К ПОНЯТИЯМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Александров А.Г.

Институт проблем управления РАН,Москва. alex7@ipu.rssi.ru

1. Введение

Теория управления развивается в двух направлениях, первое из которых теория автоматического управления и второе - теория менеджмента.

Приведем известные определения [1],[2],[3] предметов этих направлений. Автоматическое управление - это совокупность действий, направленных на поддержание или улучшение функционирования управляемого объекта без непосредственного участия человека в соответствии с заданной целью управления.

Менеджмент - это совокупность действий и процедур, направленных на обеспечение целенаправленного, эффективного и рационального коллективного труда.

Из этих определений следует различие указанных направлений. В первом случае объектом и субъектом (управляющим устройством, осуществляющим совокупность действий, направленных на достижение цели управления) управления является неживая природа, а во втором - объектом и субъектом управления является человек и группа людей. Это различие выражается в степени точности моделей, описывающих объект и субъект управления (систему управления). Законы неживой природы, открытые в последние три столетия, позволяют построить математические модели систем автоматического управления, которые описывают реальные системы с заданной точностью. Модели человека и групп людей носят характер словесного описания, и поэтому точность описания реальных процессов менеджмента невелика.

Общность этих двух видов систем состоит в следующем: а) это искусственные системы, создаваемые человеком, б) они создаются для достижения известных целей, формулируе-мых человеком, в) они имеют сходную структуру управления, которое содержит две компоненты: программное управление (план - в менеджменте) и стабилизирующее управление (оперативное управление - в менеджменте).

В связи с этой общностью желательно найти совокупность понятий, которые позволяют единообразно описать объект и субъект управления в теории управления и менеджменте.

Такие понятия вводятся в настоящей работе. Это понятия процесса,его входа и выхода, цели управления и управления. Общей формой описания процесса служит оператор, который определяется как [4]: "Пусть X и Y - два множества, оператором A из множества X во множество Y называется правило или соответствие, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет однозначно определенный элемент $A(x) \in Y$."Вводятся определения свойства операторов (устойчивость,линейность, стационарность), которые носят не декларативный, а процедуральный характер. Последнее означает, что свойство описывается процедурой экспериментального его определения.

2. Целевой процесс

Рассмотрим процесс, описываемый уравнением

$$\beta(t) = P[\alpha(t); t], t_b \leqslant t \leqslant t_e. \tag{2.1}$$

где $\alpha(t) \in R^{n_\alpha}$ -вход процесса, $\beta(t) \in R^{n_\beta}$ -выход процесса, P - оператор процесса, однозначно сопоставляющий каждому входу $\alpha(t)$ выход $\beta(t)$, t_b и t_e - заданные числа моментов начала и окончания процесса. Вектора $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ принадлежат заданным множествам A_α и A_β ограниченных,кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разрыва

$$\alpha \in A_\alpha, \quad \beta \in A_\beta \tag{2.2}$$

Выход $\beta(t)$ - результат процесса,выход $\alpha(t)$ - все то, что влияет на результат процесса.

Определение 2.1. Показателем процесса называется вектор

$$\theta(t) = Q[\beta(t); t], \tag{2.3}$$

где $\theta(t) \in R^{n_\theta}$, Q – оператор показателя.

Обозначим отклонения показателя процесса от заданного вектора $\gamma(t) \in R^{n_\gamma}$, где $n_\gamma \leqslant n_\theta$, как

$$L_i(t) = \theta_i(t) - \gamma_i(t), \quad i = 1, ..., n_\gamma$$

Функция $\gamma(t) \in A_\gamma$ задана на всем интервале $[t_b,\ t_e]$ либо на текущем интервале $[t_b,\ t], t \leqslant t_e$.

Определение 2.2. Цель процесса

$$|L_i(t)| \leqslant e_i^* \quad (i = 1, \dots, n_\gamma), \quad t \in [t_b, t_e] \tag{2.4}$$

где $e_i^*(i = 1, \dots, n_\gamma)$ – заданные числа.

Процесс (2.1) с целями (2.4) называется целевым, а функция $\gamma(t)$ называется целевой функцией.

Нулевой вектор $\alpha = 0$ принадлежат множеству A_α , а оператор P[0;t]=0. Кроме того, если $\alpha(t) = 0$ для $t \in [t_1, t_e]$, где $t_1 \geqslant t_b$, то $\beta(t) = 0$ при $t \in [t_1, t_e]$. Оператор Q показателя имеет такие же свойства.

3. Управление и возмущения

Представим вход α состоящим из двух векторов $\xi \in R^{n_\xi}$ и $\eta \in R^{n_\eta}$,($n_\xi + n_\eta = n_\alpha$) : $\alpha = (\xi; \eta)$.

Далее будем полагать все вектора столбцами и использовать символ ";"для объединения векторов.

Вектора $\xi(t)$ и $\eta(t)$ принадлежат заданным множествам A_α и A_β

$$\xi \in A_\xi \subset A_\alpha, \quad \eta \in A_\eta \subset A_\alpha. \tag{3.1}$$

Вектор ξ называется управлением, а вектор η -возмущением. Возмущение-неизвестная вектор-функция, а управление строится так, чтобы достигалась цель процесса.

Чтобы ввести понятие управления рассмотрим два случая, в первом из которых управление отсутствует, а во- втором - это заданная функция

Максимальными отклонениями показателей процесса от целевых функций в каждом из этих случаев являются

$$e_i^0 = max_{t_b \leqslant t \leqslant t_e, \quad \eta \in A_\eta, \xi = 0} |L_i(t)|, \quad e_i(\xi) = max_{t_b \leqslant t \leqslant t_e, \quad \eta \in A_\eta, \xi \neq 0} |L_i(t)|, i = 1, ..., n_\gamma \tag{3.2}$$

Определение 3.1. Управлением называется вход $\xi(t)$ процесса , который для всех возмущений $\eta \in A_\eta$ приближает к целевой функции хотя бы одну из компонент показателя процесса, а остальные компоненты могут удаляться от целевой функции лишь в заданных пределах

$$e_i(\xi) < e_i^0, \quad i \in 1,...,n_\gamma, \quad |e_k(\xi) - e_k^0| \leqslant \delta_k^*, k \in 1,...,n_\gamma, i \neq k, i+k = n_\gamma, \tag{3.3}$$

где $\delta_k^*(k \in 1,...,n_\gamma)$-заданные числа.

Упорядочим показатели процесса так, что первые из этих неравенств переписываются как

$$\varepsilon_i < \varepsilon_i^0, \quad i = 1,...,n_\gamma^0, 1 \leqslant n_\gamma^0 \leqslant n_\gamma. \tag{3.4}$$

Управление, при котором выполняются эти неравенства , будем называть управлением по n_γ^0 показателям.

4. Программное управление

Управление является суммой программного – $\xi^\vee(t)$ - и стабилизирующего - - $u(t)$- управлений :

$$\xi = \xi^\vee + u. \tag{4.1}$$

Определение 4.1. Программным называется управление , при котором для заданного возмущения $\eta^\vee(t)$ (которое является прогнозом неизвестного возмущения) значение показателя процесса равно целевой функции

$$\theta_i(t) = \gamma_i(t), \quad i = 1,...,n_\gamma \tag{4.2}$$

■

Программное управление строится по заданному оператору $P^\vee$,который является прогнозом оператора P .

Прогнозируемый выход процесса

$$\beta^\vee(t) = P^\vee[\xi^\vee(t);\ \eta^\vee(t); t], \tag{4.3}$$

По построению программного управления выполняется условие

$$Q[\beta^\vee(t); t] = \gamma(t) \tag{4.4}$$

Действительный вход процесса и его выход

$$\beta(t) = P[\alpha(t); t]. \tag{4.5}$$

отличаются от прогнозируемых.

Пусть

$$|\alpha_i(t) - \alpha_i^{\vee}(t)| \leqslant \alpha_i^*, \quad i = 1, \dots, n_\alpha, \tag{4.6}$$

где $\alpha^{\vee} = (\xi^{\vee}; \eta^{\vee})$, $\alpha_i^*, (i = 1, \dots, n_\alpha)$ – числа.

Определение 4.2. Процесс (4.5) называется устойчивым по отношению к цели управления, если для любых заданных чисел ε_i^* $(i = 1, \dots, n_\gamma)$, как бы малы они не были, существуют числа α_i^* $(i = 1, \dots, n_\alpha)$ такие, что для любых входов, удовлетворяющих неравенствам (4.6) выполняются условия

$$|\theta_i(t) - \gamma_i(t)| \leqslant \varepsilon_i^* \quad (i = 1, \dots, n_\gamma). \tag{4.7}$$

Если для любых чисел α_i^* $(i = 1, \dots, n_\alpha)$, как бы малы они не были, можно найти функции $\alpha_i(t)$ такие, что существует момент времени $t \in [t_b,\ t_e]$ такой, что хотя бы одно из неравенств (4.7) нарушается, то процесс (4.5) называется неустойчивым по отношению к цели управления. ■

Если в неравенствах (4.7) заменить показатели γ_i $(i = 1, \dots, n_\theta)$ на выходы процесса:

$$|\beta_i(t) - \beta_i^{\vee}(t)| \leqslant \epsilon_i^* \quad (i = 1, \dots, n_\beta), \tag{4.8}$$

где ϵ_i^* $(i = 1, \dots, n_{\beta\rho})$ – заданные числа, то процесс (4.5) называется устойчивым, либо неустойчивым по выходу.

5. Стабилизирующее управление

5.1. Цель управления

Процесс (4.5) может оказаться неустойчивым. Кроме того, если он устойчив, то числа α_i^* $(i = 1, \dots, n_\alpha)$, определяющие допустимые отклонения входа от программного, могут оказаться меньше, чем реальные отклонения входа, которые могут приводить к нарушению целевых неравенств .

В этих ситуациях необходимо стабилизирующее управление, которое предназначено для устойчивости процесса а также для обеспечения целевых неравенств (2.2).

Обозначим отклонения выхода процесса и возмущения от прогнозируемых как

$$y(t) = \beta(t) - \beta^{\vee}(t), \quad f(t) = \eta(t) - \eta^{\vee}(t). \tag{5.1}$$

Вычитая из уравнения (4.5) уравнение (4.3), получим уравнение отклонений действительного процесса от программного

$$y(t) = P_s[u(t); f(t); t] \tag{5.2}$$

где оператор $P_s[u; f; t] = P[\xi^{\vee} + u; \eta^{\vee} + f; t] - P^{\vee}[\xi^{\vee}; \eta^{\vee}; t]$.

Стабилизирующее управление формируется регулятором, который описывается уравнением

$$u(t) = C[y(t); f_c(t); t], \tag{5.3}$$

где C-оператор регулятора, $f_c(t) \in R^{fc}$-вектор-функция возмущения регулятора, $f_c(t) \in A_{fc}$, где A_{fc}-заданное множество функций, аналогичное множеству A_η.

Уравнения (5.2),(5.3) описывают процесс, который называется замкнутым, так как выход процесса прикладывается к входу регулятора и наоборот. Предполагается, что существуют операторы M^y M^u, позволяющие описать этот процесс как

$$y(t) = M^y[f(t); f_c(t); t], \quad u(t) = M^u[f(t); f_c(t); t], \tag{5.4}$$

Целью стабилизирующего управления является выполнение условий

$$|y_i(t)| \leqslant y_i^* \quad t \geqslant t_{pi}, \quad t_{pi} < t_e \quad i = 1, ..., n_\beta, \tag{5.5}$$

где $y_i^*, i = 1, ..., n_\beta$ -заданные числа, $t_pi, i = 1, ..., n_\beta$ -времена регулирования. Числа $y_i^*, i = 1, ..., n_\beta$ находятся так, что при выполнении этих условий выполнялись целевые неравенства (2.4). В частности, если показателем процесса является его выход ($\gamma(t) = \beta(t)$) и $\gamma(t) = 0$, то $y_i^* = \varepsilon_i^*, i = 1, ..., n_\beta$.

Для краткости, далее ограничимся случаем, когда выходы и входы процесса отклонения $-y$ и u – скаляры, возмущения отсутствуют– $f(t) = f_c(t) = 0$.

5.2. Стационарные и линейные процессы отклонения

Для описания стационарных процессов осуществим следующие эксперименты

1. Вход процесса (5.2) – функция

$$u^{(1)}(t)=\begin{cases} 0 & \texttt{при} \quad t_b \leqslant t < t_1, \\ \bar{u}^{(1)}(t) & \texttt{при} \quad t_1 \leqslant t < t_2, \\ 0 & \texttt{при} \quad t_2 \leqslant t < t_e. \end{cases} \tag{5.6}$$

Его выход

$$y^{(1)}(t)=\begin{cases} 0 & \texttt{при} \quad t_b \leqslant t < t_1, \\ \bar{y}^{(1)}(t) & \texttt{при} \quad t_1 \leqslant t < t_e. \end{cases} \tag{5.7}$$

2. Вход процесса (5.2) – функция

$$u^{(2)}(t)=\begin{cases} 0 & \texttt{при} \quad t_b \leqslant t < t_1+\tau, \\ \bar{u}^{(1)}(t) & \texttt{при} \quad t_1+\tau \leqslant t < t_2+\tau, \\ 0 & \texttt{при} \quad t_2+\tau \leqslant t < t_e. \end{cases} \tag{5.8}$$

где τ – положительное число, такое, что $t_2+\tau \leqslant t_e$.

Его выход

$$y^{(2)}(t)=\begin{cases} 0 & \texttt{при} \quad t_b \leqslant t < t_1+\tau, \\ \bar{y}^{(2)}(t) & \texttt{при} \quad t_1+\tau \leqslant t < t_e. \end{cases} \tag{5.9}$$

<u>Определение 5.1.</u> Процесс (5.2) называется стационарным, если для любой пары входов (5.6), (5.8) выходы (5.7), (5.9) удовлетворяют равенству

$$y^{(2)}(t)\,(t_1+\tau+s)=y^{(1)}(t)\,(t_1+s)\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant t_2-t_1 \tag{5.10}$$

■

Для определения линейных процессов введем множество функций $A_u \in A_\alpha$, удовлетворяющих условию

$$|u(t)| \leqslant u^*, \tag{5.11}$$

где u^* – заданное число, и осуществим следующие эксперименты

1. Вход процесса $u^{(3)}(t)$. Его выход $y^{(3)}(t)$.

2. Вход процесса $u^{(4)}(t)$. Его выход $y^{(4)}(t)$.

3. Вход процесса $u^{(5)}(t)=u^{(3)}+qu^{(4)}(t)$, где q – любое число. Его выход $y^{(5)}(t)$.

<u>Определение 5.2.</u> Процесс (5.2) называется линейным, если $u \in A_u$ и для любых чисел q выход

$$y^{(5)}(t)=y^{(3)}(t)+qy^{(4)}(t). \tag{5.12}$$

■

5.3. Частотный оператор

Осуществим серию экспериментов, в каждом из которых будем подавать на вход процесса гармоническую функцию

$$u^{(k)}(t) = a\sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad |a_k| \leqslant u^*, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{5.13}$$

Пусть выход процесса имеет вид

$$y^{(k)}(t) = a(\omega_k)\sin(\omega_k t + \varphi(\omega_k)) + \mu(\omega_k,\, t), \quad (k = 1, \ldots, N), \tag{5.14}$$

где $\mu(\omega_k,\, t)$ – функции, которые, начиная с некоторого момента времени t_*, удовлетворяет условиям

$$|\mu(\omega_k, t)| \leqslant \mu^*, \quad k = 1, \ldots, N, \quad t \geqslant t_*,$$

в которых μ^* – заданное число.

Введем функцию комплексной переменной $j\omega$

$$w(j\omega) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} k_i (j\omega)^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} d_i (j\omega)^i}, \tag{5.15}$$

где k_i и d_i $(i = 0, \ldots, n; k_n = 0)$ – вещественные числа.

Определение 5.3. Оператор P_s стационарного, линейного процесса (5.2) называется частотным оператором n-го порядка, если для заданного числа μ^* существует функция (5.15) такая, что амплитуды и фазы входа и выхода связаны соотношениями

$$a(\omega_k) = |w(j\omega_k)|\, a_k, \quad \varphi(\omega_k) = \varphi_k + \mathrm{Arg}\, w(j\omega_k), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{5.16}$$

■

Чтобы описать экспериментальную процедуру, позволяющие проверить существование функции (5.15),заметим, что, если процесс (5.2), описывается дифференциальным уравнением

$$d_n y^{(n)} + \ldots + d_1 \dot{y} + d_0 y = k_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + k_1 \dot{u} + k_0 u, \tag{5.17}$$

то при достаточно большой длительности процесса и любом заданном числе μ^* (в частности, сколь угодно малом) существует функция (5.15), называемая [5] частотной передаточной функцией.

В связи с этим число μ^* можно назвать уровнем близости оператора P_s к оператору, порождаемому дифференциальным уравнением (5.17)

Процедура экспериментальной проверки существования частотного оператора повторяет известную [6] процедуру идентификации неизвестных коэффициентов уравнения (5.17): выходы (5.14) прикладываются к входам фильтра Фурье, чьи выходы служат коэффициентами частотных уравнений, которые дают коэффициенты функции (5.14).

6. Критерий Найквиста

Разомкнем процесс,описываемый уравнениями (5.2) и (5.3), прикладывая ко входу регулятора воздействие v, не зависящее от выхода объекта. Уравнения процесса примут вид

$$y = P_s(u;\ f), \quad u = C(v;\ f_c). \tag{6.1}$$

Исключая переменную u запишем эти уравнения как

$$y = P_p\left[v;\ f;\ f_c\right], \tag{6.2}$$

где P_p – оператор разомкнутого процесса.

Пусть оператор P_p – частотный оператор.

Осуществим серию экспериментов, в каждом из которых будем подавать на вход процесса (6.2) гармоническую функцию

$$v^{(k)}(t) = \sin\omega_k t, \quad k = 1, \ldots, N, \quad t_b \leqslant t < t_1, \quad t_1 < t_e. \tag{6.3}$$

Тогда на выходе разомкнутого процесса получим

$$y^{(k)}(t) = a_p(\omega_k)\sin(\omega_k t + \varphi_p(\omega_k)) + \mu_p(\omega_k,\ t), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{6.4}$$

где $\mu_p(\omega_k,\ t)$ – функции, которые, начиная с некоторого момента времени t_*, удовлетворяет условиям

$$|\mu_p(\omega_k, t)| \leqslant \mu_p^*, \quad k = 1, \ldots, N, \quad t \geqslant t_*,$$

в которых μ_p^* – заданное число.

Пусть существует частота $\omega_{\text{ср}}$ такая, что амплитуда выхода

$$a_p(\omega_{\text{ср}}) = 1 \tag{6.5}$$

Критерий Найквиста.

При $\mu_p^* = 0$ замкнутый процесс (5.2) , (5.3)-устойчив, если выполняются неравенства

$$\varphi_p(\omega_{\text{ср}}) > -\pi. \tag{6.6}$$

Если $\varphi_p(\omega_{\text{ср}}) < -\pi,$ то он неустойчив.

Этот критерий используется в автоматическом управлении и в случае, когда μ_p^* - достаточно малое число.

7. ПИД-управление

В ряде случаев целевая функция (задающее воздействие) известна лишь на интервале $[t_b, t]$, где t – текущее время процесса $(t \leqslant t_e)$, а показателем процесса (2.1)является его выход . В этом случае цель процесса – выполнение требований к величине отклонения выхода объекта $y(t) = \beta(t) - \gamma(t)$ от задающего воздействия $\gamma(t)$ и говорят о процессе слежения выхода объекта за задающим воздействием.

Если оператор C регулятора является интегро-дифференцирующим оператором вида

$$C[y] = k_c\left(y + \frac{1}{T_i}\int_{t_b}^{t} ydt + T_d\frac{dy}{dt}\right), \tag{7.1}$$

где k_c – коэффициент пропорциональности, T_i – интегрирования, T_d – коэффициент дифференцирования , регулятор называется ПИД-регулятором.

Управление, являющееся решением уравнения

$$g\frac{du}{dt} + u = k_c\left(y + \frac{1}{T_i}\int_{t_b}^{t} ydt + T_d\frac{dy}{dt}\right) \tag{7.2}$$

называется ПИД-управлением.

Будем полагать, что задающее воздействие $\gamma(t)$ является кусочно постоянной функцией с достаточно большими интервалами постоянства $H < t_e - t_b$.

Найдем коэффициенты $k_c,\ T_i,\ T_\alpha$.

Для этого осуществим следующие эксперименты.

Приложим ко входу процесса (2.1) с частотным оператором P гармоническую функцию

$$u = a_1 \sin\omega_1 t + a_2 \sin\omega_2 t, \quad t \geqslant t_b, \tag{7.3}$$

где a_k, ω_k $(k = 1, 2)$ – заданные числа, $\omega_1 < \omega_2$, а выход β подадим на вход фильтра Фурье

$$r_k(æ) = \frac{2}{a_k æ}\int_{t_b}^{t_b+ae} \beta(t)\sin\omega_k dt, \quad i_k(æ) = \frac{2}{a_k æ}\int_{t_b}^{t_b+ae} \beta(t)\cos\omega_k dt, \quad k = 1, 2, \tag{7.4}$$

где æ – время фильтрации, $æ < t_e - t_b$.

Найдем, опуская время фильтрации, функции

$$q_1 = \left[\frac{(r_2^2 + i_2^2) - (r_1^2 + i_1^2)}{\omega_1^2 (r_1^2 + i_1^2) - \omega_2^2 (r_2^2 + i_2^2)}\right]^{1/2}, \quad q_2 = \left[\left(r_2^2 + i_2^2\right)\left(q_1^2\omega_2^2 + 1\right)\right]^{1/2}; \tag{7.5}$$

$$q_3 = \frac{1}{\omega_1}\operatorname{arctg}\frac{i_1 - q_1 r_1 \omega_1}{r_1 - q_1 i_1 \omega_1}, \quad \omega_1 q_3 < \frac{\pi}{2}. \tag{7.6}$$

Эти функции обладают свойством

$$q_i(t) = q_i^* + \varepsilon_i(\omega_1,\, \omega_2,\, t), \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{7.7}$$

в котором q_i^* $, i = 1, 2, 3$ – числа,

$$|\varepsilon_i(\omega_1,\, \omega_2,\, t)| \leqslant \varepsilon_i^*, \quad (i = 1, 2, 3), \quad t \geqslant t^*, \quad t^* < H, \tag{7.8}$$

где ε_i^* $(i = 1, 2)$ – заданные достаточно малые числа.

Коэффициенты ПИД-управления находятся по формулам

$$k_c = \frac{2q_1^* + q_3^*}{2q_2^*(\lambda + q_3^*)}, \quad T_i = \frac{2q_1^* + q_3^*}{2}, \quad T_d = \frac{q_1^* q_3^*}{2q_1^* + q_3^*}; \tag{7.9}$$

$$g = \frac{\lambda q_3^*}{2\lambda + q_3^*}, \tag{7.10}$$

в которых λ – положительное число.

8. Литература

1.Большая Советская энциклопедия,Т.1.

2. Управление организацией. Энциклопедический словарь/Под ред. А.Г.Поршнева, А.Я.Кибанова, В.П.Гунина - М.:ИНФРА - М,2001.

3. Новиков Д.А. "Теория управления организационными системами."М.:Московский психолого-социальный институт,2005.

4. Математическая энциклопедия,т.4,Изд. "Советская энциклопедия М.1984.

5. Воронов А.А. "Основы теории автоматического управления Часть I,Изд-во "Энергия 1965.

6. Александров А.Г. Методы построения систем автоматического управления. М: Физматлит, 2008.