаменателей передаточных функций (3.4) и (3.5) объекта (3.1) $d_{11}(s),\ d_{12}(s),\ d_{21}(s),\ d_{22}(s)$. Обозначим модули корней этих полиномов, как $s_{11}, s_{12},\ s_{21},\ s_{22}$. Эти числа лежат в интервалах:

$$l_{11} = [\min s_{11},\ \max s_{11}], l_{21} = [\min s_{21},\ \max s_{21}]; \tag{3.12}$$

$$l_{12} = [\min s_{12},\ \max s_{12}], l_{22} = [\min s_{22},\ \max s_{22}]; \tag{3.13}$$

Пусть начала и длины интервалов l_{11} и l_{21} близки, тогда в (3.12) можно положить $u_{21}(t) = 0$. Аналогичным свойством обладают интервалы l_{12} и l_{22}, и соответственно $u_{12}(t) = 0$.

Таким образом, параллельные испытания для таких случаев осуществляются следующими испытательными сигналами:

$$u_1(t)=\sum_{i=1}^{n_1}\rho_{1i}\sin(\omega_{1i}t); \tag{3.14}$$

$$u_2(t)=\sum_{i=1}^{n_1}\rho_{2i}\sin(\omega_{2i}t); \tag{3.15}$$

где $n_1=\max[n_{11},n_{21}], n_2=[n_{12},\ n_{22}]$ — соответствующие максимальные степени знаменателей; $\rho_{1k},\ \rho_{2p}$ и $\omega_{1k},\omega_{2p},\quad (k=\overline{1,n_1};p=\overline{1,n_2}),$ — амплитуды и частоты соответствующих испытательных сигналов;

3.1.3 Последовательные испытания

Директива имеет возможность производить не только параллельные испытания, но и последовательные испытания. Последовательные испытания делятся на двухинтервальные и четырехинтервальные.

3.1.3.1 Двухинтервальные последовательные испытания

Первый вид:

при двухинтервальных последовательны испытаниях первого вида, на первом интервале ко входам объекта прикладываются испытательные сигналы:

$$u_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{11}}\rho_{11i}\sin(\omega_{11i}t); \tag{3.16}$$

$$u_2(t)=\sum_{i=1}^{n_{12}}\rho_{12i}\sin(\omega_{12i}t); \tag{3.17}$$

где $t\in[t_0,t_1)$ — время первого интервала.

На данном интервале выходы объекта:

$$y_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{11}}\rho_{11i}[\alpha_{11i}\sin(\omega_{11i}t)+\beta_{11i}\cos(\omega_{11i}t)]+\sum_{i=1}^{n_{12}}\rho_{12i}[\alpha_{12i}\sin(\omega_{12i}t)+\beta_{12i}\cos(\omega_{12i}t)]; \tag{3.18}$$

$$y_2(t)=\sum_{i=1}^{n_{11}}\rho_{11i}[\alpha_{11i}\sin(\omega_{11i}t)+\beta_{11i}\cos(\omega_{11i}t)]+\sum_{i=1}^{n_{12}}\rho_{12i}[\alpha_{12i}\sin(\omega_{12i}t)+\beta_{12i}\cos(\omega_{12i}t)]; \tag{3.19}$$

Начиная с момента времени t_1, к объекту прикладывается испытательные сигналы:

$$u_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{21}}\rho_{21i}\sin(\omega_{21i}t); \tag{3.20}$$

$$u_2(t)=\sum_{i=1}^{n_{22}}\rho_{22i}\sin(\omega_{22i}t); \tag{3.21}$$

где $t\in[t_1,t_2)$ — время второго интервала.

Выходы объекта на данном интервале:

$$y_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{21}}\rho_{21i}[\alpha_{21i}\sin(\omega_{21i}t)+\beta_{21i}\cos(\omega_{21i}t)]+\sum_{i=1}^{n_{22}}\rho_{22i}[\alpha_{22i}\sin(\omega_{22i}t)+\beta_{22i}\cos(\omega_{22i}t)]; \qquad (3.22)$$

$$y_2(t)=\sum_{i=1}^{n_{21}}\rho_{21i}[\alpha_{21i}\sin(\omega_{21i}t)+\beta_{21i}\cos(\omega_{21i}t)]+\sum_{i=1}^{n_{22}}\rho_{22i}[\alpha_{22i}\sin(\omega_{22i}t)+\beta_{22i}\cos(\omega_{22i}t)]; \qquad (3.23)$$

Второй вид:
при данном виде испытательные сигналы следующие:

$$u_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{11}}\rho_{11i}\sin(\omega_{11i}t)+\sum_{i=1}^{n_{21}}\rho_{21i}\sin(\omega_{21i}t); \qquad (3.24)$$

$$u_2(t)=0; \qquad (3.25)$$

где $t\in[t_0,t_1)$ — время первого интервала.
Выходы объекта в данном случае, будут следующие:

$$y_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{21}}\rho_{11i}[\alpha_{11i}\sin(\omega_{11i}t)+\beta_{11i}\cos(\omega_{11i}t)]+\sum_{i=1}^{n_{21}}\rho_{21i}[\alpha_{21i}\sin(\omega_{21i}t)+\beta_{21i}\cos(\omega_{21i}t)]; \qquad (3.26)$$

$$y_2(t)=\sum_{i=1}^{n_{21}}\rho_{21i}[\alpha_{21i}\sin(\omega_{21i}t)+\beta_{21i}\cos(\omega_{21i}t)]+\sum_{i=1}^{n_{21}}\rho_{11i}[\alpha_{21i}\sin(\omega_{11i}t)+\beta_{21i}\cos(\omega_{11i}t)]; \qquad (3.27)$$

Начиная с момента времени t_1, к объекту прикладывается сигнал:

$$u_1(t)=0; \qquad (3.28)$$

$$u_2(t)=\sum_{i=1}^{n_{12}}\rho_{12i}\sin(\omega_{12i}t)+\sum_{i=1}^{n_{22}}\rho_{22i}\sin(\omega_{22i}t); \qquad (3.29)$$

где $t\in[t_1,t_2)$ — время второго интервала.
Выходы объекта в данном случае, будут:

$$y_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{12}}\rho_{12i}[\alpha_{12i}\sin(\omega_{12i}t)+\beta_{12i}\cos(\omega_{12i}t)]+\sum_{i=1}^{n_{22}}\rho_{22i}[\alpha_{12i}\sin(\omega_{22i}t)+\beta_{12i}\cos(\omega_{22i}t)]; \qquad (3.30)$$

$$y_2(t)=\sum_{i=1}^{n_{22}}\rho_{22i}[\alpha_{22i}\sin(\omega_{22i}t)+\beta_{22i}\cos(\omega_{22i}t)]+\sum_{i=1}^{n_{12}}\rho_{12i}[\alpha_{22i}\sin(\omega_{12i}t)+\beta_{22i}\cos(\omega_{12i}t)]; \qquad (3.31)$$

3.1.3.2 Четырехинтервальные последовательные испытания
Первый интервал:
к входам объекта прикладываются испытательные сигналы:

$$u_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{11}}\rho_{11i}\sin(\omega_{11i}t); \qquad (3.32)$$

$$u_2(t)=0; \qquad (3.33)$$

где $t\in[t_0,t_1)$ — время первого интервала.
Выходы объекта при этом будут следующие:

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \rho_{11i}[\alpha_{11i} \sin(\omega_{11i} t) + \beta_{11i} \cos(\omega_{11i} t)]; \tag{3.34}$$

$$y_2(t) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \rho_{11i}[\alpha_{11i} \sin(\omega_{11i} t) + \beta_{11i} \cos(\omega_{11i} t)]; \tag{3.35}$$

Второй интервал:
на втором интервале входные сигналы:

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^{n_{21}} \rho_{21i} \sin(\omega_{21i} t); \tag{3.36}$$

$$u_2(t) = 0; \tag{3.37}$$

где $t \in [t_1, t_2)$ — время второго интервала.
Выходы объекта при этом:

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{n_{21}} \rho_{21i}[\alpha_{21i} \sin(\omega_{21i} t) + \beta_{21i} \cos(\omega_{21i} t)]; \tag{3.38}$$

$$y_2(t) = \sum_{i=1}^{n_{21}} \rho_{21i}[\alpha_{21i} \sin(\omega_{21i} t) + \beta_{21i} \cos(\omega_{21i} t)]; \tag{3.39}$$

Третий интервал:
входные испытательные сигналы:

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^{n_{12}} \rho_{12i} \sin(\omega_{12i} t); \tag{3.40}$$

$$u_2(t) = 0; \tag{3.41}$$

где $t \in [t_2, t_3)$ — время третьего интервала.
Выходы объекта:

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{n_{12}} \rho_{12i}[\alpha_{12i} \sin(\omega_{12i} t) + \beta_{12i} \cos(\omega_{12i} t)]; \tag{3.42}$$

$$y_2(t) = \sum_{i=1}^{n_{12}} \rho_{12i}[\alpha_{12i} \sin(\omega_{12i} t) + \beta_{12i} \cos(\omega_{12i} t)]; \tag{3.43}$$

Четвертый интервал:
входные испытательные сигналы:

$$u_1(t) = 0; \tag{3.44}$$

$$u_2(t) = \sum_{i=1}^{n_{22}} \rho_{22i} \sin(\omega_{22i} t); \tag{3.45}$$

Выходы объекта:

$$y_1(t)=\sum_{i=1}^{n_{22}}\rho_{22i}[\alpha_{22i}\sin(\omega_{22i}t)+\beta_{22i}\cos(\omega_{22i}t)]; \tag{3.46}$$

$$y_2(t)=\sum_{i=1}^{n_{22}}\rho_{22i}[\alpha_{22i}\sin(\omega_{22i}t)+\beta_{22i}\cos(\omega_{22i}t)]; \tag{3.47}$$

$t\in[t_3,t_4)$ — время четвертого интервала

3.1.4 Структура директивы и назначение модулей
Директива имеет следующую структуру:
<d123sumi4a>=<интерфейс><df123sumi4a> (3.48)
<df123sumi4a>=<omm4><dist><lsim><fdppla1><freq><decren4>
3.1.4.1 Дан объект вида (3.1), необходимо найти оценки коэффициентов передаточной матрицы (3.2) в процессе его работы при постоянном воздействии внешнего возмущения.
Вначале выполнения главного модуля программы производится преобразование объекта (3.1) к форме Коши.

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+Mf(t),\\ \quad y(t)=Cx(t)\end{cases} \tag{3.49}$$

где *x(t)* — *n*-мерный вектор переменных состояния объекта; *A*, *B*, *C* и *M* — матрицы чисел соответствующих размеров.
Данное преобразование осуществляется с помощью стандартных функций системы Matlab. Оно необходимо для того, чтобы осуществлять моделирование объекта в форме Коши.
3.1.4.2 После начала выполнения главного модуля вызывается функция **omm4**, которая необходима для того, чтобы частоты были кратными интервалу дискретности *h*. После чего формируются испытательные сигналы:

$$u_1(t)=\sum_{k=1}^{n_1}\rho_{1k}\sin(\omega_{1k}t); \tag{3.50}$$

$$u_2(t)=\sum_{i=1}^{n_2}\rho_{2k}\sin(\omega_{2k}t); \tag{3.51}$$

где n_1,n_2 — количество частот и амплитуд испытательного сигнала, ρ_1,ρ_2 — вектора амплитуд испытательных сигналов.
3.1.4.3 Формирование внешнего возмущения, воздействующего на объект осуществляется функцией **dist**.
Внешнее возмущение *f(t)*, формируемое модулем **dist** может быть в виде ступенчатой или гармонической функции, с заданными параметрами, либо меандр с заданными амплитудой и длительностью перехода от положительных постоянных значений к отрицательным.
3.1.4.4 Моделирование процесса воздействия испытательных сигналов и внешнего возмущения на объект осуществляется модулем **lsim**.
Результатом выполнения модуля **lsim** являются функции выходов объекта $y_1(t)$ и $y_2(t)$, определенные на интервале [0, *N*], где *N*-число интервалов дискретности *h*. Величина *N* задается путем задания числа периодов фильтрации *Ptau* минимальной из частот испытательного сигналов.
3.1.4.5 Программой для определения частотных параметров служит функция **fdppla1**, которая для какой либо из частотных передаточных функций объекта, используя пары функций $y_1(t),\ u_1(t);\ y_2(t),\ u_1(t);\ y_1(t),\ u_2(t);\ y_2(t),\ u_2(t),$ определенных на интервале [N_0, *N*], где N_0 — число интервалов дискретности *h*, находит их частотные параметры.

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha_{yij}\alpha_{uij} + \beta_{yij}\beta_{uij}}{\alpha_u^2 + \beta_u^2}; \quad (3.52)$$

$$\beta_{ij} = \frac{\alpha_{uij}\beta_{yij} - \alpha_{yij}\beta_{uij}}{\alpha_u^2 + \beta_u^2}; \quad (3.53)$$

где α_y, β_y — результаты преобразования Фурье по выходным сигналам, α_y, β_y — результаты преобразования Фурье по входным сигналам.
3.1.4.6 На предпоследнем этапе директивы с помощью модуля **freq** путем решения частотных уравнений (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) находятся, используя частотные параметры, коэффициенты передаточной матрицы объекта (3.2).
1.1.4.7 Последним этапом директивы является модуль **decren**, с помощью которого понижаются порядки числителей передаточных функций (1.4), (1.5) составляющих передаточную матрицу объекта (1.2). На этом работа директивы завершается.

3.2 Директива идентификации с самонастройкой длительности идентификации и амплитуд испытательных сигналов

3.2.1 Назначение директивы
Директива является дополнением и предназначена для идентификации коэффициентов передаточной матрицы объекта с определением момента окончания идентификации и нахождением амплитуд испытательного сигнала при ограничениях на входы и выходы объекта.

1.2.2 Алгоритм
<d123sumi4sad4=<интерфейс><df123sumi4sad4> (3.54)
<df123sumi4asad4>=<sumitunamp><df123sumi4sd2a>
Где **sumitunamp –** модуль настройки амплитуд.
Пусть на входы и выходы объекта накладываются ограничения

$$|y_1(t)| \le y_1^*, \ |y_2(t)| \le y_2^*, \ |u_1(t)| \le u_1^*, \ |u_2(t)| \le u_2^*; \quad (3.55)$$

где $y_1^*, \ y_2^*, \ u_1^*, \ u_2^*$ — заданные числа.
Положим, для простоты, что испытательные сигналы имеют вид

$$u_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \sin(\omega_i t); \quad (3.56)$$

$$u_2(t) = 0; \quad (3.57)$$

Выходы объекта при $f(t) = 0$ и $t \to \infty$ имеют вид

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i[\alpha_{11i}\sin(\omega_i t) + \beta_{11i}\cos(\omega_i t)] = \sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{11i}\sin(\omega_i t + \varphi_{1i}) \quad (3.58)$$

$$y_2(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i[\alpha_{21i}\sin(\omega_i t) + \beta_{21i}\cos(\omega_i t)] = \sum_{i=1}^{n} \rho_i a_{21i}\sin(\omega_i t + \varphi_{2i}) \quad (3.59)$$

где $a_{ik} = \sqrt{\alpha_{ki}^2 + \beta_{ki}^2}, \alpha_{ki}$ и β_{ki}, $(k = \overline{1,2}, i = \overline{1,n})$ — частотные параметры передаточных функций $w_{11}(s), w_{21}(s)$.
Суть алгоритма настройки амплитуд испытательных сигналов состоит в следующем. Задаваясь достаточно большими значениями амплитуд так, чтобы выполнялись условия (3.55), и находим «грубые» оценки частотных параметров, которые не позволяют идентифицировать коэффициенты передаточных функций $w_{11}(s), w_{21}(s)$. Время идентификации этих оценок определяется из

частотных условий их сходимости. Неравенства (3.55) выполняются если найти амплитуды из уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i\hat{a}_{11i}=y_1^*,\ \sum_{i=1}^{n}\rho_i\hat{a}_{21i}=y_2^*,\ \sum_{i=1}^{n}\rho_i=u_1^*. \tag{3.60}$$

где числа $\hat{a}_{11},\ \hat{a}_{21}$ — определяются по оценкам частотных параметров.

Найдя амплитуды из этих уравнений, формируются новые испытательные сигналы (3.56)(3.57), прикладываем их к объекту и идентифицируем его. При этом требования (3.55) будут выполнятся с точностью до разности «грубых» значениях частотных параметров и частотных параметров, при которых достигается необходимая точность идентификации коэффициентов передаточных функций $w_{11}(s), w_{21}(s)$. Однако, при определении амплитуд может случится так, что будет нарушено условие близости к равному вкладу. Последнее означает что разности:

$$l_{yi}^{(11)}=c_y^{(11)}-\rho_i a_{11i},\ l_{yi}^{(21)}=c_y^{(21)}-\rho_i a_{21i},\ l_{ui}^{(11)}=l_{ui}^{(21)}=c_u^{(11)}-\rho_i, \tag{3.61}$$

где $c_y^{(11)}=\dfrac{y_1^*}{2n},\ c_y^{(21)}=\dfrac{y_2^*}{2n},\ c_u^{(11)}=\dfrac{u_1^*}{2n}$ — наименьшие значения.

Точное решение этой задачи не существует, так как число неизвестных больше, чем число уравнений. Введем относительные отклонения от равного вклада:

$$e_{yi}^{(11)}=\frac{l_{yi}^{(11)}}{c_y^{(11)}},\ e_{yi}^{(21)}=\frac{l_{yi}^{(21)}}{c_y^{(21)}},\ e_{ui}^{(11)}=e_{ui}^{(21)}=\frac{l_{ui}^{(11)}}{c_u^{(11)}}, \tag{3.62}$$

и отношения этих относительных отклонений:

$$e_{ri}^{(11)}=\frac{e_{yi}^{(11)}}{e_{ui}^{(11)}},\ e_{ri}^{(21)}=\frac{l_{yi}^{(21)}}{c_{ui}^{(21)}}, \tag{3.63}$$

где $e_{ri}^{(11)},\ e_{ri}^{(21)},\ (i=\overline{1,n})$ — характеризует отношение отклонений от равного вклада по входам и выходам для каждой частоты.

В программе полагается независимость этих чисел от частоты.

$$e_{ri}^{(11)}=e_r^{(11)},\ e_{ri}^{(21)}=e_r^{(21)}, \tag{3.64}$$

и вычисляются амплитуды:

$$\rho_i^{(11)}=\frac{c_u^{(11)}c_y^{(11)}(1+e_r^{(11)})}{c_y^{(11)}+c_u^{(11)}a_{11i}},\ \rho_i^{(21)}=\frac{c_u^{(21)}c_y^{(21)}(1+e_r^{(21)})}{c_y^{(21)}+c_u^{(21)}a_{21i}} \tag{3.65}$$

где $a_{11i}=\left|w_{11}(j\omega_i)\right|,\ a_{21i}=\left|w_{21}(j\omega_i)\right|,\ (i=\overline{1,n})$. Затем находится сумма

$$\bar{\rho}_i=\rho_i^{(11)}+\rho_i^{(21)}, \tag{3.66}$$

и вычисляются оценки выходов объекта $\bar{y}_1=\sum_{i=1}^{n}\bar{\rho}_i a_{11i},\ \bar{y}_2=\sum_{i=1}^{n}\bar{\rho}_i a_{21i},\ \bar{u}_1=\sum_{i=1}^{n}\bar{\rho}_i$, и вызванные испытательным сигналом $u_1(t)=\sum_{i=1}^{n}\bar{\rho}_i\sin(\omega_i t)$.

Для сравнения этих оценок с допусками $y_1^*,\ y_2^*$ находятся отношения:

$$\sigma_{yi}=\frac{\bar{y}_i}{y_i^*},\sigma_{ui}=\frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_i^*},\ (i=\overline{1,2}), \tag{3.67}$$

которые задают число $\sigma=\max[\sigma_{y1},\sigma_{y2},\sigma_{u1},\sigma_{u2}]$.

Если $\sigma>1$, то искомые амплитуды $\rho_i=\dfrac{\bar{\rho}_i}{\sigma}$.

Исходные данные и результат программы **sumitunamp** [rho1,rho2]=sumitunamp(A,B,C,D,dbp11,dbp12,dbp21,dbp22,h,om1,om2,rho1,y1_ , y2_ , u1_ , u2_ , Ptau,P1amax,epsr11,epsr21,epsr12,epsr22,Tbegin,flag) (3.68)

где rho1 и rho2 вектора амплитуд испытательных сигналов om1 и om2 вектора частот испытательных сигналов epsr — отношения отклонений равного вклада.
P1amax — момент времени окончания процесса настройки амплитуд.

4 Модули директивы «Идентификация»

4.1 Программа (модуль) определения частотных параметров (fdppla1)

4.1.1 Назначение модуля
Модуль определения частотных параметров объекта по его входам и выходам. Результатом работы программы являются частотные параметры передаточной матрицы (3.2) объекта (3.1).

4.1.2 Алгоритм
Пусть известны функции испытательного сигнала — *v(t)* и выходного сигнала — *y(t)* объекта (3.1), заданные в дискретные моменты времени $t_i = ih,\ (i = \overline{N_0, N})$, где N_0 и N — заданные целые числа. Известны вектора частот (3.9) и (3.9'), на которых определятся частотные параметры, заданы размерность n_p векторов частотных параметров, которая может быть меньше размерности n вектора частот ($n_p \le n$). Вначале вычисляются частотные параметры выхода $ay(\omega_q)$ и $by(\omega_q)$ и входа $au(\omega_q)$ и $bu(\omega_q),\ \ (q = \overline{1, n_p})$.

$$ay(\omega_q) = \sum_{i=N_0}^{N} y(ih)\sin(\omega_q ih),\ by(\omega_q) = \sum_{i=N_0}^{N} y(ih)\cos(\omega_q ih), \tag{4.1}$$

$$au(\omega_q) = \sum_{i=N_0}^{N} u(ih)\sin(\omega_q ih),\ bu(\omega_q) = \sum_{i=N_0}^{N} u(ih)\cos(\omega_q ih), \tag{4.2}$$

Используя эти вектора находятся вектора *valf*, *vbet* частотных параметров объекта (3.1) по формулам:

$$valf\,(q) = \frac{ay(q)au(q) + by(q)bu(q)}{au(q)au(q) + bu(q)bu(q)} \tag{4.3}$$

$$vbet(q) = \frac{-ay(q)bu(q) + by(q)au(q)}{au(q)au(q) + bu(q)bu(q)} \tag{4.4}$$

4.1.3 Исходные данные и результаты

[valf,vbet]=fdppla1(y,u,om,np,h,N,N0); (4.5)

Входные данные:
y — функция первого или второго выхода объекта (3.1);
u — функция первого или второго входа объекта (3.1);

om — вектор частот (3.9) или (3.9’) испытательного сигнала на которых определяются частотные параметры объекта (3.1);
np — примерный порядок объекта;
h — период дискретности;
N0 — такт, с которого начинается расчет частотных параметров (4.1), (4.2) объекта (3.1);
N — конечный такт определения частотных параметров объекта (3.1);
Выходные данные:
valf — вектор частотных параметров (4.3);
vbet — вектор частотных параметров (4.4).

4.2 Программа (модуль) решения частотных уравнений (freq4d и freq)

4.2.1 Назначение модуля
Программа предназначена для нахождения коэффициентов передаточной функции дискретного объекта (freqd4) и непрерывного объекта (freq) по значениям его частотных параметров (4.3), (4.4). В результате выполнения вычисляются вектора коэффициентов передаточных функций (3.4), (3.5).

4.2.2 Алгоритм

Исходные коэффициенты передаточной функции дискретного объекта вида

$$W(z)=\frac{k_{n-1}z^{n-1}+\ldots+k_1z+k_0}{d_nz^n+\ldots+d_1z+d_0},\ d_0=1 \tag{4.6}$$

находятся в результате решения частотного уравнения.

$$\sum_{i=1}^{n_p}k_{i-1}s_p^{i-1}-(\alpha_p+j\beta_p)\sum_{i=1}^{n_p}d_is_p^i=\alpha_p+j\beta_p,\ (p=\overline{1,n}), \tag{4.7}$$

где $s_p=e^{j\omega_ph},\ (p=\overline{1,n})$.

Уравнения (4.7) представляется в матричной форме как:

$$Mx=b, \tag{4.8}$$

где $b=[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n]^T$ — $2n$-мерный вектор правых частей уравнения (4.7),
$x=[k_{n-1},\ \ldots,\ k_0,\ d_n,\ \ldots,\ d_1]^T$ — $2n$-мерный вектор искомых переменных.
Матрица M формируется следующим образом: вначале формируется матрица m_1 коэффициентов при неизвестных $k_i,\ (i=\overline{0,n-1})$. Элементы этой матрицы

$$m_{1pi}=s_p^{i-1},\ (p,i=\overline{1,n}). \tag{4.9}$$

Затем формируется матрица m_2 коэффициентов при неизвестных $d_i,\ (i=\overline{1,n})$. Элементы этой матрицы.

$$m_{2pi}=-(\alpha_p+j\beta_p)s_p^i,\ (p,i=\overline{1,n}). \tag{4.10}$$

После этого формируется матрица m_c размеров nx$2n$, объединяющая матрицы m_1 и m_2 m_1

$$m_c=[m_1,\ m_2], \tag{4.11}$$

после чего строится матрица M размеров $2n$x$2n$ следующего вида:

$$M=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(m_c)\\ \mathrm{Im}(m_c)\end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Решая уравнение (4.8), находим с учетом вектора *x* искомые коэффициенты передаточной функции дискретного объекта.
Алгоритм программы **freq** отличается от рассмотренного выше тем, что производится замена:

$$s_p = e^{j\omega_p h} \to s_p = j\omega_p, \ (p = \overline{1,n}). \qquad (4.13)$$

4.1.3 Исходные данные и результаты
[vk,vd]=freq(valf,vbet,np,om) или [vkd,vdd]=freqd4(valf,vbet,np,om,h) (4.14)

Входные данные:
valf — вектор частотных параметров (4.3);
vbet — вектор частотных параметров (4.4).
om — вектор частот испытательного сигнала на которых определяются частотные параметры объекта (3.1);
np — примерный порядок объекта;
h — период дискретности.
Выходные данные:
vk,vd — оценки коэффициентов передаточной функции непрерывного объекта;
vkd,vdd — оценки коэффициентов передаточной функции объекта (4.6).

5 Директива «Адаптивное управление» (d323sumi6)

5.1 Назначение директивы

Директива предназначена для управления объектом с неизвестными и медленноменяющимися параметрами в условиях неизвестных внешних возмущений.

5.2 Алгоритм

Директива имеет следующую структуру:

<d323sumi6> = <df123sumi4><asrmi3m><formzamp><fdpzamp><fdpplant><idenpp>

<fdpzamp><lsim><Forsu1sumi> (5.1)

Модуль **df123sumi4** предназначен для идентификации объекта.
Используя оценки коэффициентов объекта, получаемые с помощью модуля df123sumi4, модуль asrmi3m находит матрицы регулятора:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t); \end{cases} \qquad (5.2)$$

Модуль **formzamp** формирует уравнение объекта, замкнутого регулятором, используя истинные уравнения объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) - v(t)] + Mf(t), \\ y(t) = Cx(t); \end{cases} \qquad (5.3)$$

и уравнение регулятора (5.2). В уравнениях (5.2) $v(t)$ — двумерный вектор испытательных сигналов.
С помощью модуля **fdpzamp** находятся частотные параметры системы (5.2), (5.2).

Модуль **fdpplant** дает частотные параметры объекта, используя которые модуль **idenpp** идентифицирует объект, замкнутый регулятором.

6 Модули директивы «Адаптивное управление»

6.1 Программа (модуль) формирования уравнений замкнутой системы (formzamp)

6.1.1 Назначение модуля

Программа предназначена для формирования на основе уравнений (5.2), (5.3) уравнений замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_{sp}(t) = A_{sp}x_{sp}(t) + B_{sp}v_{sp}(t), \\ y_{sp}(t) = C_{sp}x_{sp}(t) + D_{sp}v_{sp}(t); \end{cases} \tag{6.1}$$

где $v_{sp}(t) = [v(t)^T,\ f(t)^T]^T$, $y_{sp}(t) = [y(t)^T,\ u(t)^T]^T$, $x_{sp}(t) = [x(t)^T,\ x_c(t)^T]^T$.

6.1.2 Алгоритм

Искомые матрицы A_{sp}, B_{sp}, C_{sp}, D_{sp} находятся как:

$$A_{sp} = \begin{pmatrix} A + BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{pmatrix},\ B_{sp} = \begin{pmatrix} -B & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_{sp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_cC & C_c \end{pmatrix},\ D_{sp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Приведем вывод матриц (6.2).

Исключая из (5.1) и (5.2) вектора *y(t)* и *u(t)* получим:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[C_cx_c(t) + D_cy(t) - v(t)] + Mf(t) = (A + BD_cC)x(t) + BC_cx_c(t) - Bv(t) + Mf(t); \tag{6.3}$$

$$\dot{x}_c(t) = A_cx_c(t) + B_cCx(t) = B_cCx(t) + A_cx_c(t); \tag{6.3'}$$

$$y_{sp}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ D_cC & C_c \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} v(t) \\ f(t) \end{bmatrix}. \tag{6.3''}$$

6.1.3 Исходные данные и результаты

[Asp, Bsp, Csp, Dsp]=formzamp(A,B,C,D,Ac,Bc,Cc,Dc) (6.4)

Входные данные:

$A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times 2}$, $C \in R^{2\times n}$, $D \in R^{2\times 2}$ — матрицы объекта формы Коши вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot [u(t) - v(t)], \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t); \end{cases} \tag{4.5}$$

$A_c \in R^{n_c\times n_c}$, $B_c \in R^{n_c\times 2}$, $C_c \in R^{2\times n_c}$, $D_c \in R^{2\times 2}$ — матрицы регулятора в форме Коши (5.2).

Выходные данные:

$A_{sp} \in R^{n_{sp}\times n_{sp}}$, $B_{sp} \in R^{n_{sp}\times 4}$, $C_{sp} \in R^{4\times n_{sp}}$, $D_{sp} \in R^{4\times 4}$ — матрицы замкнутой системы (6.1).

6.2 Программа (модуль) определения частотных параметров замкнутой системы (fdpzamp)

6.2.1 Назначение модуля

Программа служит для вычисления частотных параметров системы, описываемой уравнениями (6.1). Она аналогична первой части модуля **df123sumi4** для определения частотных параметров объекта.

6.2.2 Алгоритм

Алгоритм модуля повторяет алгоритм определения частотных параметров объекта, но примененный к системе (6.1).

6.2.3 Исходные данные и результаты

[vay11,vby11,vay21,vby21,vay12,vby12,vay22,vby22,om1,om2,Tend,x]=fdpzamp(Asp,Bsp, Csp,Dsp,dbp11,dbp12,dbp21,dbp22,par,h,om1,om2,rho1,rho2,Ptau,Tfi,Tbegin,x,flag) (6.6)

Входные данные:

$A_{sp} \in R^{n_{sp}\times n_{sp}}$, $B_{sp} \in R^{n_{sp}\times 4}$, $C_{sp} \in R^{4\times n_{sp}}$, $D_{sp} \in R^{4\times 4}$ — матрицы замкнутой системы (6.1);

$dbp_{i,j} \quad (i, j = \overline{1,2})$ — предполагаемые степени полиномов знаменателей передаточных функций $w_{i,j}, \quad (i, j = \overline{1,2})$;

om1 и om2; rho1 и rho2 — соответственно наборы частот и амплитуд испытательных сигналов;

Ptau, Tfi, Tbegin, x, flag — параметры определения частотных параметров.

Выходные данные:

$vay_{i,j}$ и $vby_{i,j}, \quad (i, j = \overline{1,2})$ — оценки частотных параметров передаточных функций $w_{i,j}, \quad (i, j = \overline{1,2})$;

om1 и om2 — преобразованные наборы частот;

Tend и x — параметры определения частотных параметров.

6.3 Программа (модуль) определения частотных параметров объекта, замкнутого регулятором (fdpplant)

6.3.1 Назначение модуля

Программа предназначена для вычисления частотных параметров объекта по частотным параметрам замкнутой системы и частотным параметрам известного регулятора.

6.3.2 Алгоритм

В основе алгоритма лежит следующая формула, связывающая передаточную матрицу объекта — $W_p(s)$ с передаточной матрицей замкнутой системы — $W_{sp}(s)$ и передаточной матрицей регулятора — $W_c(s)$:

$$W_p(s) = W_{sp}(s)[W_c(s)W_{sp}(s) - E]^{-1}, \tag{6.7}$$

где E — единичная матрица вида $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Приведем вывод этой формулы.

Полагая, для простоты, $f(t) = 0$, запишем на основе (5.3) и (5.2):

$$y(t) = C(E \cdot s - A)^{-1} B\left[u(t) - v(t)\right] = W_p(s)[u(t) - v(t)];$$

$$u(t) = [C_c(E \cdot s - A)^{-1} B_c + D_c]y(t) = W_c(s)y(t);$$

Отсюда:

$$y(t) = W_p(\mathrm{s})[u(t) - v(t)] = W_p(\mathrm{s})W_c(s)y(t) - W_p(s)v(t)$$

$$\text{или } y(t) = -[E + W_p(s)W_c(s)]^{-1}W_p(s)v(t) = W_{sp}(s)v(t).$$

Из равенства $W_{sp}(s) = -[E + W_p(s)W_c(s)]^{-1}W_p(s)$ следует:

$$[E + W_p(s)W_c(s)]W_{sp}(s) = -W_p(s).$$

Отсюда получим формулу (6.7). Подставляя в (6.7) значения $W_{sp}(j\omega_i)$ оценок частотных параметров замкнутой системы и значения частотных параметров регулятора, находим искомые частотные параметры объекта.

6.3.3 Исходные данные и результаты

[vwpv1,vwpv2,vwpv3]=fdpplant(vay11,vby11,vay21,
vby21,vay12,vby12,vay22,vby22,om1,om2,Ac,Bc,Cc,Dc) (6.8)

Входные данные:

$vay_{i,j}$ и $vby_{i,j}$, $(i, j = \overline{1,2})$ — оценки частотных параметров передаточных функций $w_{i,j}$, $(i, j = \overline{1,2})$ замкнутой системы;

om1 и om2 — наборы частот испытательных сигналов;

$A_c \in R^{n_c \times n_c}$, $B_c \in R^{n_c \times 2}$, $C_c \in R^{2 \times n_c}$, $D_c \in R^{2 \times 2}$ — матрицы регулятора в форме Коши (3.1).

Выходные данные:

$vwpv_i$ — значения передаточной матрицы объекта на испытательных частотах.

6.4 Программа (модуль) идентификации объекта по матрицам его частотных параметров (idenpp)

6.4.1 Назначение модуля

Программа предназначена для определения коэффициентов передаточной матрицы объекта по оценкам его частотных параметров.

6.4.2 Алгоритм

Выберем из матрицы $vwpv_i$ элементы из первой строки и первого столбца. Вещественные и мнимые части этих элементов являются оценками частотных параметров передаточной функции $w_{11}(s)$ из передаточной матрицы объекта.

Используя программу определения коэффициентов передаточных функций по частотным параметрам (модуль **freq**), находим коэффициенты передаточной функции $w_{p11}(s)$. Повторяя изложенное для первой строки и второго столбца матриц $vwpv_i$, получим передаточную функцию $w_{p12}(s)$. Аналогично получим передаточные функции $w_{p21}(s)$ и $w_{p22}(s)$.

6.4.3 Исходные данные и результаты

[vwp11,vwp21,vwp12,vwp22]=idenpp(vwpv1,vwpv2,vwpv3,om1) (6.9)

Входные данные:

$vwpv_i$ — значения передаточной матрицы объекта на испытательных частотах;

om1 — набор частот испытательных сигналов.

Выходные данные:

$vwp_{i,j}$, $(i, j = \overline{1,2})$ — элементы передаточной матрицы объекта.

Литература:

1) Alexandrov A. G. and S. Yu. Panin (1997). GAMMA-1PC as CACSD tools for practisins engineers. Proceedings of 7th Symposium on Computer Aided Control System Design (CACSD’97), Gent, Belgium, P. 287-292

2) MATLAB User's Guide, MathWorks, 2001

3) Alexandrov A. G., Yu. F. Orlov and L. S. Mikhailova (2009). ADAPLAB-3: finite-frequency identification and adaptation toolbox for MATLAB. Preprints of the 15th IFAC Symposium on System Identification. Saint-Malo, France, P. 498-503

4) Alexandrov A. G. (2005). Finite-frequency identification: selftuning of test signal. Preprints of the 16th IFAC World Congress, Prague, CD_ROM

5) Ljung L. (1987). System Identification — Theory for the User. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.