УДК 681.3.068(03)

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КОНЕЧНО-ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ И АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

А.Г. Александров
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная, 65
E-mail: alex7@ipu.rssi.ru

Ю.Ф. Орлов
Электростальский политехнический институт (филиал) Московского государственного института стали и сплавов (технологического университета)
Россия, 144000, Московская область, Электросталь, Первомайская, 7
E-mail: misis@elsite.ru

Л.С. Михайлова
Электростальский политехнический институт (филиал) Московского государственного института стали и сплавов (технологического университета)
Россия, 144000, Московская область, Электросталь, Первомайская, 7
E-mail: misis@elsite.ru

Ключевые слова: программное обеспечение, идентификация, адаптивное управление, частотный подход, многомерные системы.

Key words: software, identification, adaptive control, frequency domain approach, MIMO systems.

Работа посвящена МАТЛАБ-приложениям «Конечно-частотной идентификации» и «Частотного адаптивного управления», разработанным на основе конечно-частотного метода. Предназначены они для моделирования процессов идентификации и адаптивного управления объектами, статистические свойства внешних возмущений и помех измерений которых неизвестны, а сами возмущения и помехи являются произвольными ограниченными функциями. Приводится пример идентификации реального физического объекта.

SOFTWARE OF FINITE-FREQUENCY IDENTIFICATION AND ADAPTIVE CONTROL OF MULTIVARIABLE PLANTS / A.G. Alexandrov (Institute of Control Sciences, 65, Profsoyuznaya, Moscow, 117997, Russia, E-mail: alex7@ipu.rssi.ru), Yu.F. Orlov, L.S. Mikhailova (Elektrostal Department of Moscow Steel and Alloys Institute (Technological University), 7, Pervomayskaya, Elektrostal, Moscow Region, 144000, Russia, E-mail: misis@elsite.ru. In this paper MATLAB toolboxes "Finite-frequency identification" and "Frequency adaptive control" are proposed. They serve for a simulation of the identification and adaptive control of a plant in presence of an unknown but bounded disturbance. The example of identification simulation of a real multivariable plant is given.

1. Введение

В теории идентификации и адаптивного управления, в зависимости от предположений о внешних возмущениях и помехах измерений, можно выделить два направления.

В первом из них, возмущения и помехи отсутствуют либо являются случайными процессами типа «белый шум». Это направление имеет большую историю и во многом связано с методами наименьших квадратов [1].

На практике указанные предположения о возмущениях и помехах часто не выполняются. Поэтому, в последние десятилетия развивается второе направление, в котором возмущения – неизвестные, ограниченные функции. Для этого случая известны, в частности, метод рекуррентных целевых неравенств [2] и конечно-частотный метод [3].

Программное обеспечение первого направления сосредоточено в основном в системе МАТЛАБ [4], где имеются два расширения: «System Identification Toolbox» и «Frequency Domain Identification».

Пакет АДАПЛАБ [5] содержит программное обеспечение конечно-частотного метода. Пакет предназначен для моделирования процессов идентификации и адаптивного управления с целью определения параметров алгоритмов (частот и амплитуд испытательного сигнала, длительности фильтрации и т.д.) конечно-частотного метода. При этом используется предполагаемая модель объекта управления (управляемого процесса), в которой сосредоточены знания технолога об управляемом процессе. Пакет охватывает объекты с одним входом и одним выходом. Программы пакета подключены к системе ГАММА-2PC [6].

Недавно были получены алгоритмы конечно-частотной идентификации и адаптивного управления [7], [8], [9] многомерных объектов. Настоящая работа посвящена программному обеспечению в системе МАТЛАБ (МАТЛАБ-расширению) конечно-частотного метода для многомерных объектов. Разработан ряд новых МАТЛАБ-функций (команд), используя которые построены директивы: «Конечно-частотной идентификации» и «Частотного адаптивного управления» (директива – это программа, состоящую из трех частей: интерфейса, расчетной части и протокола исходных, промежуточных данных и результатов и позволяющая решать точно описанный класс задач автоматического управления или идентификации.

2. Конечно-частотная идентификация

MATLAB-приложение «Конечно-частотной идентификации» в настоящей работе представлено директивой М111: *«Идентификации непрерывных объектов»*. Для описания этой директивы рассмотрим полностью наблюдаемый линейный стационарный объект, в пространстве состояний описываемый уравнениями

(1) $$\dot{x} = Ax + Bu + Mf\,, \quad y = Cx + Du + N\eta\,, \quad t \ge t_0\,,$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $y(t) \in R^r$ – измеряемый выход, $u(t) \in R^m$ – управляемый вход, $f(t) \in R^\mu$ – внешние возмущения и $\eta(t) \in R^\theta$ – помехи измерения – ограниченные функции: $|f_i(t)| \le f_i^*$ и $|\eta_i(t)| \le \eta_i^*$, где $f_i^* \left(i = \overline{1,\mu}\right)$ и

$\eta_i^*\left(i=\overline{1,\theta}\right)$ – заданные положительные числа. Параметры этого объекта – коэффициенты матриц *A*, *B*, *C* и *D* неизвестны.

2.1. Частотные параметры объекта

Для простоты далее будем полагать, что объект (1) асимптотически устойчив. Чтобы определить оценки матриц *A*, *B*, *C* и *D*, ко входу последнего последовательно прикладываются *m* векторов испытательных сигналов

(2) $$u_j(t)=\sum_{k=1}^{\varsigma}\rho_{jk}\sin\omega_k t\cdot e_j\,,\qquad t_0+(j-1)\tau\le t<t_0+j\tau\,,\qquad j=\overline{1,m}\,,$$

где $\rho_{jk}\left(j=\overline{1,m},k=\overline{1,\varsigma}\right)$ – амплитуда k-й гармоники испытательного сигнала j-го эксперимента, ω_k $\left(k=\overline{1,\varsigma}\right)$ – частота испытательного сигнала [$\omega_k\ne 0\left(k=\overline{1,\varsigma}\right)$ и $\omega_i\ne\omega_j(i\ne j)$], $e_j=col_j E_m$ – j-й столбец единичной матрицы E_m, $\varsigma=\nu+1$, ν – индекс наблюдаемости объекта – определен ниже, τ - длительность j-го эксперимента – заданное число, такое, что $t_0+m\tau=t_1$. Его можно определить экспериментально из необходимых условий [10] сходимости процесса идентификации.

Программно соотношение (2) реализовано в виде двух MATLAB-функций (описание функций MATLAB-приложений дано в разделе 4 настоящей работы): `TimeNet -` формирования временной сетки и `Test` – генератора испытательного сигнала.

Примечание 1 Моделирование (решение дифференциальных уравнений) в директивах осуществляется при помощи MATLAB-функции `Lsim` пакета Control System Toolbox. Внешние возмущения и помехи измерения, действующие на объект (1), формируются MATLAB-функцией `Dist`.

Выходы $y_j(t)$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$ объекта подаются на входы фильтра Фурье (программно реализованного MATLAB-функцией `Fourier`), выходы которого дают оценки

(3) $$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_{ijk}&=\alpha_{ijk}(\tau)=\frac{2}{\rho_{jk}\tau}\int_{t_0+(j-1)\tau}^{t_0+j\tau}y_{ji}(t)\sin\omega_k(t-t_0)dt\,,\\ \widehat{\beta}_{ijk}&=\beta_{ijk}(\tau)=\frac{2}{\rho_{jk}\tau}\int_{t_0+(j-1)\tau}^{t_0+j\tau}y_{ji}(t)\cos\omega_k(t-t_0)dt\\ i&=\overline{1,r}\,,\ j=\overline{1,m}\,,\ k=\overline{1,\varsigma}\,,\end{aligned}$$

элементов α_{ijk} и β_{ijk} матриц $A_k=\mathrm{Re}W(j\omega_k)$ и $B_k=\mathrm{Im}W(j\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,\varsigma}\right)$ *частотных параметров* [6] *объекта* (1), где $W(s)=C(Es-A)^{-1}B+D$ его передаточная матрица.

Примечание 2 К MATLAB-функции `Fourier` в директивах производится *m* обращений, на каждом *j*-ом из которых находятся матрицы оценок α_{ijk} и β_{ijk} $(i=\overline{1,r},k=\overline{1,\varsigma})$ при фиксированном значении *j*.

2.2. Идентификация объекта

Идентифицируемые матрицы A, B, C и D объекта (1) ищутся в канонической форме Люенбергера (с матрицами A_K, B_K, C_K и D_K соответственно), чьи блоки A_{ij}^K и c_{ij}^K $\left(i=\overline{1,r},\, j=\overline{1,r}\right)$матриц A_K и C_K имеют специальную структуру:

(4) $$A_{ii}^K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ii}^{(0)K} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ii}^{(1)K} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{ii}^{(2)K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{ii}^{(\nu_i-1)K} \end{pmatrix},\ A^K{}_{i\neq j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ij}^{(0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ij}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ij}^{(\nu_{ij}-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{ii}^K=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix},\ c_{i>j}^K=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & -c_{ij}^K\end{pmatrix},\ c_{i<j}^K=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\end{pmatrix};$$

в которой $\nu_{ij}=\min(\nu_i,\nu_j)$, а ν_j $\left(j=\overline{1,r}\right)$ – индексы наблюдаемости (Кронекера). Их определение [12] по набору ω_k частот и матриц A_k, B_k $\left(k=\overline{1,\varsigma}\right)$ частотных параметров осуществляется при помощи MATLAB-функции `NuFDP`. $\nu=\max\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_r\}$.

Оценки коэффициентов матриц канонической формы Люенбергера определяются однозначно из решения системы частотных уравнений идентификации [8]

(5) $$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{\nu_k-1} i_i^{(j)}\widehat{b}_{ki}^{(j)K}+i_i^{(\nu_k)}\widehat{d}_{ki}^{K}\right)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\breve{\nu}_{ki}-1}\widehat{h}_i^{(j)}\widehat{a}_{ki}^{(j)*}=-\widehat{h}_k^{(\nu_k)}\quad k=\overline{1,r}\,,$$

в которой $\breve{\nu}_{ki}=\min(\nu_k,\nu_i)$ при $k<i$ и $\breve{\nu}_{ki}=\min(\nu_k+1,\nu_i)$ при $k>i$, а столбцы

(6) $$i_i^{(j)}=\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(j\omega_1)^j col_i E_m \\ \mathrm{Im}(j\omega_1)^j col_i E_m \\ \mathrm{Re}(j\omega_2)^j col_i E_m \\ \mathrm{Im}(j\omega_2)^j col_i E_m \\ \vdots \\ \mathrm{Re}(j\omega_\varsigma)^j col_i E_m \\ \mathrm{Im}(j\omega_\varsigma)^j col_i E_m \end{bmatrix}\ \text{и}\ \widehat{h}_i^{(j)}=\begin{bmatrix} -\mathrm{Re}[(j\omega_1)^j col_i(\widehat{A}_1^T+j\widehat{B}_1^T)] \\ -\mathrm{Im}[(j\omega_1)^j col_i(\widehat{A}_1^T+j\widehat{B}_1^T)] \\ -\mathrm{Re}[(j\omega_2)^j col_i(\widehat{A}_2^T+j\widehat{B}_2^T)] \\ -\mathrm{Im}[(j\omega_2)^j col_i(\widehat{A}_2^T+j\widehat{B}_2^T)] \\ \vdots \\ -\mathrm{Re}[(j\omega_\varsigma)^j col_i(\widehat{A}_\varsigma^T+j\widehat{B}_\varsigma^T)] \\ -\mathrm{Im}[(j\omega_\varsigma)^j col_i(\widehat{A}_\varsigma^T+j\widehat{B}_\varsigma^T)] \end{bmatrix}.$$

Для удобства в приложении П.1 приведен вывод этой системы.

Решение системы (5) реализовано программно в виде MATLAB-функции `FrId` решения частотных уравнений идентификации. Последняя использует MATLAB-функцию `FMN` построения частотной матрицы

(7) $$\left(I^{(0)}\quad I^{(1)}\quad \cdots\quad I^{(q-1)}\ \middle|\ \widehat{H}^{(0)}\quad \widehat{H}^{(1)}\quad \cdots\quad \widehat{H}^{(p-1)}\right),$$

где $I^{(j)}=\begin{pmatrix} i_1^{(j)} & i_2^{(j)} & \cdots & i_m^{(j)}\end{pmatrix}$ и $\breve{H}^{(j)}=\begin{pmatrix}\widehat{h}_1^{(j)} & \widehat{h}_2^{(j)} & \cdots & \widehat{h}_r^{(j)}\end{pmatrix}$.

Решая систему (5) с неизвестными $\widehat{b}_{ki}^{(j)K}$, $\widehat{d}_{ki}^{K}$ и $\widehat{a}_{ki}^{(j)*}$, после несложных преобразований

(8) $$\widehat{a}_{ij}^{(k)K}=\widehat{a}_{ij}^{(k)*}-\sum_{l=j+1}^{r}\widehat{a}_{il}^{(k)*}\widehat{c}_{lj}^{K}\quad k=\overline{0,\nu_{ij}-1}\quad i=\overline{1,r}\quad j=\overline{1,r}\,,$$

$$\widehat{c}_{ij}^{K}-\sum_{k=j+1}^{i-1}\widehat{c}_{ik}^{K}\cdot\widehat{a}_{kj}^{(\breve{\nu}_{kj}-1)*}+\widehat{a}_{ij}^{(\breve{\nu}_{ij}-1)*}=0\quad i=\overline{j+1,r}\quad j=\overline{1,r-2}\,,$$

получим оценки коэффициентов матриц (4).

Формирование матриц $\widehat{A}_K$, $\widehat{B}_K$, $\widehat{C}_K$ и $\widehat{D}_K$ канонической формы Люенбергера по результатам решения системы (5) с учетом пересчета (8) осуществляется MATLAB-функцией `Cauchy`.

2.3. Условия окончания процесса идентификации

Идентификация объекта признается удовлетворительной, если увеличение времени фильтрации (на период $T = 2\pi / \min\{\omega_1, \omega_1, \cdots, \omega_\varsigma\}$) приводит к несущественному изменению коэффициентов матриц идентифицированного объекта.

(9)
$$\widehat{a}_{ij}^{(k)K}(\tau+T) \div \widehat{a}_{ij}^{(k)K}(\tau) \le \varepsilon_a \qquad k = \overline{0, v_{ij}-1}, \quad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,r},$$
$$\widehat{b}_{ij}^{(k)K}(\tau+T) \div \widehat{b}_{ij}^{(k)K}(\tau) \le \varepsilon_b \qquad k = \overline{0, v_i-1}, \quad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,m},$$
$$\widehat{c}_{ij}^{K}(\tau+T) \div \widehat{c}_{ij}^{K}(\tau) \le \varepsilon_c \qquad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,r},$$
$$\widehat{d}_{ij}^{K}(\tau+T) \div \widehat{d}_{ij}^{K}(\tau) \le \varepsilon_d \qquad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,m},$$

где ε_a, ε_b, ε_c и ε_d – заданные числа, а «$\div$» - символ отношения: $a \div b = |a-b|/|b|$ если $b \ne 0$ либо $a \div b = |a|$ если $b = 0$. Условия (9) окончания процесса идентификации базируются на доказанном [13] утверждении о сходимости (в канонической форме Люенбергера, при $\tau \to \infty$) оценок коэффициентов матриц идентифицированного объекта к истинным значениям.

Анализ результатов идентификации осуществляется также при помощи MATLAB-функций: `Bode` построения логарифмических частотных характеристик и `zpk` формирования элементов передаточных матриц в виде нулей, полюсов и коэффициента усиления, входящих в пакет Control System Toolbox.

Примечание 3 Для контроля сходимости процесса идентификации на этапе отладки (при известных коэффициентах матриц *A*, *B*, *C* и *D* объекта (1)) разработан ряд вспомогательных MATLAB-функций, среди которых:

- Функция `Canon` преобразования формы Коши к наблюдаемой блочно-сопровождающей канонической форме (Люенбергера) – используется, например, для приведения исходного объекта к канонической форме с целью последующего сравнения с идентифицированным (в канонической форме) объектом.
- Функция `FDP` вычисления матриц A_k и B_k $\left(k = \overline{1, \varsigma}\right)$ частотных параметров по описанию в форме Коши – используется, например, для их сравнения с «фильтрованными» оценками матриц $\widehat{A}_k$ и $\widehat{B}_k$ $\left(k = \overline{1, \varsigma}\right)$ частотных параметров.
- Функция `NuCauchy` определения индексов v_i $\left(i = \overline{1,r}\right)$ наблюдаемости (Кронекера) по паре $\{A, C\}$ описания в пространстве состояний – используется, например, для контроля правильности определения этих индексов функцией `NuFDP`, и др.

Формирование протокола осуществляется с использованием функций ввода-вывода информации, адаптированных под решение задач указанной в работе области. Структурная схема директивы М111 приведена в приложении П.2.

3. Частотное адаптивное управление

MATLAB-приложение «Частотного адаптивного управления» в настоящей работе представлено директивой M317: «H_∞*-субоптимального адаптивного управления»*. Для описания этой директивы рассмотрим линейную стационарную систему, в пространстве состояний описываемую уравнениями

(10) $\dot{x} = Ax + B(u + \Psi f), \quad z = \Phi C x, \quad y = Cx + \eta, \quad t \ge t_0;$

(11) $\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \quad u = C_c x_c, \quad t \ge t_N,$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния объекта (10), $x_c(t) \in R^n$ – вектор состояния регулятора (11), $y(t) \in R^r$ – вектор измеряемых переменных, $z(t) \in R^l$ – вектор регулируемых переменных, $u(t) \in R^m$ – вектор управления, $f(t) \in R^\mu$ – вектор неизмеряемых внешних возмущений и $\eta(t) \in R^r$ – вектор помех измерения – ограниченных в L_2 норме: $\int_0^\infty f^T(t) f(t) dt < \infty$ и $\int_0^\infty \eta^T(t) \eta(t) dt < \infty$ – исчезающих функций времени.

Параметры системы (10), (11) – коэффициенты матриц A, B, C и A_c, B_c, C_c – неизвестны. Ψ и Φ известные матрицы чисел. Пара (A,B) предполагается управляемой, а пара (A,C) – наблюдаемой. Для простоты далее будем полагать, что объект (10) асимптотически устойчив.

Определение 1 H_∞*-норма устойчивой действительной матрицы H(s) – это число*

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{0 \le \omega \le \infty} \sigma_{\max}[H(j\omega)],$$

где $\sigma_{\max}[H(j\omega)]$ *– наибольшее сингулярное значение матрицы* $H(j\omega)$*, вычисляемое как*

$$\sigma_{\max}[H(j\omega)] = \max_i \{\lambda_i^{1\backslash 2}[H^T(-j\omega)H(j\omega)]\},$$

где $\lambda_i[M]$ *– i-е собственное значение матрицы M.*

Реализованное в директиве `M317` H_∞-субоптимальное адаптивное управление позволяет найти такой регулятор (11), чтобы выполнялось следующее условие

$$\left\| W_{\bar{z}\bar{f}}(s) \right\|_\infty \le \gamma,$$

где

$$W_{\bar{z}\bar{f}}(s) = \begin{pmatrix} \Phi C & 0 \\ 0 & C_c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_n s - A & -BC_c \\ -B_c C & E_n s - A_c \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} B\Psi & 0 \\ 0 & B_c \end{pmatrix}$$

- устойчивая передаточная матрица, связывающая вектор $\bar{z} = [z^T, u^T]^T$ выходных переменных с вектором $\bar{f} = [f^T, \eta^T]^T$ входных воздействий системы (10), (11): $\bar{z} = W_{\bar{z}\bar{f}}(s)\bar{f}$, а γ – заданное положительное число, удовлетворяющее условию

$$\gamma > \gamma_0 = \min_{W_c(s)} \left\| W_{\bar{z}\bar{f}}(s) \right\|_\infty,$$

в котором $W_c(s) = C_c(E_n s - A_c)^{-1} B_c$ – передаточная матрица регулятора (11): u=$W_c(s)y$.

3.1. Управление известным объектом

При известных матрицах *A, B* и *C* объекта (10), матрицы регулятора (11) определяются из выражений [14]

$$
\begin{aligned}
& A_c = A - BB^T P + (\beta/\gamma)^2 B\Psi\Psi^T B^T P - \left(E_n - \gamma^{-2} YP\right)^{-1} YC^T C, \\
(12) \qquad & B_c = \left(E_n - \gamma^{-2} YP\right)^{-1} YC^T, \\
& C_c = -B^T P,
\end{aligned}
$$

в которых неотрицательные $n \times n$-матрицы *P* и *Y* являются решениями следующих уравнений Риккати

(13) $$A^T P + PA - PBB^T P + (\beta/\gamma)^2 PB\Psi\Psi^T B^T P = -\alpha^2 C^T \Phi^T \Phi C,$$

(14) $$AY + YA^T - YC^T CY + (\alpha/\gamma)^2 YC^T \Phi^T \Phi CY = -\beta^2 B\Psi\Psi^T B^T,$$

с масштабирующими множителями α, β и числом γ, удовлетворяющим условию

(15) $$\lambda_{\max}(PY) < \gamma^2,$$

где $\lambda_{\max}(M)$ – максимальное собственное значение матрицы *M*.

Программно построение регулятора по параметрам объекта с использованием процедуры H_∞-субоптимального управления реализовано в виде MATLAB-функции `ContRic`. Последняя использует MATLAB-функцию `Riccati` решения уравнения Риккати методом диагонализации.

Примечание 4 MATLAB-функция `ContRic` охватывает более широкий класс объектов и целевых условий. Поэтому при обращении к ней необходимо привести матрицы исходных данных: B1=$B\Psi$, B2=B, C1=ΦC, C2=C, Q0=E_μ, Q1=E_μ, R1=E_m и R2=E_r.

3.2. Построение предполагаемой модели замкнутой системы

При неизвестных матрицах *A, B* и *C* объекта (10), для построения регулятора (11) применяется адаптивное управление, которое описывается уравнениями с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_c = A_c^{[k]} x_c + B_c^{[k]} y + L\upsilon^{[k]}, \quad u = C_c^{[k]} x_c, \quad t_{k-1} \le t < t_k \quad k = \overline{1, N}.$$

В этих уравнениях k – номер интервала адаптации $\left(k = \overline{1, N}\right)$, t_k – момент окончания *k*-го интервала, t_k также как число *N* и матрицы $A_c^{[k]}$, $B_c^{[k]}$ и $C_c^{[k]}$ находятся в процессе адаптации, *L* – заданная матрица, $\upsilon^{[k]}(t) \in R^m$ – испытательный сигнал.

На первом интервале адаптации идентифицируется объект с помощью директивы `M111` описанной в предыдущем разделе. В результате получаются матрицы $A^{[1]} = \hat{A}_k, B^{[1]} = \hat{B}_k$ и $C^{[1]} = \hat{C}_k$ канонической формы Люенбергера.

Далее, по результатам идентификации формируются уравнения Риккати (13) и (14), матрицы *A, B* и *C* которых заменяются их оценками: $A^{[1]}, B^{[1]}$ и $C^{[1]}$. В результате многократного решения этих уравнений при различных γ, находится число γ^* и вычисляются из выражений (12) матрицы $A_c^{[2]}$, $B_c^{[2]}$ и $C_c^{[2]}$ регулятора (11), вида

(16) $$\dot{x}_c = A_c^{[2]} x_c + B_c^{[2]} y + L\upsilon^{[2]}, \quad u = C_c^{[2]} x_c,$$

для второго интервала адаптации.

Легко показать, что матрицы $A_c^{[2]}$, $B_c^{[2]}$ и $C_c^{[2]}$ регулятора (16), определяются по $A^{[1]}, B^{[1]}$ и $C^{[1]}$ на основе соотношений (12) с точностью до преобразования подобия.

Исключая переменную $u(t)$ запишем уравнение «предполагаемой» системы

(17) $$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A^{[1]} & B^{[1]} C_c^{[2]} \\ B_c^{[2]} C^{[1]} & A_c^{[2]} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} B^{[1]} \Psi & 0 \\ 0 & B_c^{[2]} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} f \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix} \cdot \upsilon^{[2]},$$

$$y = \begin{pmatrix} C^{[1]} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E_r \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} f \\ \eta \end{bmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \Phi C^{[1]} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}.$$

Объект здесь представлен матрицами $A^{[1]}, B^{[1]}$ и $C^{[1]}$, Ψ и Φ а регулятор – $A_c^{[2]}$, $B_c^{[2]}$ и $C_c^{[2]}$ и L соответственно. В рассматриваемой директиве система (17) приводится MATLAB-функцией `canon` к канонической форме Люенбергера

(18) $$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{f} + \bar{L}\upsilon^{[2]}, \quad z = \Phi\bar{C}\bar{x}, \quad y = \bar{C}\bar{x} + \begin{pmatrix} 0 & E_r \end{pmatrix}\bar{f},$$

блоки $\bar{A}_{ij}$ и $\bar{c}_{ij}$ $\left(i = \overline{1,r},\ j = \overline{1,r}\right)$ матриц $\bar{A}$ и $\bar{C}$ которой, имеют аналогичную (4) специальную структуру

(19) $$\bar{A}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_{ii}^{(0)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_{ii}^{(1)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\bar{a}_{ii}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\bar{a}_{ii}^{(\bar{\nu}_i - 1)} \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_{i \neq j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_{ij}^{(0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_{ij}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_{ij}^{(\bar{\nu}_{ij} - 1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{c}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_{i>j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\bar{c}_{ij} \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_{i<j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$

в которой $\bar{\nu}_{ij} = \min(\bar{\nu}_i, \bar{\nu}_j)$, а $\bar{\nu}_i \left(i = \overline{1,r}\right)$ – индексы наблюдаемости системы (17).

3.3. Частотные параметры замкнутой системы

Система (10), (16) возбуждается m векторами испытательных сигналов

(20) $$\upsilon_j^{[2]}(t) = \sum_{k=1}^{\bar{\varsigma}} \bar{\rho}_{jk} \sin \bar{\omega}_k t \cdot e_j, \quad t_1 + (j-1)\tau^{[2]} \le t < t_1 + j\tau^{[2]} \quad j = \overline{1,m},$$

где $\bar{\rho}_{jk} \left(j = \overline{1,m}\right)$ – амплитуды и $\bar{\omega}_k \left(k = \overline{1,\bar{\varsigma}}\right)$ – частоты испытательных сигналов $\left[\bar{\omega}_k \neq 0 \left(k = \overline{1,\bar{\varsigma}}\right)\right.$ и $\left.\bar{\omega}_i \neq \bar{\omega}_j (i \neq j)\right]$ замкнутой системы, $\bar{\varsigma} = \bar{\nu} + 1$, $\nu = \max\left\{\bar{\nu}_1, \ \bar{\nu}_2, \ \ldots, \ \bar{\nu}_r\right\}$ – индекс наблюдаемости системы (17), $t_1 + m\tau^{[2]} = t_2$.

Длительность каждого эксперимента определяется как

$$\tau^{[2]} = \tau + K,$$

где K – заданное положительное число.

Выходы $y_j(t) \left(j = \overline{1,m}\right)$ объекта (10) замкнутого регулятором (16), подаются на входы фильтра Фурье, выходы которого дают оценки

$$\widehat{\nu}_{ijk}=\nu_{ijk}(\tau)=\frac{2}{\overline{\rho}_{jk}\tau^{[2]}}\int\limits_{t_1+(j-1)\tau^{[2]}}^{t_1+j\tau^{[2]}} y_{ji}(t)\sin\overline{\omega}_k(t-t_1)dt,$$

(21) $$\widehat{\mu}_{ijk}=\mu_{ijk}(\tau)=\frac{2}{\overline{\rho}_{jk}\tau^{[2]}}\int\limits_{t_1+(j-1)\tau^{[2]}}^{t_1+j\tau^{[2]}} y_{ji}(t)\cos\overline{\omega_k}(t-t_1)dt$$

$$i=\overline{1,r}\quad j=\overline{1,m}\quad k=\overline{1,\overline{\varsigma}}$$

элементов ν_{ijk} и μ_{ijk} матриц $V_K=\operatorname{Re}W_{cl}\left(j\overline{\omega_k}\right)$ и $M_K=\operatorname{Im}W_{cl}\left(j\overline{\omega_k}\right)$ $\left(k=\overline{1,\overline{\varsigma}}\right)$ *частотных параметров [6] замкнутой системы*

(22) $$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{x}_c\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\,C_c^{[2]}\\ B_c^{[2]}C & A_c^{[2]}\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ x_c\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}B\,\Psi & 0\\ 0 & B_c^{[2]}\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}f\\ \eta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ L\end{bmatrix}\cdot\upsilon^{[2]},$$

$$y=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ x_c\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}0 & E_r\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}f\\ \eta\end{bmatrix},\quad z=\begin{bmatrix}\Phi C & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ x_c\end{bmatrix}.$$

с передаточной матрицей

(23) $$W_{cl}(s)=[E_r-W(s)W_c(s)]^{-1}W(s)W_\upsilon(s)\,,$$

где $W_c(s)=C_c^{[2]}(E_ns-A_c^{[2]})^{-1}B_c^{[2]}$ и $W_\upsilon(s)=C_c^{[2]}(E_ns-A_c^{[2]})^{-1}L$.

Программно оценки частотных параметров замкнутой системы находятся при помощи представленных в предыдущем разделе MATLAB-функций: `TimeNet`, `Test`, `Lsim`, `Dist` и `Fourier`. Последние используют в качестве исходных данных параметры уже замкнутой системы.

3.4. Идентификация замкнутой системы

Частотные уравнения идентификации [8] замкнутой системы (22) имеют вид

(24) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\overline{\nu}_k-1}\widetilde{i}_i^{(j)}\widehat{\widetilde{l}}_{ki}^{(j)}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\breve{\nu}_{ki}-1}\widehat{\widetilde{h}}_i^{(j)}\widehat{\widetilde{a}}_{ki}^{(j)*}=-\widehat{\widetilde{h}}_k^{(\overline{\nu}_k)}\qquad k=\overline{1,r},$$

где $\breve{\nu}_{ki}=\min\left(\overline{\nu}_k,\overline{\nu}_i\right)$ при $k<i$ и $\breve{\nu}_{ki}=\min\left(\overline{\nu}_k+1,\overline{\nu}_i\right)$ при k>i. Столбцы

$$\widetilde{i}_i^{(j)}=\begin{bmatrix}\operatorname{Re}(j\overline{\omega}_1)^j col_iE_m\\ \operatorname{Im}(j\overline{\omega}_1)^j col_iE_m\\ \operatorname{Re}(j\overline{\omega}_2)^j col_iE_m\\ \operatorname{Im}(j\overline{\omega}_2)^j col_iE_m\\ \vdots\\ \operatorname{Re}(j\overline{\omega}_{\overline{\varsigma}})^j col_iE_m\\ \operatorname{Im}(j\overline{\omega}_{\overline{\varsigma}})^j col_iE_m\end{bmatrix}\text{ и }\widehat{\widetilde{h}}_i^{(j)}=\begin{bmatrix}-\operatorname{Re}[(j\overline{\omega}_1)^j col_i(\widehat{M}_1^T+j\widehat{V}_1^T)]\\ -\operatorname{Im}[(j\overline{\omega}_1)^j col_i(\widehat{M}_1^T+j\widehat{V}_1^T)]\\ -\operatorname{Re}[(j\overline{\omega}_2)^j col_i(\widehat{M}_2^T+j\widehat{V}_2^T)]\\ -\operatorname{Im}[(j\overline{\omega}_2)^j col_i(\widehat{M}_2^T+j\widehat{V}_2^T)]\\ \vdots\\ -\operatorname{Re}[(j\overline{\omega}_{\overline{\varsigma}})^j col_i(\widehat{M}_{\overline{\varsigma}}^T+j\widehat{V}_\upsilon^T)]\\ -\operatorname{Im}[(j\overline{\omega}_{\overline{\varsigma}})^j col_i(\widehat{M}_{\overline{\varsigma}}^T+j\widehat{V}^T)]\end{bmatrix}.$$

Примечание 5. Определение [12] индексов наблюдаемости по набору $\overline{\omega_k}$ частот и матриц $M_{k,}\,V_k$ $(k=\overline{1,\overline{\varsigma}})$ частотных параметров замкнутой системы (22) осуществляется при помощи той же MATLAB-функции `NuFDP`.

Решая (при помощи MATLAB-функции `FrId`) систему (24), определим коэффициенты $\widehat{\widetilde{a}}_{ij}^{(k)}$ $(k=\overline{0,\overline{\nu}_{ij}-1},\ \ i=\overline{1,r},\ \ j=\overline{1,r})$ и $\widehat{\widetilde{l}}_{ij}^{(k)}$ $(k=\overline{0,\overline{\nu}_i-1},\ i=\overline{1,r},\ \ j=\overline{1,m})$ матриц канонической формы Люенбергера

(25) $$\dot{\tilde{\tilde{x}}} = \tilde{\tilde{A}}\tilde{\tilde{x}} + \tilde{\tilde{B}}\bar{f} + \tilde{\tilde{L}}\,\upsilon^{[2]}, \qquad z = \Phi\tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{x}}, \qquad y = \tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{x}} + (0, \quad E_r)\,\bar{f},$$

блоки $\tilde{\tilde{A}}_{ij}$ *и* $\tilde{\tilde{c}}_{ij}$ $(i=\overline{1,r}, \quad j=\overline{1,r})$ матриц $\tilde{\tilde{A}}$ *и* $\tilde{\tilde{C}}$ которой, имеют аналогичную (19) специальную структуру

$$\tilde{\tilde{A}}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\tilde{a}}_{ii}^{(0)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\tilde{a}}_{ii}^{(1)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\tilde{\tilde{a}}_{ii}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\tilde{\tilde{a}}_{ii}^{(\bar{\nu}_i - 1)} \end{pmatrix}, \; \tilde{\tilde{A}}_{i\neq j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(\bar{\nu}_{ij} - 1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\tilde{c}}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{c}}_{i>j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\tilde{c}}_{ij} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{c}}_{i<j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

Примечание 6 Коэффициенты $\tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(k)}$ $(k=\overline{0,\bar{\nu}_{ij}-1}, \quad i=\overline{1,r}, \quad j=\overline{1,r})$ и $\tilde{\tilde{c}}_{ij}$ $(i=\overline{1,r}, j=\overline{1,r})$ канонической формы (25) Люенбергера связаны с коэффициентами $\tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(k)*}$ $(k=\overline{0,\breve{\nu}_{ij}-1}, \quad i=\overline{1,r}, \quad j=\overline{1,r})$ частотных уравнений (24) идентификации аналогичными (8) соотношениями.

$$\tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(k)} = \tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(k)*} - \sum_{l=j+1}^{r} \tilde{\tilde{a}}_{il}^{(k)*}\tilde{\tilde{c}}_{lj} \qquad k=\overline{0,\bar{\nu}_{ij}-1}, \quad i=\overline{1,r}, \quad j=\overline{1,r} \quad ,$$

$$\tilde{\tilde{c}}_{ij} - \sum_{k=j+1}^{i-1} \tilde{\tilde{c}}_{ik} \cdot \tilde{\tilde{a}}_{kj}^{(\bar{\nu}_{kj}-1)*} + \tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(\bar{\nu}_{ij}-1)*} = 0 \qquad i=\overline{j+1\,,\,r} \qquad j=\overline{1\,,\,r-2},$$

входящими в MATLAB-функцию `Cauchy`.

3.5. Условия окончания процесса адаптации

Процесс адаптации считается завершенным, если выполняются следующие, условия:

$$\bar{a}_{ij}^{(k)} \div \tilde{\tilde{a}}_{ij}^{(k)} \le \varepsilon_a \quad k=\overline{0,\bar{\nu}_{ij}-1} \quad i=\overline{1,r} \quad j=\overline{1,r},$$

(26) $$\bar{l}_{ij}^{(k)} \div \tilde{\tilde{l}}_{ij}^{(k)} \le \varepsilon_l \quad k=\overline{0,\bar{\nu}_i-1} \quad i=\overline{1,r} \quad j=\overline{1,m},$$

$$\bar{c}_{ij} \div \tilde{\tilde{c}}_{ij} \le \varepsilon_c \quad i=\overline{j+1,r-1} \quad j=\overline{1,r-1},$$

где ε_a, ε_l и ε_c заданные числа. Искомые матрицы регулятора (11), в этом случае, имеют вид: $A_c = A_c^{[2]}$, $B_c = B_c^{[2]}$ и $C_c = C_c^{[2]}$.

В противном случае (при недостаточной точности идентификации полученного на первом интервале объекта) возможны два случая, когда система (22): а) асимптотически устойчива, либо б) неустойчива. Рассмотрим каждую из этих ситуаций отдельно.

В случае а) матрицы $\hat{V}_k$ и $\hat{M}_k$ оценок частотных параметров замкнутой системы используются для улучшения матриц $\hat{A}_k$ и $\hat{B}_k$ $(k=\overline{1,\varsigma})$ оценок частотных параметров объекта, полученных на первом интервале. Для этой цели [при условии, что $\bar{\omega}_k = \omega_k$ $(k=\overline{1,\varsigma})$] используется связь

(27) $$A_k + jB_k = \left[V_k + jM_k\right] \left\{W_c(j\bar{\omega}_k)\left[V_k + jM_k\right] + W_\upsilon(j\bar{\omega}_k)\right\}^{-1} \quad k=\overline{1,\varsigma},$$

с очевидностью вытекающая из (23).

Пересчет по формуле (27) осуществляется MATLAB-функцией `ReCalc`.

Заменяя в (27) матрицы V_k и M_k их оценками, получим новые матрицы $\widehat{A}_k$ и $\widehat{B}_k$ ($k=\overline{1,\varsigma}$) оценок частотных параметров объекта, используя которые, находим матрицы $A^{[2]}$, $B^{[2]}$ и $C^{[2]}$ из решения системы частотных уравнений идентификации (5), затем матрицы $A_c^{[3]}$, $B_c^{[3]}$ и $C_c^{[3]}$ из решения уравнений Риккати, и т.д.

В случае б) регулятор (16) отключается и, на третьем интервале адаптации формируется вход объекта (2), с большим временем фильтрации по сравнению с первым интервалом:

$$\tau^{[3]} = \tau^{[2]} + K .$$

Далее, решая систему частотных уравнений идентификации (5), ищутся матрицы $A^{[3]}$, $B^{[3]}$ и $C^{[3]}$, а затем, решая уравнения Риккати, матрицы $A_c^{[4]}$, $B_c^{[4]}$ и $C_c^{[4]}$, и т.д.

По окончании процесса адаптации, в момент времени t_N, регулятор описывается уравнениями (11), в которых $A_c = A_c^{[N]}$, $B_c = B_c^{[N]}$ и $C_c = C_c^{[N]}$. Структурная схема директивы M317 приведена в приложении П.3.

4. Функции MATLAB-приложений

Директивы указанных MATLAB-приложений используют 18 функций, объединенные в следующие группы:

- идентификации параметров (объекта либо замкнутой системы);
- преобразования форм;
- вычисления оценок частотных параметров (объекта либо замкнутой системы);
- процедуры H_∞-субоптимального управления;
- ввода-вывода информации.

4.1.Функции идентификации параметров (объекта либо замкнутой системы)

В данную группу входят следующие три функции:

FMN – функция построения частотной матрицы

Синтаксис:

```
Mat = FMN (p, q, vro, s, W)
```

Исходные данные:

p – число (правых) $H^{(j)}$-блоков частотной матрицы (7),

q – число (левых) $I^{(j)}$-блоков частотной матрицы (7),

vro – число ς (парных) [Re,Im]-блоков частотной матрицы (7),

s – набор частот – комплексный вектор: $s_k = \lambda + j\omega_k$ ($k=\overline{1,\varsigma}$),

W – набор матриц частотных параметров – комплексная $\varsigma r \times m$-матрица $\lfloor W_1; W_2;...; W_\varsigma \rfloor$, где $W_k = A_k + jB_k$ ($k=\overline{1,\varsigma}$).

Результаты счета:

Mat – $2\varsigma m \times (pr - qm)$ – частотная матрица (7).

FrId – функция решения частотных уравнений идентификации

Синтаксис:

```
[P, Q] = FrId (key, nu, s, W)
```

Исходные данные:

key – ключ структурной идентификации:

key = 0 если (возможен случай) $\deg Q(s) = \deg P(s)$ и

key ≠ 0 если (известно, что) $\deg Q(s) < \deg P(s)$,

nu – индексы ν_i $(i=\overline{1,r})$ наблюдаемости (Кронекера),

s – набор частот, комплексный вектор: $s_k = \lambda + j\omega_k$ $(k=\overline{1,\varsigma})$,

W – набор матриц частотных параметров, комплексная $\varsigma r \times m$-матрица $\lfloor W_1; W_2; ...; W_\varsigma \rfloor$, где $W_k = A_k + jB_k$ $(k=\overline{1,\varsigma})$.

Результаты счета:

P – полиномиальная матрица $P(s) = P_0 + P_1 s + ... + P_\nu s^\nu$,

Q – полиномиальная матрица $Q(s) = Q_0 + Q_1 s + ... + Q_\nu s^\nu$,

где $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2, ... \nu_r\}$.

Примечание: структура полиномиальных матриц P и Q формы «вход-выход»:$P(s)\boldsymbol{y}=Q(s)\boldsymbol{u}$ приведена в (П.3).

NuFDP – функция определения индексов наблюдаемости (Кронекера) по набору частот s_k и матриц W_k $(k=\overline{1,\varsigma})$ частотных параметров

Синтаксис:

```
nu = NuFDP (n, s, W)
```

Исходные данные:

n – порядок объекта,

s – набор частот – комплексный вектор: $s_k = \lambda + j\omega_k$ $(k=\overline{1,\varsigma})$,

W – набор матриц частотных параметров – комплексная $\varsigma r \times m$ – матрица $\lfloor W_1; W_2; ...; W_\varsigma \rfloor$, где $W_k = A_k + jB_k$ $(k=\overline{1,\varsigma})$.

Результаты счета:

nu – индексы ν_i $(i=\overline{1,r})$ наблюдаемости (Кронекера).

Примечание: если порядок объекта неизвестен, ввести n=0 (функция `NuFDP` определит его в этом случае по паре по набору частот s_k и матриц W_k $(k=\overline{1,\varsigma})$ частотных параметров).

4.2. Функции преобразования форм

В данную группу входят следующие четыре функции:

Canon – функция преобразования формы Коши к наблюдаемой блочно-сопровождающей канонической форме (Люенбергера)

Синтаксис:

```
[Acanon, Bcanon, Ccanon] = Canon (nu, A, B, C)
```

Исходные данные:

`nu` – индексы ν_i $(i=\overline{1,r})$ наблюдаемости (Кронекера),

`A, B, C` – матрицы параметров формы Коши:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u, \quad y = C \cdot x$$

Результаты счета:

`Acanon, Bcanon, Ccanon` – матрицы параметров канонической формы Люенбергера:

$$\dot{x} = \text{Acanon} \cdot x + \text{Bcanon} \cdot u, \quad y = \text{Ccanon} \cdot x .$$

Примечание: структура блоков A_{ij}^{K} и c_{ij}^{K} $(i = \overline{1,r},\ j = \overline{1,r})$ матриц Acanon и Ccanon приведена в (4).

Cauchy – функция построения канонической формы Люенбергера по матричной канонической форме «вход–выход»

Синтаксис:

```
[A, B, C, D] = Cauchy (nu, P, Q)
```

Исходные данные:

`nu` – индексы ν_i $(i = \overline{1,r})$ наблюдаемости (Кронекера),

`P` – полиномиальная матрица $P(s) = P_0 + P_1 s + ... + P_\nu s^\nu$,

`Q` – полиномиальная матрица $Q(s) = Q_0 + Q_1 s + ... + Q_\nu s^\nu$ формы «вход–выход»: *P(s)***y** = *Q(s)***u,** где $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r\}$.

Результаты счета:

`A, B, C, D` – матрицы параметров канонической формы Люенбергера: $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u,\ \ y = C \cdot x + D \cdot u.$

Примечание: структура полиномиальных матриц P и Q приведена в (П.3), а блоков A_{ij}^{K} и c_{ij}^{K} $(i = \overline{1,r},\ j = \overline{1,r})$ матриц A и C – в (4).

InOut - функция построения матричной канонической формы «вход-выход» по канонической форме Люенбергера

Синтаксис:

```
[P, Q] = InOut (nu, A, B, C, D)
```

Исходные данные:

`nu` – индексы ν_i $(i = \overline{1,r})$ наблюдаемости (Кронекера),

`A, B, C, D` – матрицы параметров канонической формы Люенбергера: $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u,\ \ y = C \cdot x + D \cdot u.$

Результаты счета:

`P` – полиномиальная матрица $P(s) = P_0 + P_1 s + ... + P_\nu s^\nu$,

`Q` – полиномиальная матрица $Q(s) = Q_0 + Q_1 s + ... + Q_\nu s^\nu$,

где $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r\}$.

Примечание: см. примечание к функции `Cauchy`.

NuCauchy – функция определения индексов наблюдаемости (Кронекера) по паре {A,C} описания в пространстве состояний

Синтаксис:

```
nu = NuCauchy (n, A, C)
```

Исходные данные:

`n` – порядок объекта,

`A, C` – матрицы параметров формы Коши: $\dot{x} = A \cdot x,\ \ y = C \cdot x.$

Результаты счета:

`nu` – индексы ν_i $(i = \overline{1,r})$ наблюдаемости (Кронекера).

Примечание: если порядок объекта неизвестен, ввести n=0 (функция NuCauchy определит его в этом случае по паре {A,C}).

4.3. Функции вычисления оценок частотных параметров (объекта либо замкнутой системы)

В данную группу входят следующие семь функций:

TimeNet – функция формирования временной сетки

Синтаксис:

`t = TimeNet (number,Tdelay,Tfilter,Ndiv,omega)`

Исходные данные:

`number` – номер временного интервала,
`Tdelay` – время задержки (в периодах минимальной частоты),
`Tfilter` – время фильтрации (в периодах минимальной частоты),
`Ndiv` – число делений периода максимальной частоты,
`omega` – частоты ω_k $(k=\overline{1,\varsigma})$ испытательного сигнала.

Результаты счета:

`t` – временная сетка.

Dist – функция внешних возмущений

Синтаксис:

`f = Dist (par, t)`

Исходные данные:

`par` - параметры внешних возмущений:
`par(:,1)` – типы n функций $f(t)$ внешних возмущений,
`par(:,1)=0` – возмущение отсутствует: $f(t)=0$,
`par(:,1)=1` – ступенька: $f(t)=\mathrm{par}(:,2)\cdot 1[t-\mathrm{par}(:,3)]$,
`par(:,1)=2` – гармоника: $f(t)=\mathrm{par}(:,2)\cdot\sin[\mathrm{par}(:,3)\cdot t+\mathrm{par}(:,4)]$;
`t` – временная сетка.

Результаты счета:

`f` – матрица (n строк) значений внешних возмущений на временной сетке.

Test – функция генератора испытательного сигнала

Синтаксис:

`gen = Test (rho, lambda, omega, t)`

Исходные данные:

`rho` – амплитуды ρ_k $(k=\overline{1,g})$ испытательного сигнала,
`lambda` – декремент λ затухания,
`omega` – частоты ω_k $(k=\overline{1,g})$ испытательного сигнала,
`t` – временная сетка.

Результаты счета:

`gen` – вектор значений испытательного сигнала на временной сетке.

Fourier – функция фильтра Фурье

Синтаксис:

```
[alf, bet] =
Fourier(rho,lambda,omega, Tdelay,Tfilter,Ndiv, y,t)
```

Исходные данные:

`rho` – амплитуды ρ_k $(k=\overline{1,\varsigma})$ испытательного сигнала,
`lambda` – декремент λ затухания,
`omega` – частоты ω_k $(k=\overline{1,\varsigma})$ испытательного сигнала,
`Tdelay` – время задержки (в периодах минимальной частоты),
`Tfilter` – время фильтрации (в периодах минимальной частоты),

`Ndiv` – число делений периода максимальной частоты,
`y` – фильтруемый сигнал,
`t` – временная сетка.

Результаты счета:

`alf,bet` – оценки частотных параметров.

FDP – функция вычисления матриц частотных параметров по описанию в форме Коши

Синтаксис:

```
W = FDP (s, A, B, C, D)
```

Исходные данные:

`s` – набор частот, комплексный вектор: $s_k = \lambda + j\omega_k \ (k = \overline{1,\varsigma})$

`A, B, C, D` – матрицы параметров формы Коши:

$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u, \ \ y = C \cdot x + D \cdot u.$

Результаты счета:

`W` – набор матриц частотных параметров, комплексная $\varsigma r \times m$-матрица $[W_1; W_2; \ldots; W_\varsigma]$, где $W_k = A_k + jB_k \ (k = \overline{1,\varsigma})$.

FDPIO – функция вычисления матриц частотных параметров по описанию в форме «вход-выход».

Синтаксис:

```
W=FDPIO(s, P, Q)
```

Исходные данные:

`s` – набор частот, комплексный вектор: $s_k = \lambda + jw_k \ (k = \overline{1,\varsigma})$,

`P` – полиномиальная матрица $P(s) = P_0 + P_1 s + \ldots + P_{\deg P} s^{\deg P}$,

`Q` – полиномиальная матрица $Q(s) = Q_0 + Q_1 s + \ldots + Q_{\deg Q} s^{\deg Q}$, формы «вход-выход»: $P(s) y = Q(s) u$.

Результаты счета:

`W` – набор матриц частотных параметров, комплексная $\varsigma r \times m$-матрица $[W_1; W_2; \ldots; W_\varsigma]$, где $W_k = A_k + jB_k \ (k = \overline{1,\varsigma})$.

Recalc – функция вычисления матриц частотных параметров объекта по матрицам частотных параметров замкнутой системы.

Синтаксис:

```
W = Recalc (s, Wcl, Ac, Bc, Cc, Dc, L)
```

Исходные данные:

`s` – набор частот – комплексный вектор: $s_k = \lambda + j\omega_k \ (k = \overline{1,\varsigma})$,

`Wcl` - набор матриц частотных параметров замкнутой системы, комплексная $\varsigma r \times m$ – матрица: $[W_1^{cl}; W_2^{cl}; \ldots; W_\rho^{cl}]$, где

$W_k^{cl} = V_k + jM_k = W_{cl}(s_k) \ (k = \overline{1,\varsigma})$,

`Ac,Bc,Cc,Dc,L` – матрицы параметров регулятора:

$\dot{x}_c = \mathrm{Ac} \cdot x_c + \mathrm{Bc} \cdot y + \mathrm{L}, \ \ u = \mathrm{Cc} \cdot x_c + \mathrm{Dc} \cdot y$.

Результаты счета:

W – набор матриц частотных параметров – комплексная $\varsigma r \times m$-матрица $[W_1; W_2; \ldots; W_\varsigma]$, где $W_k = A_k + jB_k$ $(k = \overline{1,\varsigma})$.

Примечание: вычисление производится по формуле (27).

4.4. Функции процедуры H_∞-субоптимального управления

В данную группу входят следующие две функции:

Riccati – функция решения уравнения Риккати, типа: $A^T P + PA + PB_p P = C_p$ методом диагонализации

Синтаксис:

```
[P, flag]=Riccati(H)
```

Исходные данные:

H - $2n \times 2n$-матрица $H = \begin{pmatrix} A & B_p \\ C_p & -A^T \end{pmatrix}$ Гамильтона.

Результаты счета:

P - $n \times n$-матрица решения уравнения Риккати,

flag - переменная, принимающая значение:

$$\begin{cases} -1, \text{если} \quad \text{решение} \quad P \quad \text{не найдено;} \\ 0, \text{если} \quad \text{решение} \quad P < 0 \quad \text{отрицательно} \quad \text{определено;} \\ 1, \text{если} \quad \text{решение} \quad P \geq 0 \quad \text{неотрицательно} \quad \text{определено;} \end{cases}$$

ContRic – функция построения регулятора по параметрам объекта с использованием процедуры H_∞-субоптимального управления

Синтаксис:

```
[Ac,Bc,Cc,Dc,gamma]=
ContRic(A1,B1,B2,C1,C2, alpha,beta, Q0,Q1,R1,R2)
```

Исходные данные:

A1,B1,B2,C1,C2 - матрицы параметров объекта в форме Коши:

$\dot{x} = A \cdot x + B1 \cdot f + B2 \cdot u, \quad z = C1 \cdot x, \quad y = C2 \cdot x + \eta.$

alpha, beta – масштабируемые множители,

Q0,Q1,R1,R2 – матрицы весовых коэффициентов: при регулируемых переменных – Q0, при возмущении – Q1, при управлении – R1 и при измеряемых переменных – R2 соответственно.

Результаты счета:

Ac,Bc,Cc,Dc – матрицы параметров регулятора в форме Коши: $\dot{x}_c = Ac \cdot x_c + Bc \cdot y, \quad u = Cc \cdot x_c + Dc \cdot y.$

gamma – степень оптимальности, удовлетворяющая условию (15).

4.5. Функции ввода-вывода информации

В данную группу входят следующие две фунции:

TypePM – функция вывода полиномиальной матрицы

Синтаксис:

```
TypePM(name,deg,mat)
```

Исходные данные:

`name` – имя полиномиальной матрицы (символьная переменная),
`deg` – степень полиномиальной матрицы,
`mat` – блочная матрица $\mathrm{mat} = [\mathrm{name}_0 \quad \mathrm{name}_1 \quad \ldots \quad \mathrm{name}_{\mathrm{deg}}]$
параметров полиномиальной матрицы
$\mathrm{name}(s) = \mathrm{name}_0 + \mathrm{name}_1 s + \cdots + \mathrm{name}_{\mathrm{deg}} s^{\mathrm{deg}}$.

TypeRel – функция вывода отношения элементов матриц

Синтаксис:

```
TypeRel(NameA,NameB,A,B)
```

Исходные данные:

`NameA` – имя матрицы `A` (символьная переменная),
`NameB` – имя матрицы `B` (символьная переменная),
`A` - $n \times m$ -матрица с «делимыми» элементами,
`B` - $n \times m$ -матрица с элементами «делителя».

Примечание: формула отношения элементов:

$$a \div b = |a - b| / |b| \quad \text{если} \quad b \neq 0 \quad \text{либо} \quad a \cdot b = |a| \text{ если } b = 0 .$$

5. Интерфейс

Директивы `M111` и `M317` имеют удобный графический интерфейс, написанный с использованием MATLAB-функций, предназначенных для создания пользовательского интерфейса. Интерфейс запускается из командной строки MATLAB командой `DM111` или `DM317` соответственно. В результате на экране появляется диалоговое окно соответствующей директивы. На рис.1 показано окно директивы `M111`.

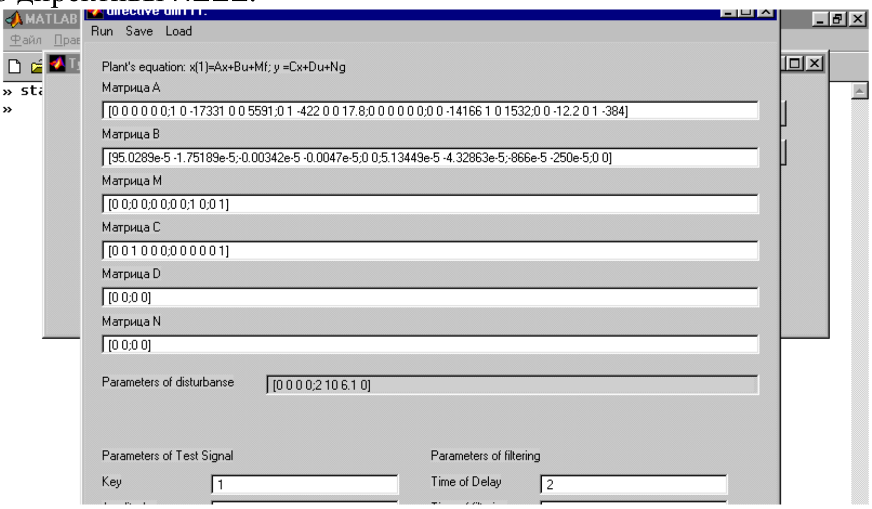

Рис.1 Интерфейс директивы m111

Пользователь может ввести исходные данные с клавиатуры, сохранить их в файле для дальнейшего использования, загрузить из файла. При выборе пункта меню «Run» директива запускается на исполнение. В ходе выполнения директивы на экран выводятся результаты промежуточных вычислений и графики переходных процессов. Результаты работы директивы сохраняются в фале.

6. Пример

6.1. Модель объекта

Рассмотрим полностью управляемый и полностью наблюдаемый объект – гироплатформу [11], представленный системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

(28) $$\varPi_0\ddot{\beta} + \varPi_0\varPi_5\dot{\alpha} + \varPi_3\varPi_6\alpha + \varPi_2\beta = 0,$$
$$\varPi_4\dot{\alpha} - \varPi_6^T\varPi_3\varPi_5\alpha - (\varPi_6^T\varPi_3 + \varPi_5^T\varPi_2)\dot{\beta} = \varPi_1(u+f),$$

где β_1 и β_2 – углы прецессии (поворота) гироскопов, α_1 и α_2 – проекции абсолютной угловой скорости площадки на ее оси, u_1 и u_2 – моменты двигателей стабилизации (управления). $\varPi_0 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$, $\varPi_1 = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$, $\varPi_2 = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}$, $\varPi_3 = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$, $\varPi_4 = \begin{pmatrix} j_x & 0 \\ 0 & j_y \end{pmatrix}$, $\varPi_5 = \begin{pmatrix} -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 \\ \cos\delta_2 & \sin\delta_2 \end{pmatrix}$, $\varPi_6 = \begin{pmatrix} -\cos\delta_1 & -\sin\delta_1 \\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2 \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$.

Последовательным исключением переменных приведем (28) к каноническому виду (П.3)

(29) $$P_*^{[3]}\dddot{y} + P_*^{[2]}\ddot{y} + P_*^{[1]}\dot{y} + P_*^{[0]}y = Q_K^{[1]}(\dot{u} + \dot{f}) + Q_K^{[0]}(u+f),$$

(где $y = \beta$) с матрицами

$$P_*^{[3]} = E_2,$$
$$P_*^{[2]} = \varPi_0^{-1}(G + F\varPi_4^{-1}\varPi_6^T\varPi_3\varPi_5F^{-1}\varPi_0),$$
$$P_*^{[1]} = \varPi_0^{-1}F\varPi_4^{-1}(\varPi_6^T\varPi_3\varPi_5F^{-1}G - \varPi_6^T\varPi_3 - \varPi_5^T\varPi_2),$$
$$P_*^{[0]} = 0_2,$$
$$Q_K^{[1]} = \varPi_5\varPi_4^{-1}\varPi_1,$$
$$Q_K^{[0]} = \varPi_0^{-1}F\varPi_4^{-1}(\varPi_6^T\varPi_3\varPi_5F^{-1}\varPi_0\varPi_5\varPi_4^{-1} - E_2)\varPi_1,$$

где $F = \varPi_3\varPi_5 - \varPi_0\varPi_5\varPi_4^{-1}\varPi_6^T\varPi_3\varPi_5$ и $G = \varPi_2 - \varPi_0\varPi_5\varPi_4^{-1}(\varPi_6^T\varPi_3 + \varPi_5^T\varPi_2)$.

Для значений: $p_1 = p_2 = 10^{-5}\,кг\cdot м^2$, $q_1 = q_2 = 10^{-5}$, $n_1 = n_2 = 4\cdot 10 H\cdot мс$, $h_1 = h_2 = 10^{-2}\,H\cdot мс$, $j_x = 10^{-3}\,кг\cdot м/c^2$, $j_y = 2\cdot 10^{-3}\,кг\cdot м/c^2$, $\delta_1 = -20^o$ и $\delta_2 = 30^o$ уравнение (29) примет вид

$$\begin{pmatrix} 17331s + 422.s^2 + s^3 & -5591s - 17.8s^2 \\ 14166s + 12.2s^2 & -1532s + 384.s^2 + s^3 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 9.50288 - 0.00342s & -1.75189 - 0.00470s \\ 5.13449 - 0.00866s & -4.32863 - 0.00250s \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 + f_1 \\ u_2 + f_2 \end{bmatrix}.$$

Последнее легко преобразовать к канонической форме Люенбергера

(30) $$\dot{x} = A_K x + B_K(u+f), \quad y = C_K x + D_K(u+\eta), \quad t \ge t_0$$

где

$$(31)\ A_K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -17331 & 0 & 0 & 5591 \\ 0 & 1 & -422 & 0 & 0 & 17.8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14166 & 1 & 0 & 1532 \\ 0 & 0 & -12.2 & 0 & 1 & -384 \end{array}\right),\ B_K = \left(\begin{array}{c|c} 9.50288 & -1.75189 \\ -0.00342 & -0.00470 \\ 0 & 0 \\ \hline 5.13449 & -4.32863 \\ -0.00866 & -0.00250 \\ 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$C_K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),\ D_K = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Типичными внешними воздействиями, которым подвергается гироплатформа, являются ступенчатые либо гармонические возмущения, поэтому примем $f_1 = 0$, $f_2 = \rho_2^f \sin\omega_2^f t$ где $\rho_2^f = 10$ – амплитуда и $\omega_2^f = 6.1$ – частота качки основания гироплатформы – заданные числа.

6.2. Идентификация по частотным параметрам

Предположим, что параметры $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2,\ n_1,\ n_2,\ h_1,\ h_2,\ j_x,\ j_y,\delta_1,\ \delta_2$ объекта (28) неизвестны. Идентифицируем его в канонической форме (30), так, чтобы при $\varepsilon_a = 0.65, \varepsilon_b = 0.25, \varepsilon_c = 0, \varepsilon_d = 0$ и $T = 12.5c$ выполнялись условия (9) окончания процесса идентификации.

Отметим, что объект (28) не является асимптотически устойчивым, так как его матрица A_K имеет два нулевых собственных значения ($\sim P_*^{[0]} = 0_2$). Тем не менее, приложим к каждому из его входов ограниченный испытательный сигнал:

$$u(t) = 2\sin t + 20\sin 40t + 200\sin 100t + 200\sin 400t,$$

так что векторы (2) примут вид

$$u_1(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \le t \le 81.6c \quad \text{и} \quad u_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}, 81.6 \le t \le 163.2\pi .$$

Выходы $y_1(t)$ и $y_2(t)$ объекта (28) подадим на входы фильтра Фурье (3), выходы которого дадут оценки

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 3.7275 & 3.4387 \\ 13.964 & 7.9932 \end{pmatrix}\cdot 10^{-5}, \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} -2.7361 & 4.0621 \\ 8.5366 & 9.4777 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4};$$

$$(32)\qquad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -9.1612 & 2.7044 \\ -2.1995 & 6.6473 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6}, \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} -7.9175 & 0.64864 \\ -7.1927 & 1.2743 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6};$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} -2.3055 & 0.44022 \\ -1.2722 & 1.0681 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6}, \tilde{B}_3 = \begin{pmatrix} -16.114 & 4.2189 \\ -23.810 & -9.4520 \end{pmatrix}\cdot 10^{-8};$$

$$\tilde{A}_4 = \begin{pmatrix} -6.7198 & 2.7393 \\ -1.7723 & 4.1261 \end{pmatrix}\cdot 10^{-8}, \tilde{B}_4 = \begin{pmatrix} 8.9913 & 0.15096 \\ 6.4825 & -2.4805 \end{pmatrix}\cdot 10^{-8},$$

матриц частотных параметров

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3.7049 & 3.4271 \\ 13.963 & 7.9964 \end{pmatrix}\cdot 10^{-5}, B_1 = \begin{pmatrix} -2.7620 & 4.0372 \\ 8.5118 & 9.449 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -9.1735 & 2.6868 \\ -2.2196 & 6.6143 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6}, B_2 = \begin{pmatrix} -7.9180 & 0.65565 \\ -7.1921 & 1.2832 \end{pmatrix}\cdot 10^{-6};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2.3113 & 0.4406 \\ -1.2757 & 1.0692 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}, B_3 = \begin{pmatrix} -16.197 & 4.2947 \\ -23.938 & -9.4038 \end{pmatrix} \cdot 10^{-8};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -6.9607 & 2.8196 \\ -1.8614 & 4.2371 \end{pmatrix} \cdot 10^{-8}, B_4 = \begin{pmatrix} 8.2582 & 0.15338 \\ 6.6916 & -2.5721 \end{pmatrix} \cdot 10^{-8}.$$

Формируя по оценкам (32) столбцы (6) и решая систему (5), после несложных преобразований (8) получим оценки коэффициентов матриц (31):

(33) $$\tilde{A}_K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -17519 & 0 & 0 & 5831 \\ 0 & 1 & -446 & 0 & 0 & 42 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14641 & 1 & 0 & 2113 \\ 0 & 0 & -71 & 0 & 1 & -326 \end{array}\right) \tilde{B}_K = \left(\begin{array}{c|c} 9.75990 & -1.60140 \\ -0.00375 & -0.00515 \\ 0 & 0 \\ \hline 5.76260 & -3.97160 \\ -0.00947 & -0.00356 \\ 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\tilde{C}_K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tilde{D}_K = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Последние удовлетворяют условиям (9) окончания процесса идентификации при заданных значениях $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c, \varepsilon_d$ и T. Сравнивая оценки (33) с точными значениями (30), нетрудно убедиться, что они во многом совпадают. Отличие некоторых коэффициентов практически не приводит к отличию частотных характеристик исходного и идентифицированного объекта.

7. Заключение

В рамках системы МАТЛАБ предложено программное обеспечение для моделирования процессов идентификации и адаптивного управления объектами, работающими в условиях неизвестных ограниченных внешних возмущений и помех измерений. Результатом моделирования служат амплитуды и частоты испытательного сигнала, длительность фильтрации, интервалы дискретности модели. Эти параметры необходимы для планирования экспериментов по идентификации и адаптации.

Разработаны функций МАТЛАБ, используя которые нетрудно сформировать директивы для идентификации и адаптивного управления в реальных условиях. Эти директивы получаются из директив M111 и M317 после замены в них функций lsim файлами экспериментальных данных, получаемых с входа реального объекта.

Приложение П1. Вывод системы (5)

Система (5) следует из полиномиально-матричного описания $W(s) = P^{-1}(s)Q(s)$ передаточной матрицы объекта (1), если последнее записать в виде

$$(\text{П.1})\; (Q^{(0)T} + Q^{(1)T}s + \ldots + Q^{(\nu)T}s^{\nu}) - W^{T}(s)(P^{(0)T} + P^{(1)T}s + \ldots + P^{(\nu)T}s^{\nu}) = 0.$$

Подставляя в (П.1) значения $s = s_k = j\omega_k \quad (k = \overline{1,\rho})$, и освобождаясь от комплексных чисел , получим распавшуюся по Re и Im систему

$$(\Pi.2)\begin{pmatrix} E_m & E_m \cdots \mathrm{Re}(j\omega_1)^\nu E_m & | -A_1^T & \omega_1 B_1^T & \cdots - \mathrm{Re}[(j\omega_1)^\nu (A_1^T + jB_1^T)] \\ 0 & \omega_1 E_m \cdots \mathrm{Im}(j\omega_1)^\nu E_m & | -B_1^T & -\omega_1 A_1^T & \cdots - \mathrm{Im}[(j\omega_1)^\nu (A_1^T + jB_1^T)] \\ E_m & E_m \cdots \mathrm{Re}(j\omega_2)^\nu E_m & | -A_2^T & \omega_2 B_2^T & \cdots - \mathrm{Re}[(j\omega_2)^\nu (A_2^T + jB_2^T)] \\ 0 & \omega_2 E_m \cdots \mathrm{Im}(j\omega_2)^\nu E_m & | -B_2^T & -\omega_2 A_2^T & \cdots - \mathrm{Im}[(j\omega_2)^\nu (A_2^T + jB_2^T)] \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ E_m & E_m \cdots \mathrm{Re}(j\omega_\rho)^\nu E_m & | -A_\rho^T & \omega_\rho B_\rho^T & \cdots - \mathrm{Re}[(j\omega_\rho)^\nu (A_\rho^T + jB_\rho^T)] \\ 0 & \omega_\rho E_m \cdots \mathrm{Im}(j\omega_\rho)^\nu E_m & | -B_\rho^T & -\omega_\rho A_\rho^T & \cdots - \mathrm{Im}[(j\omega_\rho)^\nu (A_\rho^T + jB_\rho^T)] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q^{(0)T} \\ \vdots \\ Q^{(\nu)T} \\ --- \\ P^{(0)T} \\ \vdots \\ P^{(\nu)T} \end{pmatrix} = 0,$$

где $P^{(j)} = (p_{ik}^j) \in R^{r\times r}$ и $Q^{(j)} = (q_{ik}^j) \in R^{r\times m}$.

Система (П.2) имеет бесконечное множество решений. Доказано [7], что если коэффициенты искомых полиномиальных матриц $P(s)$ и $Q(s)$ искать в структуре

$$p_{ii}^*(s) = a_{ii}^{(0)*} + a_{ii}^{(1)*}s + \cdots + a_{ii}^{(\nu_i-1)*}s^{\nu_i-1} + s^{\nu_i} \qquad i = \overline{1,r},$$

$$(\text{П.3}) \quad p_{i\neq j}^*(s) = a_{ij}^{(0)*} + a_{ij}^{(1)*}s + \cdots a_{ij}^{(\nu_{ij}-1)*}s^{\nu_{ij}-1} \qquad i = \overline{1,r} \quad j = \overline{1,r},$$

$$q_{ij}^K(s) = b_{ij}^{(0)K} + b_{ij}^{(1)K}s + \cdots + b_{ij}^{(\nu_i-1)K}s^{\nu_i-1} + d_{ij}^K s^{\nu_i} \qquad i = \overline{1,r} \qquad j = \overline{1,m},$$

то такое решение будет единственно.

Подставляя (П.3) в (П.2), с учетом введенных ранее обозначений (6), имеем (5).

Преобразования (8), устанавливающие связь между параметрами $a_{ij}^{(k)K}, c_{ij}^K$ в (3) и $a_{ij}^{(k)*}$ в (5) имеют простой матричный вид

$$(\text{П.4}) \qquad R_K S^* = R^*, \quad S_K S^* = E_r,$$

где

$$
R_K = \begin{pmatrix}
-a_{11}^{(0)K} & -a_{12}^{(0)K} & \cdots & -a_{1r}^{(0)K} \\
-a_{11}^{(1)K} & -a_{12}^{(1)K} & \cdots & -a_{1r}^{(1)K} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{11}^{(\nu_1-1)K} & -a_{12}^{(\nu_{12}-1)K} & \cdots & -a_{1r}^{(\nu_{1r}-1)K} \\
\hline
-a_{21}^{(0)K} & -a_{22}^{(0)K} & \cdots & -a_{2r}^{(0)K} \\
-a_{21}^{(1)K} & -a_{22}^{(1)K} & \cdots & -a_{2r}^{(1)K} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{21}^{(\nu_{21}-1)K} & -a_{22}^{(\nu_2-1)K} & \cdots & -a_{2r}^{(\nu_{2r}-1)K} \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
-a_{r1}^{(0)K} & -a_{r2}^{(0)K} & \cdots & -a_{rr}^{(0)K} \\
-a_{r1}^{(1)K} & -a_{r2}^{(1)K} & \cdots & -a_{rr}^{(1)K} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{r1}^{(\nu_{r1}-1)K} & -a_{r2}^{(\nu_{r2}-1)K} & \cdots & -a_{rr}^{(\nu_r-1)K}
\end{pmatrix}, \quad
R^* = \begin{pmatrix}
-a_{11}^{(0)*} & -a_{12}^{(0)*} & \cdots & -a_{1r}^{(0)*} \\
-a_{11}^{(1)*} & -a_{12}^{(1)*} & \cdots & -a_{1r}^{(1)*} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{11}^{(\nu_1-1)*} & -a_{12}^{(\nu_{12}-1)*} & \cdots & -a_{1r}^{(\nu_{1r}-1)*} \\
\hline
-a_{21}^{(0)*} & -a_{22}^{(0)*} & \cdots & -a_{2r}^{(0)*} \\
-a_{21}^{(1)*} & -a_{22}^{(1)*} & \cdots & -a_{2r}^{(1)*} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{21}^{(\nu_{21}-1)*} & -a_{22}^{(\nu_2-1)*} & \cdots & -a_{2r}^{(\nu_{2r}-1)*} \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
-a_{r1}^{(0)*} & -a_{r2}^{(0)*} & \cdots & -a_{rr}^{(0)*} \\
-a_{r1}^{(1)*} & -a_{r2}^{(1)*} & \cdots & -a_{rr}^{(1)*} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{r1}^{(\nu_{r1}-1)*} & -a_{r2}^{(\nu_{r2}-1)*} & \cdots & -a_{rr}^{(\nu_r-1)*}
\end{pmatrix}
$$

$$
S_K = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
-c_{21}^K & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-c_{r1}^K & -c_{r2}^K & \cdots & 1
\end{pmatrix}, \quad
S^* = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
-a_{21}^{(\check{\nu}_{21}-1)*} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_{r1}^{(\check{\nu}_{r1}-1)*} & -a_{r2}^{(\check{\nu}_{r2}-1)*} & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

При $\nu_1 \le \nu_2 \le \cdots \le \nu_r$ за счет $\check{\nu}_{ij} = \nu_{ij}$ связь (П.4) упрощается, так как $S_K = S^* = E_r \quad R_K = R^* \quad \sim \quad a_{ij}^{(k)K} = a_{ij}^{(k)*} \quad k = \overline{0, \nu_{ij} - 1} \quad i = \overline{1, r} \quad j = \overline{1, r}.$

Приложение 2. Структурная схема директивы М111

	I. Предварительные вычисления
1	Определение индексов наблюдаемости объекта (функция NuCauchy)
2	Преобразование формы Коши объекта к наблюдаемой блочно-сопровождающей канонической форме (Люенбергера) (функция Canon)
3	Вычисление матриц частотных параметров объекта (функция FDP)
	Примечание: предварительные вычисления производятся в соответствии с примечанием 3.
	II. Вычисление матриц частотных параметров объекта
1	Формирование временной сетки (2) (функция TimeNet)
2	Формирование испытательного сигнала (2) (функция Test)
3	Формирование внешнего возмущения (функция Dist)
4	Формирование сигнала с объекта (функция Lsim)
5	Вычисление матриц (3) оценок частотных параметров объекта

	(функция Fourier)
6	Сравнение матриц оценок частотных параметров объекта с их истинными значениями.
Примечание: пункты 1-5 повторяются (в цикле) m раз в соответствии с примечанием 2, а пункт 6 используются для контроля процесс фильтрации в соответствии с примечанием 3.	
III. Идентификация объекта	
1	Решение частотных уравнений (5) идентификации (функция FrId)
2	Приведение идентифицированного объекта к канонической форме Люенбергера (функция Cauchy)
IV. Анализ процесса идентификации	
1	Сравнение (9) коэффициентов канонических форм Люенбергера идентифицированного объекта с исходным.
2	Сравнение передаточных матриц идентифицированного объекта с исходным (функция tf).
3	Сравнение корней элементов передаточных матриц идентифицированного объекта с исходным (функция zpk).
4	Построение Боде диаграмм исходного и идентифицированного объекта (функция Bode).
5	Сравнение матриц частотных параметров идентифицированного объекта с исходным.

Приложение 3. Структурная схема директивы М317

Первые четыре блока структурной схемы настоящей директивы совпадают с одноименными блоками структурной схемы директивы М111 и поэтому здесь не приводятся. Отличается лишь блок *1. Предварительные вычисления*, в который добавлены следующие пункты:

4	Построение идеального регулятора(11), (12)	(функция ContRic)
5	Вычисление его матриц частотных параметров	(функция FDP)
6	Вычисление корней идеальной замкнутой системы	(функция eig)

Следующие блоки структурной схемы имеют вид:

V. Синтез $H\infty$ регулятора	
1	Синтез $H\infty$ регулятора (16) (функция ContRic)
2	Вычисление матриц частотных параметров синтезированного $H\infty$ регулятора (функция FDP).
3	Сравнение матриц частотных параметров синтезированного $H\infty$ регулятора с идеальным.
4	Сравнение передаточных матриц синтезированного $H\infty$ регулятора с идеальным (функция tf)
VI. Построение предполагаемой модели замкнутой системы	
1	Формирование матриц уравнения (17)предполагаемой замкнутой системы.
2	Определение индексов наблюдаемости замкнутой системы (функция NuCauchy).
3	Преобразование формы (17) Коши, предполагаемой замкнутой системы, к наблюдаемой блочно-сопровождающей канонической форме (18) Люенбергера (функция Canon).

	VII. Вычисление матриц частотных параметров замкнутой системы
1	Формирование временной сетки (20) (функция TimeNet)
2	Формирование испытательного сигнала (20) (функция Test)
3	Формирование внешнего возмущения (функция Dist)
4	Формирование сигнала с объекта (функция Lsim)
5	Вычисление матриц (21) оценок частотных параметров объекта (функция Fourier)
6	Вычисление матриц частотных параметров предполагаемой замкнутой системы (функция FDP).
7	Формирование матриц уравнения (22) замкнутой системы.
8	Вычисление матриц частотных параметров замкнутой системы (функция FDP).
9	Сравнение матриц оценок частотных параметров замкнутой системы с их истинными (и предполагаемыми) значениями.
	Примечание: пункты 1-5 повторяются (в цикле) m раз в соответствии с примечанием 2, а пункты 6-9 используются для контроля процесс фильтрации в соответствии с примечанием 3.
	VIII. Идентификация замкнутой системы
1	Решение частотных уравнений (24) идентификации (функция FrId)
2	Приведение идентифицированного объекта к канонической форме Люенбергера (функция Cauchy)
	IX. Анализ процесса адаптации
1	Сравнение (26) коэффициентов канонических форм Люенбергера идентифицированной замкнутой системы с предполагаемой.
2	Сравнение передаточных матриц идентифицированного замкнутой системы с истинной (функция tf).
3	Сравнение корней элементов передаточных матриц идентифицированной замкнутой системы с истинной (функция zpk).
4	Построение Боде диаграмм истинной и идентифицированной замкнутой системы (функция Bode).
5	Сравнение матриц частотных параметров истинной и идентифицированной замкнутой системы.
6	Вычисление матриц частотных параметров объекта по матрицам частотных параметров замкнутой системы (функция Recalc).
	Примечание: завершение процесса адаптации (либо его продолжение с переходом к пункту 6 блока II) осуществляется по пункту 1 блока IX.

Список литературы

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
2. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М: Наука, 1981. 448 с.
3. Александров А.Г. Частотное адаптивное управление, I, II // АиТ. 1994. Т. 55. No12. С. 93-104. //АиТ. 1995. Т. 56. No 1. С. 117-128.
4. Дьяконов В.П., Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002. 448 с.

5. Александров А.Г., Орлов Ю.Ф. Пакет программ АДАПЛАБ: Новые возможности для идентификации // Идентификация систем и задачи управления. SICPRO'2000, М.: Институт проблем управления РАН, 2000, CD-ROM No ISBN 5-201-09605-0, С. 123-131.
6. Mikhailova L.S., Isakov R.V. CACSD GAMMA-2PC: NEW POSSIBILITIES FOR DIRECTIVES CREATION
7. Александров А. Г. Конечно-частотная идентификация: многомерный объект //Международная конференция по проблемам управления. Москва, ИПУ РАН, Избранные труды, 1999, Т. 1, С. 15-28.
8. Орлов Ю.Ф. Способ конечно-частотной идентификации многомерного объекта // Идентификация систем и задачи управления. SICPRO'2000, М.: Институт проблем управления РАН, 2000, CD-ROM No ISBN 5-201-09605-0, С. 237-244.
9. Alexandrov A.G., Orlov Yu.F. Frequency adaptive control of multivariable plants // Preprints of the 15th Trienial World Congress of the IFAC, Barcelona, 2002, CD-ROM, T-Th-M03-3.
10. Александров А.Г. Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении // АиТ. 2000. Т. 61. No 4. С. 106-116.
11. Александров А.Г. Метод частотных параметров // АиТ. 1989. Т. 50. No12. С. 3-15.
12. Орлов Ю.Ф. Определение структурных инвариантов многомерного объекта по его частотным характеристикам // Идентификация систем и задачи управления. SICPRO'2000, М.: Институт проблем управления РАН, 2000, CD-ROM No ISBN 5-201-09605-0, С. 221-237.
13. Орлов Ю.Ф. Идентификация объекта на компакте// Обратные и некорректно поставленные задачи. М.: Московский государственный университет, 2001, С. 63.
14. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности. II. Применение процедур $H\infty$-оптимизации// АиТ. 1998. Т. 59. No 8. С. 124-138.
15. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986. 272 с.