

© 2013 г. И.Г. РЕЗКОВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНЫЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ МНОГОРЕЖИМНОГО ОБЪЕКТА¹

Рассматривается адаптивный регулятор для однорежимного объекта и исследуется возможность его применения для многорежимного объекта. Предлагается усовершенствованный алгоритм адаптивного регулятора для многорежимного объекта. Исследуется влияние эффекта квантования в ЦАП и АЦП на результаты адаптивного управления. Исследуется влияние амплитуд испытательного сигнала на результат идентификации. Приводятся результаты экспериментальных испытаний адаптивного регулятора с усовершенствованными алгоритмами.

1. Введение

В теории адаптивного управления можно выделить несколько направлений, когда внешнее возмущение является неизвестной ограниченной функцией.

Один из таких подходов связан с понятием эталонной модели. Характерные результаты этого направления содержатся, например, в [1, 2]. Суть этого направления можно пояснить на примере [1], где решается задача LQ -оптимизации для объекта с неизвестными коэффициентами. При решении задачи в уравнениях Риккати в качестве истинных коэффициентов объекта подставляются их квазиоценки, которые формируются с помощью метода градиента. Такие квазиоценки при воздействии внешнего возмущения могут существенно отличаться от истинных. В [3] описаны другие возможности этого подхода, не использующие квазиоценки.

Особенностью метода рекуррентных целевых неравенств [4, 5] является формулирование цели адаптивного управления в виде допусков на отклонения установившегося выхода объекта при воздействии произвольных ограниченных возмущений. В [6, 7] решение задачи l_1 -оптимизации развито на случай неизвестных коэффициентов объекта. В этих работах используется разновидность градиентного метода таким образом, чтобы найденные квазиоценки коэффициентов объекта обеспечивали минимальное отклонение выхода системы. Однако численная реализация этого метода затруднена.

В связи с этим в ряде работ рассматривается более узкий класс внешних возмущений. Например, в [8] внешнее возмущение – кусочно-постоянная функция с заданным частотным диапазоном, а оценки коэффициентов объекта ищутся с помощью испытательного сигнала и адаптивного наблюдателя.

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-08-00338-а).

В частотном адаптивном управлении [9] цель управления – заданная точность выхода объекта, а внешнее возмущение – произвольная ограниченная функция. Применяемый метод конечно-частотной идентификации [10] использует испытательный сигнал в виде конечной суммы гармоник. Реализация этого подхода началась с регулятора ЧАР-1 [11] и за последние два десятилетия претерпела ряд модификаций, включая алгоритмы настройки амплитуд и частот, а также длительности адаптации.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 дана постановка задачи. В разделе 3 излагаются известные результаты решения задачи для однорежимного случая и приводится описание экспериментального стенда. В разделе 4 описывается прямой метод восстановления, предлагается способ подавления шумов, вызванных квантованием по уровню в цифро-аналоговом (ЦАП) и аналогово-цифровом преобразователе (АЦП) и способ синтеза реализуемого регулятора с данным свойством. В разделе 5 представлены численные исследования предлагаемого регулятора с учетом наличия ЦАП, АЦП в системе. В разделе 6 приводятся результаты полунатурных экспериментальных исследований. В Приложениях приведены выводы основных выражений и доказательство утверждения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим объект, описываемый разностным уравнением

$$(2.1) \quad \begin{aligned} y(k) + d_1^{[m]}y(k-1) + \dots + d_{n-1}^{[m]}y(k-n+1) + d_n^{[m]}y(k-n) = \\ = k_1^{[m]}u(k-1) + \dots + k_{n-1}^{[m]}u(k-n+1) + k_n^{[m]}u(k-n) + f(k), \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $y(k)$ – выход объекта, измеряемый в моменты времени $t = kh$ (h – интервал дискретности объекта); $u(k)$ – управление; $f(k)$ – неизмеряемое внешнее возмущение, являющееся неизвестной ограниченной функцией ($|f(k)| \leq f^*$, где f^* – заданное число); m – номер режима работы объекта, n – известное число. Коэффициенты объекта $d_j^{[m]}$ и $k_j^{[m]}$ – это неизвестные числа, которые изменяются в моменты времени $t_{\text{CM}}^{[m]}$ и постоянны на интервалах времени $[t_{\text{CM}}^{[m]}, t_{\text{CM}}^{[m+1]})$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $t_{\text{CM}}^{[1]} = 0$. Моменты времени $t_{\text{CM}}^{[m]}$, $m = 2, 3, 4, \dots$ известны либо находятся в процессе адаптации. Объект асимптотически устойчив на каждом из режимов работы m .

Управление формируется регулятором:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u(k) + g_1^{[m]}u(k-1) + \dots + g_{\psi-1}^{[m]}u(k-\psi+1) + g_{\psi}^{[m]}u(k-\psi) = \\ = r_0^{[m]}y_v(k-\psi+n-1) + r_1^{[m]}y_v(k-\psi+n-2) + \dots + r_{n-1}^{[m]}y_v(k-\psi), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где $y_v(k) \triangleq y(k) - v(k)$, $v(k)$ – идентифицирующий сигнал, $r^{[m]} = [r_0^{[m]}, \dots, r_{n-1}^{[m]}]$, $g^{[m]} = [g_1^{[m]}, \dots, g_{\psi}^{[m]}]$ – коэффициенты регулятора, $\psi \geq n - 1$ – заданное число. Коэффициенты $r^{[m]}$, $g^{[m]}$ находятся к моменту времени $t_{\text{CM}}^{[m]} +$

+ $\Delta t_{\text{адап}}^{[m]}$, здесь $t_{\text{см}}^{[m]}$ – момент начала m -го режима работы объекта, $\Delta t_{\text{адап}}^{[m]}$ – длительность адаптации на режиме m . На первом режиме (при $m = 1$) параметры объекта неизвестны, в качестве сигнала управления подается испытательный сигнал $u(k) = v(k)$. На последующих режимах на интервалах времени $\left[t_{\text{см}}^{[m]}, t_{\text{см}}^{[m]} + \Delta t_{\text{адап}}^{[m]} \right)$ работает регулятор (2.2) с коэффициентами $r^{[m-1]}$, $g^{[m-1]}$.

Передаточная функция регулятора (2.2) имеет вид

$$(2.3) \quad w_{\text{пер}}(q) = \frac{r_0^{[m]} q^{\psi-n+1} + r_1^{[m]} q^{\psi-n+2} + \dots + r_{n-1}^{[m]} q^{\psi}}{1 + g_1^{[m]} q + \dots + g_{\psi}^{[m]} q^{\psi}},$$

здесь оператор сдвига q определяется как $q^i x(k) \triangleq x(k-i)$.

Задача состоит в том, чтобы для каждого $m = 1, 2, 3, \dots$ найти коэффициенты регулятора $r^{[m]}$, $g^{[m]}$ так, что регулятор (2.2) обеспечивал бы выполнение требования к точности

$$(2.4) \quad |y(k)| \leq y^*, \quad k > k_{\star}^{[m]},$$

где y^* – заданное число, $k_{\star}^{[m]}$ таково, что момент времени $t_{\star} = k_{\star}^{[m]} h$ лежит внутри интервала времени $t_{\text{см}}^{[m]} < t < t_{\text{см}}^{[m+1]}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. При этом предполагается следующее:

- а) существует число $k_{\star}^{[m]}$, удовлетворяющее (2.4);
- б) существует регулятор (2.2), обеспечивающий достижение цели (2.4), когда коэффициенты объекта (2.1) известны;
- в) коэффициенты объекта мало изменяются от режима к режиму так, что объект в m -м режиме с регулятором, рассчитанным для объекта режима $(m-1)$, устойчив (условие смежной устойчивости). Однако, если не изменять коэффициенты регулятора, при переходе на некоторый режим система теряет устойчивость;
- г) интервал времени до смены режима работы объекта больше, чем интервал времени, необходимый для адаптации:

$$t_{\text{см}}^{[m+1]} > t_{\text{см}}^{[m]} + \Delta t_{\text{адап}}^{[m]}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

здесь $\Delta t_{\text{адап}}^{[m]}$ – время, необходимое для адаптации.

Экспериментальные исследования с частотным адаптивным регулятором, результаты которых приведены в разделах 5, 6, показали высокий уровень шумов в сигнале управления, вызванных наличием квантования по уровню в ЦАП и АЦП, что приводило к увеличению длительности идентификации и увеличению погрешности определения параметров объекта в замкнутой системе. Цель работы состоит в развитии существующих алгоритмов адаптивного регулятора на случай многорежимного объекта, модернизации алгоритмов с учетом наличия ЦАП и АЦП в системе управления, проведении экспериментов с усовершенствованным регулятором.

3. Предварительные сведения

Приведем вначале некоторые результаты решения задачи для однорежимного случая [12] ($m = 1$) и уточним ее с учетом особенностей, вызванных многорежимностью объекта.

Структурная схема адаптивного регулятора показана на рис. 1.

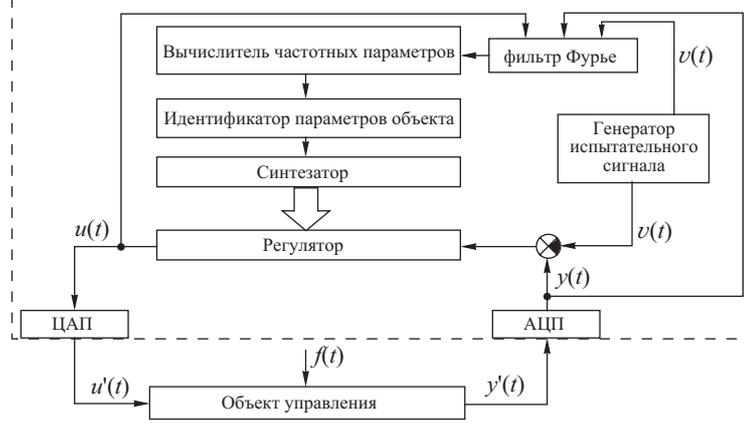


Рис. 1. Схема адаптивного регулятора.

Генератор испытательного сигнала формирует испытательный сигнал $v(k)$, состоящий из n гармоник:

$$v(k) = \sum_{i=1}^n \rho_i \sin(\omega_i kh), \quad 0 < \omega_i < \frac{\pi}{h},$$

здесь ρ_i – амплитуда i -й гармоники, ω_i – ее частота.

Фильтр Фурье вычисляет оценки $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$ частотных параметров [10] объекта:

$$\hat{\alpha}_{yi} = \alpha_{yi}(N) = \frac{2}{\rho_i N \tau} \sum_{k=k_0+1}^{k_0+N\tau} y(k) \sin(\omega_i kh),$$

$$\hat{\beta}_{yi} = \beta_{yi}(N) = \frac{2}{\rho_i N \tau} \sum_{k=k_0+1}^{k_0+N\tau} y(k) \cos(\omega_i kh),$$

$$\hat{\alpha}_{ui} = \alpha_{ui}(N) = \frac{2}{\rho_i N \tau} \sum_{k=k_0+1}^{k_0+N\tau} u(k) \sin(\omega_i kh),$$

$$\hat{\beta}_{ui} = \beta_{ui}(N) = \frac{2}{\rho_i N \tau} \sum_{k=k_0+1}^{k_0+N\tau} u(k) \cos(\omega_i kh),$$

$$N = 1, 2, 3, \dots, \quad \tau = \frac{2\pi}{\min(\omega_i)h}.$$

Вычислитель частотных параметров находит частотные параметры объекта:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\hat{\alpha}_{yi}\hat{\alpha}_{ui} + \hat{\beta}_{yi}\hat{\beta}_{ui}}{\hat{\alpha}_{ui}^2 + \hat{\beta}_{ui}^2}, \quad \hat{\beta}_i = \frac{-\hat{\alpha}_{yi}\hat{\beta}_{ui} + \hat{\beta}_{yi}\hat{\alpha}_{ui}}{\hat{\alpha}_{ui}^2 + \hat{\beta}_{ui}^2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Идентификатор решает частотные уравнения [10]:

$$\hat{k}(e^{-j\omega_i h}) - (\hat{\alpha}_i + j\hat{\beta}_i)\hat{d}(e^{-j\omega_i h}) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$\hat{k}(q) = \hat{k}_1 q + \dots + \hat{k}_{n-1} q^{n-1} + \hat{k}_n q^n$, $\hat{d}(q) = 1 + \hat{d}_1 q + \dots + \hat{d}_{n-1} q^{n-1} + \hat{d}_n q^n$ – оценки полиномов объекта $k(q) = k_1 q + \dots + k_{n-1} q^{n-1} + k_n q^n$, $d(q) = 1 + d_1 q + \dots + d_{n-1} q^{n-1} + d_n q^n$.

Передаточная функция объекта, полученная в результате идентификации, описывается как

$$(3.1) \quad w(q) = \frac{\hat{k}(q)}{\hat{d}(q)}.$$

Объект (3.1), записанный в пространстве состояний, имеет вид

$$(3.2) \quad \begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + bu(k-1), \\ y(k) = cx(k), \end{cases}$$

где $x(k)$ – n -мерный вектор состояния объекта, A – матрица размером $n \times n$, b – n -мерный вектор чисел, c – строка чисел.

Синтезатор решает задачу LQ -оптимизации с функционалом

$$(3.3) \quad J = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ x^T(k)Qx(k) + x_{n+1}^2(k) + \varepsilon_1^2 [x_{n+2}(k)]^2 + \varepsilon_2^2 [x_{n+3}(k)]^2 + \dots + \varepsilon_{\psi-1}^2 [x_{n+\psi}(k)]^2 + \varepsilon_{\psi}^2 [\mu(k)]^2 \right\},$$

где

$$Q = c^T \tilde{q}^2 c, \quad \tilde{q} = \frac{f^*}{y^*},$$

$$x_{n+1}(k) \triangleq u(k), \quad x_{n+2}(k) \triangleq \frac{x_{n+1}(k+1) - x_{n+1}(k)}{h},$$

$$x_{n+3}(k) \triangleq \frac{x_{n+2}(k+1) - x_{n+2}(k)}{h}, \dots,$$

$$x_{n+\psi}(k) \triangleq \frac{x_{n+\psi-1}(k+1) - x_{n+\psi-1}(k)}{h},$$

$$\mu(k) \triangleq \frac{x_{n+\psi}(k+1) - x_{n+\psi}(k)}{h},$$

$\varepsilon_i^2 = \frac{C_\psi^i}{5^{2i}\omega_{\text{ср}}^{2i}}$ ($i = \overline{1, \psi}$) – достаточно малые коэффициенты [13], которые зависят от частоты среза системы $\omega_{\text{ср}}$, здесь C_ψ^i – число сочетаний из ψ по i , число $\psi \geq n - 1$ определяется из условия реализуемости передаточной функции регулятора. Отметим, что при $h \rightarrow 0$ выполняется $x_{n+2} \rightarrow \dot{i}, x_{n+3} \rightarrow \ddot{i}, \dots$.

Синтезатор находит коэффициенты регулятора так, чтобы выполнялись требования к точности регулирования (2.4). При этом используются полученные экспериментально оценки коэффициентов объекта \hat{k}_j и \hat{d}_j , $j = \overline{1, n}$.

Для экспериментального исследования ЧАР-25 был разработан стенд ФМ-2 [14]. Стенд ФМ-2 состоит из промышленного контроллера WinCon W-8341 [15], содержащего 14-битные ЦАП и АЦП, и IBM-совместимого одноплатного промышленного компьютера Athena [16] со встроенным ЦАП разрядностью 12 бит и АЦП разрядностью 16 бит. ЧАР-25 работает на промышленном контроллере WinCon, а объект имитируется промышленным компьютером Athena.

4. Способ подавления шумов (помех), вызванных наличием ЦАП и АЦП

4.1. Идея подхода

Для борьбы с зашумлением в сигнале управления применим следующий прием. Суть идеи состоит в увеличении порядка знаменателя передаточной функции регулятора (2.3), т.е. это своего рода фильтр таких помех (шумов). Реализуется это следующим образом: в функционале качества (3.3) порядок знаменателя регулятора определяется параметром $\psi = n - 1$. Добавим к этому значению число γ , приводящее к увеличению порядка знаменателя регулятора: $\psi = n - 1 + \gamma$. Исследуем, как зависит передаточная функция регулятора от числа γ . Для этого рассмотрим основные этапы синтеза регулятора.

4.2. Прямой метод восстановления фазового вектора

Синтез регулятора основан на решении задачи LQ -оптимизации и построении наблюдателя прямым методом восстановления [13].

Основу алгоритма синтеза регулятора составляет оптимальный регулятор по состоянию в смысле функционала

$$(4.1) \quad J = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T(k)Qx(k) + Ru^2(k)\},$$

где $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R = 1$ (при $\psi = 0$ функционал (3.3) совпадает с (4.1)).

Функционал (4.1) минимизируется на движениях объекта (3.2) с регулятором по состоянию

$$(4.2) \quad u(k) = Kx(k),$$

где n -мерный вектор-строка K находится через решение уравнения Риккати.

Предложение 1. Синтез регулятора предлагается осуществлять с помощью регулятора по состоянию (4.2) и наблюдателя (4.3):

$$(4.3) \quad q^\psi x(k) = l(q)u(k) + \lambda(q)y(k),$$

откуда

$$(4.4) \quad [q^\psi - Kl(q)]u(k) = K\lambda(q)y(k).$$

Наблюдатель (4.3) получен с использованием прямого метода восстановления [13], его вывод приведен в Приложении 1. В выражении (4.3)

$$(4.5) \quad l(q) = -(L^0)^{-1}[l_1 \ l_2 \ \dots \ l_{n-1}]\phi(q),$$

$$(4.6) \quad \lambda(q) = (L^0)^{-1}\psi(q),$$

где

$$(4.7) \quad L^0 = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ cb \\ cAb \\ \vdots \\ cA^{n-2}b \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ cb \\ \vdots \\ cA^{n-3}b \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad l_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ cb \end{bmatrix},$$

$$(4.8) \quad \phi(q) = \begin{bmatrix} q^\psi \\ q^{\psi-1} \\ q^{\psi-2} \\ \vdots \\ q^{\psi-n+2} \end{bmatrix}, \quad \psi(q) = \begin{bmatrix} q^\psi \\ q^{\psi-1} \\ q^{\psi-2} \\ \vdots \\ q^{\psi-n+1} \end{bmatrix},$$

здесь L^0 – матрица $n \times n$, l_1, \dots, l_{n-1} – n -мерные векторы.

В [13] наблюдатель, аналогичный (4.3), строится с использованием “прошлых” значений сигналов $y(k)$, $u(k)$, т.е. таких значений, которые в реализованном регуляторе хранятся в памяти машины-вычислителя. Такой подход обладает следующим недостатком: при построении наблюдателя используется обратная матрица A^{-1} , которая может не существовать, если в объекте присутствует интегратор (нулевое собственное значение в матрице A). Предлагаемый подход лишен этого недостатка.

Передачная функция регулятора (4.4) запишется как

$$(4.9) \quad w_{\text{рег}}(q) = \frac{K\lambda(q)}{(q^\psi - Kl(q))}.$$

Заметим, что в выражении (4.9) полиномы $(K\lambda(q))$ и $(q^\psi - Kl(q))$ имеют старшую степень, равную ψ , младшая степень числителя $(q^\psi - Kl(q))$ равна $\psi - n + 1$, знаменателя $(K\lambda(q))$ – $\psi - n + 2$. Отсюда следует, что передачная функция (4.9), вообще говоря, не может быть реализована. С целью реализуемости регулятора будем рассматривать функционал (3.3).

4.3. Способ усиления фильтрующих свойств регулятора.
Синтез реализуемого регулятора

Как уже было отмечено, экспериментальные исследования с частотным адаптивным регулятором показали высокий уровень шумов в сигнале управления, вызванные наличием квантования по уровню в ЦАП- и АЦП-преобразователях, что приводило к увеличению длительности и погрешности идентификации объекта. Идея подавления таких шумов (помех) заключается в увеличении порядка знаменателя передаточной функции регулятора. Осуществляется это следующим образом.

Реализуемый регулятор синтезируется с использованием функционала (3.3), в котором параметр $\psi = n - 1$ [13]. Для усиления фильтрующих свойств регулятора параметр ψ предлагается увеличивать на величину γ : $\psi = n - 1 + \gamma$. Решение задачи, описанной в разделе 4.2, с функционалом (3.3) приводит к регулятору по состоянию, который имеет вид

$$(4.10) \quad \mu(k) = \bar{K}\bar{x}(k),$$

его вывод приведен в Приложении 2. Выражение (4.10) может быть переписано как

$$(4.11) \quad \tilde{d}(q)u(k) = K^{[1]}q^\psi x(k),$$

здесь $\tilde{d}(q) = q^\psi \frac{\det(Iq^{-1} - \tilde{A})^{-1}}{h^\psi}$ – полином степени ψ , матрица $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\psi \times \psi}$ имеет структуру

$$(4.12) \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h \\ hK^{[2]}(1) & hK^{[2]}(2) & hK^{[2]}(3) & hK^{[2]}(4) & \dots & hK^{[2]}(\psi) + 1 \end{bmatrix},$$

$K^{[1]} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $K^{[2]} \in \mathbb{R}^{1 \times \psi}$ – строки чисел, получаемые как результат оптимизации функционала (3.3) при расширенном векторе состояния.

Подставив (4.3) в (4.11), получим реализуемый регулятор в виде

$$(4.13) \quad \left(\tilde{d}(q) - K^{[1]}l(q) \right) u(k) = K^{[1]}\lambda(q)y(k).$$

Вывод выражений (4.11), (4.13) приведен в Приложении 2.

Исследуем устойчивость системы (3.2), (4.13). Для этого сравним характеристические полиномы систем (3.2), (4.11) и (3.2), (4.13). Рассмотрим характеристический полином системы (3.2), (4.11), который асимптотически устойчив по построению. При использовании формулы построения детерминанта

блочной матрицы 2×2 получим

$$(4.14) \quad D(q) = \begin{vmatrix} I - Aq & -bq \\ -q^\psi K^{[1]} & \tilde{d}(q) \end{vmatrix} = |I - Aq| \left(\tilde{d}(q) - q^{\psi+1} K^{[1]} (I - Aq)^{-1} b \right),$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности.

Аналогично запишем характеристический полином замкнутой системы (3.2), (4.13):

$$(4.15) \quad D^{(1)}(q) = \begin{vmatrix} I - Aq & -bq \\ -K^{[1]} \lambda(q) c & \tilde{d}(q) - K^{[1]} l(q) \end{vmatrix} = \\ = |I - Aq| \left(\tilde{d}(q) - K^{[1]} l(q) - K^{[1]} \lambda(q) c (I - Aq)^{-1} bq \right).$$

Утверждение 1. Характеристические полиномы систем без наблюдателя $D(q)$ и с наблюдателем $D^{(1)}(q)$ совпадают: $D^{(1)}(q) = D(q)$. Поскольку $D(q)$ устойчив по построению (так как регулятор получен с помощью оптимизации квадратичного функционала (3.3)), то $D^{(1)}(q)$ также устойчив.

Доказательство утверждения 1 для случая $n = 3$ приведено в Приложении 3.

В регуляторе (4.13) старшая степень левой и правой частей равна $\deg(\tilde{d}(q)) = \psi$. Младшая степень левой части (знаменатель передаточной функции регулятора) равна нулю, младшая степень правой части (числитель передаточной функции регулятора) равна $\psi - (n - 1) = \gamma$. Отсюда следует, что значение параметра γ влияет на увеличение порядка знаменателя передаточной функции регулятора. Как будет показано ниже, увеличение порядка знаменателя регулятора на величину γ позволяет эффективно подавлять нежелательные шумы (помехи) в сигнале управления, вызванные квантованием по уровню в ЦАП и АЦП.

5. Моделирование системы с ЦАП и АЦП

5.1. Модель квантования ЦАП, АЦП

Как известно [17], квантование по уровню в ЦАП и АЦП заключается в том, что сигнал имеет конечное множество возможных состояний по уровню, количество которых определяется разрядностью ЦАП или АЦП. Количество этих состояний определяется формулой $M = 2^p$, где p – разрядность, а M – число возможных значений. Шаг квантования δ определяется формулой $\delta = 2V/2^p$, где V обозначает предельное значение квантователя, для стенда ФМ-2 $V = 10$ В. Идеальная характеристика квантователя имеет вид, показанный на рис. 2.

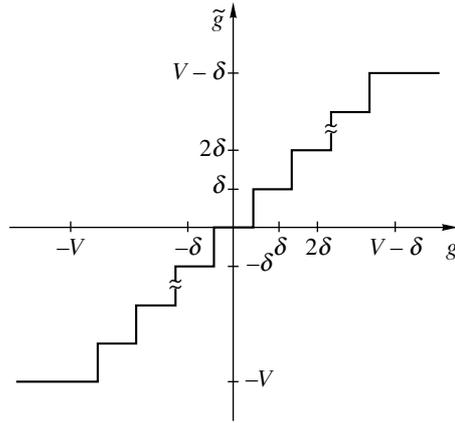


Рис. 2. Статическая характеристика квантователя.

Следуя [17], запишем эту характеристику, учитывая ее несимметричность из-за нечетного числа “ступенек”, как:

$$(5.1) \quad g_1 = \begin{cases} V - \delta & \text{при } g > V - \delta, \\ g & \text{при } -V \leq g \leq V - \delta, \\ -V & \text{при } g < -V; \end{cases}$$

$$(5.2) \quad \tilde{g} = \frac{2V}{2^p} \left[(g_1 + \delta/2) \frac{2^p}{2V} \right],$$

здесь g – непрерывный по уровню сигнал, g_1 – сигнал g с учетом насыщения характеристики квантователя, скобки $[\dots]$ обозначают округление до целого в сторону $-\infty$, а само выражение (5.2) определяет квантование по уровню сигнала g_1 .

При моделировании процесса идентификации объекта в замкнутой системе необходимо учитывать квантование по уровню ЦАП и АЦП на каждом из тактов дискретного времени.

Запишем регулятор (2.2) в виде уравнений пространства состояний

$$\begin{cases} x_c(k) = A_c x_c(k-1) + b_c y_v(k-1), \\ u(k) = c_c x_c(k) + d_c y_v(k-1). \end{cases}$$

Для моделирования был составлен следующий алгоритм. Для каждого момента времени k сигналы выхода объекта $y(k)$ и управления $u(k)$, прошедшие через квантователи ЦАП и АЦП, описываются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k) &= f_{\text{ЦАП}}(y(k)), \quad \tilde{\tilde{y}}(k) = f_{\text{АЦП}}(\tilde{y}(k)), \\ \tilde{u}(k) &= f_{\text{ЦАП}}(u(k)), \quad \tilde{\tilde{u}}(k) = f_{\text{АЦП}}(\tilde{u}(k)). \end{aligned}$$

Здесь через $f_{\text{АЦП}}$, $f_{\text{ЦАП}}$ обозначены функции АЦП-, ЦАП-преобразования в соответствии с алгоритмом (5.1)–(5.2), ставящие в соответствие непрерывному сигналу g значение \tilde{g} .

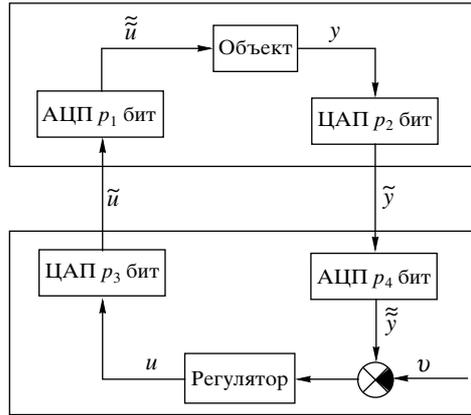


Рис. 3. Структура испытательного стенда с учетом ЦАП и АЦП.

Каждый из сигналов $y(k)$, $u(k)$ квантуется значением разрядности ЦАП и АЦП в соответствии с рис. 3. У экспериментального стенда ФМ-2 $p_1 = 16, p_2 = 12, p_3 = 14, p_4 = 14$ бит.

Объект и регулятор с учетом квантователей ЦАП и АЦП будут описываться как

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + b\tilde{u}(k-1), \\ y(k) = cx(k), \\ \begin{cases} x_c(k) = A_c x_c(k-1) + b_c(v(k-1) - \tilde{y}(k-1)), \\ u(k) = c_c x_c(k) + d_c(v(k-1) - \tilde{y}(k-1)). \end{cases} \end{cases}$$

5.1.1. Численный эксперимент 1. Непрерывный аналог модели объекта имеет вид

$$w_o(s) = \frac{0,4s + 1}{0,2s^3 + 1,24s^2 + 5,24s + 1}.$$

Регулятор описывается передаточной функцией

$$w_p(q) = \frac{-80,37 + 154,4q - 74,24q^2}{1 - 1,655q + 0,6741q^2}.$$

Синтез регулятора произведен при следующих значениях параметров: $\gamma = 0$, $\tilde{q} = 10$, $\varepsilon_1 = 9,35 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = 0,006$.

Испытательный сигнал:

$$(5.3) \quad v(t) = 0,05 \sin(0,2t),$$

внешнее возмущение $f(t) = 0$.

На рис. 4, 5 показано влияние эффекта квантования по уровню на работу замкнутой системы. На рис. 4,а и 4,б показаны соответственно выход объекта и сигнал управления без учета квантования по уровню. На рис. 5,а

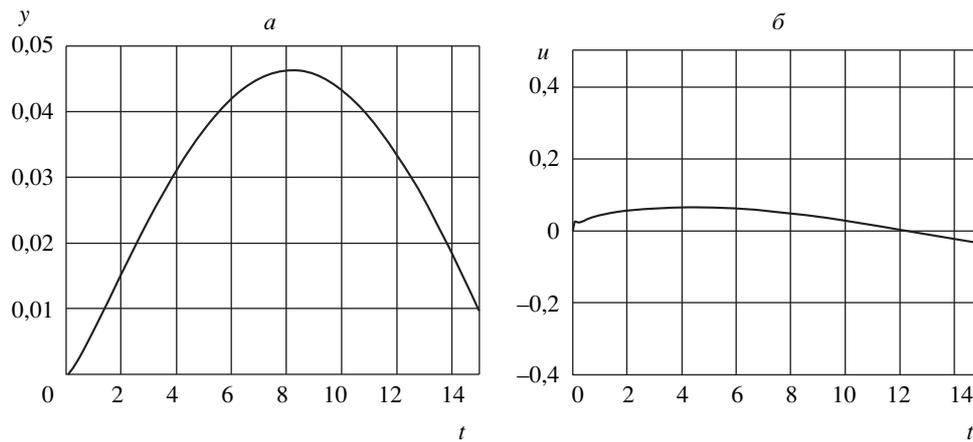


Рис. 4. Сигналы y, u без учета квантования по уровню.

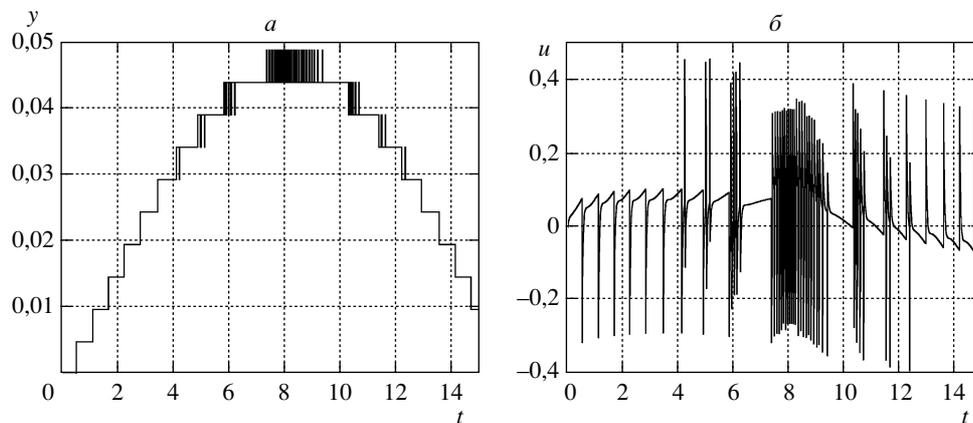


Рис. 5. Сигналы y, u с учетом квантования по уровню.

и 5,б показаны соответственно выход объекта и сигнал управления с учетом квантования по уровню ЦАП и АЦП.

Из рисунков следует, что сигнал управления вследствие квантования по уровню в замкнутой системе сильно зашумлен, что приводит к неточной идентификации объекта в замкнутой системе.

5.1.2. Численный эксперимент 2. Приведем результат увеличения порядка знаменателя регулятора при $\gamma = 2$. Регулятор с расширенным знаменателем описывается передаточной функцией

$$(5.4) \quad w_{\text{рег}}(q) = \frac{-2,532q^2 + 4,882q^3 - 2,357q^4}{1 - 3,318q + 4,132q^2 - 2,288q^3 + 0,4752q^4}.$$

Синтез регулятора произведен при следующих значениях параметров: $\tilde{q} = 10$, $\varepsilon_1 = 0,012$, $\varepsilon_2 = 5,61 \times 10^{-5}$, $\varepsilon_3 = 1,14 \times 10^{-7}$, $\varepsilon_4 = 8,75 \times 10^{-11}$.

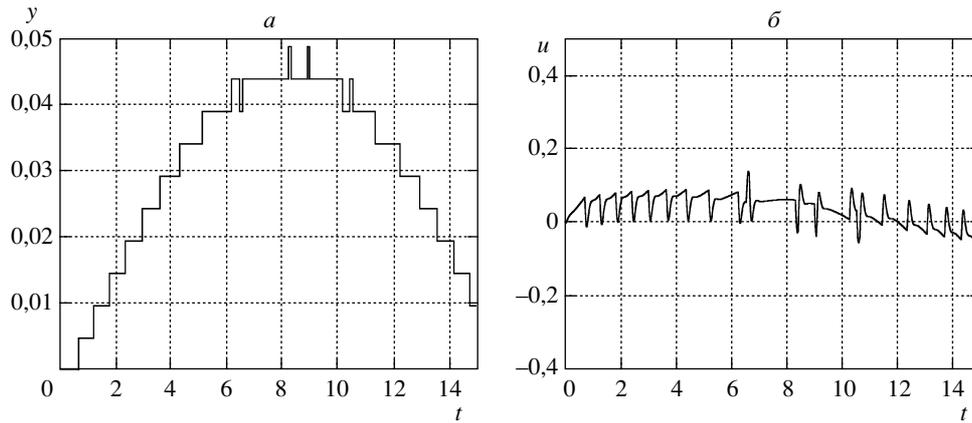


Рис. 6. Сигналы y , u с регулятором (5.4).

В качестве испытательного сигнала подается функция (5.3), $f(t) = 0$.

На рис. 6,а и 6,б показаны соответственно выход объекта $y(t)$ и сигнал управления $u(t)$ с учетом эффекта квантования по уровню в результате моделирования с регулятором (5.4).

Из рисунков следует, что увеличение порядка знаменателя передаточной функции регулятора позволяет эффективно уменьшить шумы, вызванные квантованием в ЦАП и АЦП.

5.2. Влияние амплитуды испытательного сигнала на результат идентификации в замкнутой системе

Наличие квантования по уровню в системе регулирования накладывает ограничения на амплитуды испытательного сигнала. Очевидно, малый испытательный сигнал амплитудой менее одного шага квантования не будет оказывать на выход системы никакого воздействия, вследствие чего идентифицировать объект не представляется возможным. Возникает вопрос: “При каких значениях амплитуд испытательного сигнала результат идентификации мало зависит от квантования по уровню?”

Для того чтобы это выяснить, было проведено исследование влияния амплитуд испытательного сигнала на результат идентификации. Под результатом идентификации будем понимать близость коэффициентов исходного и идентифицированного объекта в следующем виде:

$$(5.5) \quad \varepsilon_{\text{ident}} = \max_i \left(\frac{\hat{k}_i - k_i}{k_i}, \frac{\hat{d}_i - d_i}{d_i} \right), \quad i = \overline{0, n},$$

здесь k_i , d_i – коэффициенты непрерывного аналога объекта (2.1), \hat{k}_i , \hat{d}_i – оценки коэффициентов k_i , d_i , полученные в результате идентификации.

На рис. 7, 8 показаны результаты численного моделирования процесса идентификации. По оси абсцисс откладываются амплитуды испытательного

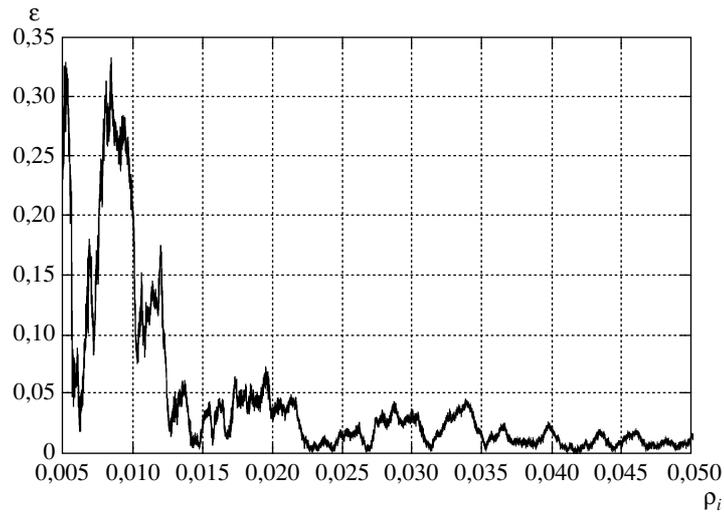


Рис. 7. Зависимость относительной ошибки в коэффициентах идентифицированного объекта от амплитуд испытательного сигнала.

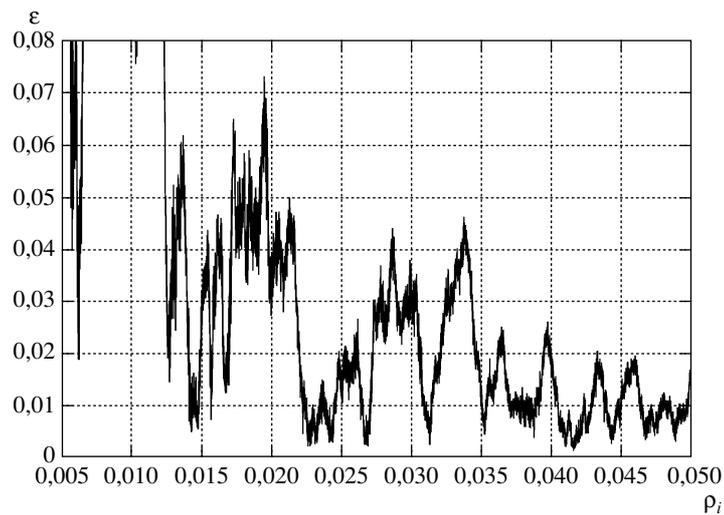


Рис. 8. Зависимость относительной ошибки в коэффициентах идентифицированного объекта от амплитуд испытательного сигнала (масштаб увеличен).

сигнала ρ_i (одинаковые для всех гармоник), по оси ординат – ошибка идентификации (5.5).

При малых амплитудах испытательного сигнала сказывается эффект квантования на результате идентификации. В целом зависимость носит экспоненциальный характер, с увеличением амплитуд испытательного сигнала

ошибка идентификации убывает. С ростом амплитуд испытательного сигнала относительная ошибка идентификации устанавливается на уровне 1–3%.

6. Экспериментальные исследования

На стенде ФМ-2, описанном в разделе 3, проводились испытания регулятора ЧАР-25 для многорежимного объекта.

Для испытаний адаптивного регулятора в замкнутой системе были получены 16 режимов с соответствующими коэффициентами объекта случайным образом. Предполагаем, что объект описывается следующим выражением:

$$y(s) = \frac{K_{об}(T_1s + 1)}{(T_2s + 1)(T_3^2s^2 + 2T_3\xi + 1)}u(s) + \frac{1}{(T_2s + 1)(T_3^2s^2 + 2T_3\xi + 1)}f(s),$$

$$T_1 = 0,4, \quad \xi = 0,6.$$

Параметры объекта для 16 режимов приведены в табл. 1, 2.

В качестве внешнего возмущения, действующего на объект, выбрана функция $f(t) = \text{sign}(\sin(1,3t))$.

Отметим, что система с первым регулятором без адаптации при смене режимов работы объекта теряет устойчивость на режиме № 16.

Результаты экспериментов приведены в табл. 3 и 4 и на рис. 9, 10. В табл. 3, 4 приведены максимальные отклонения выхода объекта после окончания процесса адаптации для каждого из режимов (этап 3 на рис. 9, 10). При проведении экспериментов цель управления (2.4) задавалась числом $y^* = 0,1$. Как видно из таблиц, для всех режимов цель управления (2.4) удовлетворяется. Эксперименты проводились следующим образом. До адаптации объект

Таблица 1. Режимы объекта 1–8

Номер режима	$K_{об}$	T_2	T_3
1	1	5	0,2
2	1,32	6,99	0,15
3	0,93	10	0,19
4	1,32	13,91	0,26
5	0,92	19,86	0,19
6	1,22	13,47	0,14
7	1,75	9,44	0,19
8	2,47	12,52	0,28

Таблица 2. Режимы объекта 9–16

Номер режима	$K_{об}$	T_2	T_3
9	1,68	8,4	0,21
10	1,24	5,93	0,16
11	1,65	7,89	0,2
12	1,24	5,39	0,14
13	1,36	4,47	0,48
14	1,45	3,5	0,65
15	2,6	3,12	1,2
16	4,25	4,73	1,14

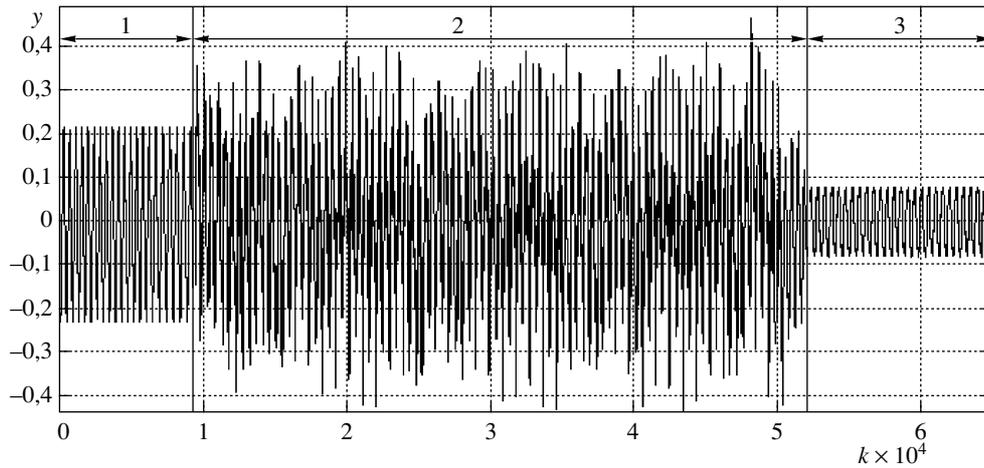


Рис. 9. Выход объекта $y(k)$ на режиме 1.

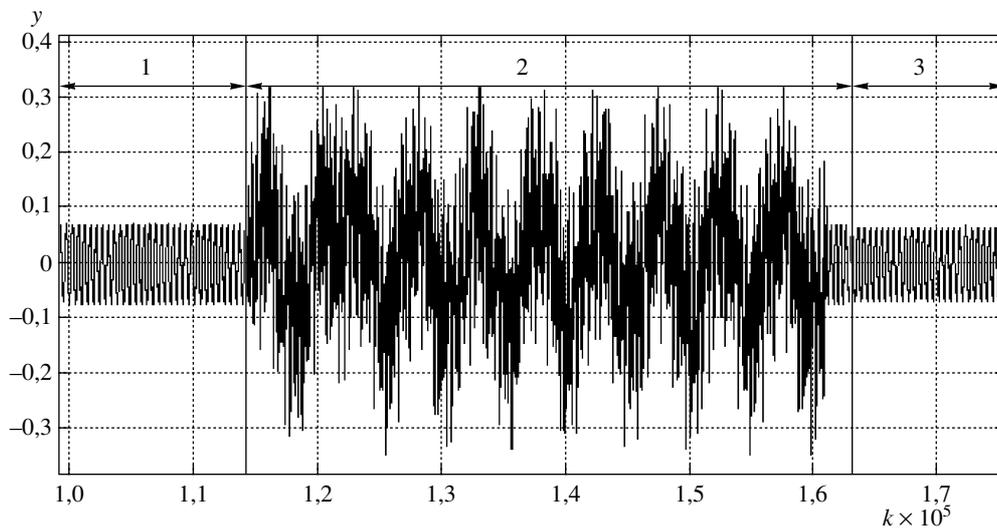


Рис. 10. Выход объекта $y(k)$ на режиме 10.

работает на режиме m , регулятор – от объекта с номером режима $m - 1$. Процесс адаптации включается по заданию оператора. После окончания про-

Таблица 3. Результаты экспериментов на стенде ФМ-2 на режимах 1–8

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8
$\max y(k) $	0,08	0,06	0,05	0,05	0,03	0,04	0,05	0,04

Таблица 4. Результаты экспериментов на стенде ФМ-2 на режимах 9–16

Номер	9	10	11	12	13	14	15	16
$\max y(k) $	0,05	0,07	0,05	0,06	0,08	0,05	0,05	0,04

цесса адаптации через некоторое время объект меняет режим работы, также по заданию оператора. Процесс адаптации включает в себя идентификацию объекта и синтез регулятора согласно описанному в разделах 3, 4 алгоритму.

На рис. 9, 10 приведены результаты экспериментов, соответствующие номерам режимов объекта 1 и 10. Цифрами на рисунках обозначены следующие этапы: 1 – выход объекта до адаптации, 2 – этап адаптации и расчет нового регулятора, 3 – работа системы после адаптации с новым регулятором.

7. Заключение

Результаты работы следующие:

- разработан частотный адаптивный регулятор для многорежимного объекта;
- предложен способ построения регулятора с наблюдателем, использующим “будущие” значения $y(k)$, $u(k)$, и сдвига на ψ тактов назад, так как метод построения наблюдателя, описанный в [13], использует обратную матрицу объекта, которая может не существовать;
- исследовано влияние эффекта квантования по уровню ЦАП и АЦП на результаты идентификации и адаптивного управления;
- предложен способ усиления фильтрующих свойств регулятора, уменьшающий влияние шумов, вызванных квантованием ЦАП и АЦП.

Эффективность предложенных алгоритмов подтверждена экспериментальными исследованиями на многорежимном объекте.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Построение прямого наблюдателя.

Используя уравнения (3.2) объекта, запишем n уравнений вида

$$\begin{cases} y(k - \psi) = cx(k - \psi), \\ y(k - \psi + 1) = cx(k - \psi + 1) = c(Ax(k - \psi) + bu(k - \psi)), \\ y(k - \psi + 2) = cx(k - \psi + 2) = c(A^2x(k - \psi) + Abu(k - \psi) + bu(k - \psi + 1)), \\ \vdots \\ y(k - \psi + (n - 1)) = c(A^{n-1}x(k - \psi) + A^{n-2}bu(k - \psi) + \dots \\ \dots + bu(k - \psi + (n - 2))) \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$(П.1.1) \quad \bar{y} = L^0 x(k - \psi) + l_1 u(k - \psi) + l_2 u(k - \psi + 1) + \dots \\ \dots + l_{n-1} u(k - \psi + (n - 2)),$$

где L^0 , l_1, \dots, l_{n-1} определены в (4.7), $\bar{y} = \begin{bmatrix} y(k - \psi) \\ y(k - \psi + 1) \\ y(k - \psi + 2) \\ \vdots \\ y(k - \psi + (n - 1)) \end{bmatrix}$, $L^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

l_1, \dots, l_{n-1} – n -мерные векторы.

Уравнение (П.1.1) можно переписать как

$$\psi(q)y(k) = q^\psi L^0 x(k) + [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_{n-1}] \phi(q)u(k),$$

где $\psi(q)$, $\phi(q)$ определены в (4.8).

Отсюда следует

$$q^\psi x(k) = l(q)u(k) + \lambda(q)y(k),$$

где $l(q) = -(L^0)^{-1}[l_1 \ l_2 \ \dots \ l_{n-1}] \phi(q)$, $\lambda(q) = (L^0)^{-1}\psi(q)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Этапы синтеза регулятора.

На первом этапе для объекта (3.2) синтезируется регулятор по состоянию (4.2). После этого к найденному регулятору применяется прямой метод восстановления (раздел 4.2), таким образом получаем регулятор по выходу:

$$[q^\psi - Kl(q)]u(k) = K\lambda(q)y(k),$$

у которого полиномы $(K\lambda(q))$ и $(q^\psi - Kl(q))$ имеют старшую степень, равную ψ , младшая степень числителя $(q^\psi - Kl(q))$ равна $\psi - n + 1$, знаменателя $(K\lambda(q)) - \psi - n + 2$, т.е. такой регулятор физически не реализуем.

На втором этапе находится частота среза [13] системы $\omega_{\text{ср}}$.

На третьем этапе составляется расширенная система. Для достижения физической реализуемости и усиления фильтрующих свойств регулятора в функционал (3.3) вводятся дополнительные члены $x_{n+1} \dots x_{n+\psi}$ с коэффициентами ε_i ($i = \overline{1, \psi}$, $\psi = n - 1 + \gamma$).

Будем рассматривать дополнительно введенные члены функционала $x_{n+1} \dots x_{n+\psi}$ как дополнительные элементы вектора состояния \bar{x} некоторой расширенной системы

$$(П.2.1) \quad \bar{x}(k) = \Phi \bar{x}(k-1) + p\mu(k-1),$$

где

$$\bar{x}(k) = [x(k) \ \tilde{x}(k)]^T, \quad \tilde{x}(k) = [x_{n+1}(k) \ x_{n+2}(k) \ \dots \ x_{n+\psi}(k)]^T, \\ \Phi \in \mathbb{R}^{(n+\psi) \times (n+\psi)}, \quad p \in \mathbb{R}^{n+\psi},$$

член $\mu(k)$ – сигнал управления этой расширенной системы:

$$\mu(k) \triangleq \frac{x_{n+\psi}(k+1) - x_{n+\psi}(k)}{h}.$$

Таким образом, ставится задача поиска оптимального закона управления для системы (П.2.1) в смысле функционала

$$(П.2.2) \quad \bar{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \{ \bar{x}^T(k) \bar{Q} \bar{x}(k) + \bar{R} \mu^2(k) \},$$

который с точностью до обозначений совпадает с функционалом (4.1).

Используя обозначения в (3.3), запишем выражение

$$(П.2.3) \quad \begin{cases} x_{n+1}(k+1) \doteq hx_{n+2}(k) + x_{n+1}(k), \\ x_{n+2}(k+1) \doteq hx_{n+3}(k) + x_{n+2}(k), \\ \dots \\ x_{n+\psi-1}(k+1) \doteq hx_{n+\psi}(k) + x_{n+\psi-1}(k), \\ x_{n+\psi}(k+1) \doteq x_{n+\psi}(k) + h\mu(k). \end{cases}$$

С учетом уравнения объекта (3.2) и выражения (П.2.3) расширенная система управления (П.2.1) запишется как

$$(П.2.4) \quad \begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + bx_{n+1}(k-1), \\ x_{n+1}(k) = hx_{n+2}(k-1) + x_{n+1}(k-1), \\ x_{n+2}(k) = hx_{n+3}(k-1) + x_{n+2}(k-1), \\ \dots \\ x_{n+\psi-1}(k) = hx_{n+\psi}(k-1) + x_{n+\psi-1}(k-1), \\ x_{n+\psi}(k) = x_{n+\psi}(k-1) + h\mu(k-1). \end{cases}$$

С учетом (П.2.4) матрицы системы (П.2.1) в блочной форме запиши примут вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^\psi & G \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 0_1^{n+\psi-1} \\ h \end{bmatrix},$$

где $\Phi \in \mathbb{R}^{(n+\psi) \times (n+\psi)}$, $p \in \mathbb{R}^{(n+\psi) \times 1}$, 0_n^ψ – обозначение нулевой матрицы

размером $\psi \times n$, $B = [b \ 0_{\psi-1}^n] \in \mathbb{R}^{n \times \psi}$, $G = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\psi \times \psi}$, а

матрицы \bar{Q}, \bar{R} функционала (П.2.2) примут вид

$$(П.2.5) \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0_\psi^n \\ 0_n^\psi & F \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = \varepsilon_\psi^2,$$

где $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F = \text{diag}(1, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_{\psi-1}^2)$.

На четвертом этапе для системы (П.2.1) ищется оптимальное в смысле (П.2.2) управление

$$(П.2.6) \quad \mu(k) = \bar{K}\bar{x}(k),$$

с использованием процедуры, описанной в разделе 4.2, но вместо матриц Q, R функционала (4.1) используются матрицы (П.2.5).

На пятом этапе составляется уравнение регулятора. Для этого выражение (П.2.6) представляется в виде

$$(П.2.7) \quad \mu(k) = \tilde{u}(k) + K^{[2]}\tilde{x}(k), \quad \tilde{u}(k) \triangleq K^{[1]}x(k).$$

Тогда \overline{K} запишется как $[K^{[1]}K^{[2]}] \doteq \overline{K}$, здесь $K^{[1]}$ – строка длины n , $K^{[2]}$ – строка длины ψ .

Заметим, что справедливо выражение

$$(П.2.8) \quad u(k) = \tilde{c}\tilde{x}(k),$$

где $\tilde{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^\psi$.

С учетом (П.2.7) выражение (П.2.3) запишется как

$$\begin{cases} x_{n+1}(k+1) = hx_{n+2}(k) + x_{n+1}(k), \\ x_{n+2}(k+1) = hx_{n+3}(k) + x_{n+2}(k), \\ \dots \\ x_{n+\psi-1}(k+1) = hx_{n+\psi}(k) + x_{n+\psi-1}(k), \\ x_{n+\psi}(k+1) = x_{n+\psi}(k) + hK^{[2]}\tilde{x}(k) + h\tilde{u}(k), \end{cases}$$

или в более компактной форме с учетом (П.2.8):

$$(П.2.9) \quad \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{b}\tilde{u}(k), \\ u(k) = \tilde{c}\tilde{x}(k), \end{cases}$$

где матрица \tilde{A} определена в (4.12), $\tilde{b} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ h]^T \in \mathbb{R}^\psi$.

Для получения уравнения регулятора запишем выражение, связывающее $\tilde{u}(k)$ и $u(k)$ в системе (П.2.9):

$$(П.2.10) \quad u(k) = \tilde{c}(Iz - \tilde{A})^{-1}\tilde{b}\tilde{u}(k),$$

где z – оператор сдвига: $z^i x(k) \triangleq x(k+i)$.

Обозначим

$$(П.2.11) \quad \tilde{d}(z) \triangleq \det(Iz - \tilde{A}),$$

$$(П.2.12) \quad \xi(z) \triangleq \det(Iz - \tilde{A})\tilde{c}(Iz - \tilde{A})^{-1}\tilde{b}.$$

Покажем, что $\xi(z) = h^\psi$. Обозначим

$$(П.2.13) \quad \tilde{H} = Iz - \tilde{A}.$$

Матрица $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{\psi \times \psi}$ имеет структуру

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} z-1 & -h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z-1 & -h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & -h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -h \\ -hK^{[2]}(1) & -hK^{[2]}(2) & -hK^{[2]}(3) & -hK^{[2]}(4) & \dots & z - hK^{[2]}(\psi) - 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуя (П.2.12), с учетом (П.2.13) получим

$$\begin{aligned}\xi(z) &\doteq \det \tilde{H} \cdot \tilde{c} \tilde{H}^{-1} \tilde{b} = \tilde{c} \begin{bmatrix} \tilde{H}_{1,1} & \dots & -1^{1+\psi} \tilde{H}_{1,\psi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1^{\psi+1} \tilde{H}_{\psi,1} & \dots & \tilde{H}_{\psi,\psi} \end{bmatrix}^T \tilde{b} = \\ &= [\tilde{H}_{1,1} \dots -1^{\psi+1} \tilde{H}_{\psi,1}] [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ h]^T = -1^{\psi+1} \tilde{H}_{\psi,1} h,\end{aligned}$$

где $-1^{i+j} \tilde{H}_{i,j}$ – алгебраическое дополнение для элемента матрицы \tilde{H} с номером строки i и номером столбца j . Отсюда

$$(П.2.14) \quad \xi(z) = -1^{\psi+1} \tilde{H}_{\psi,1} h = -1^{\psi+1} h \begin{vmatrix} -h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z-1 & -h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z-1 & -h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z-1 & -h \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель в (П.2.14) $\psi - 1$ раз по первым строкам, получим

$$(П.2.15) \quad \xi(z) = -1^{\psi+1} \tilde{H}_{\psi,1} h = -1^{1+\psi} h (-1^{\psi-1}) h^{\psi-1} = (-1)^{2\psi} h^\psi = h^\psi.$$

По построению порядок $\deg(\tilde{d}(z)) = \dim(\tilde{A}) = \psi$.

С учетом (П.2.11), (П.2.12), (П.2.15) выражение (П.2.10) переписется как

$$(П.2.16) \quad \tilde{d}(z)u(k) = h^\psi K^{[1]}x(k).$$

Обозначив $\check{d}(z) \triangleq \frac{\tilde{d}(z)}{h^\psi}$ и умножив обе части (П.2.16) на $z^{-\psi}$, получим (4.11):

$$(П.2.17) \quad \check{d}(q)u(k) = K^{[1]}q^\psi x(k),$$

где $\check{d}(q) \triangleq z^{-\psi} \check{d}(z)$.

Добавив к (П.2.17) уравнение наблюдателя (4.3) $q^\psi x(k) = l(q)u(k) + \lambda(q)y(k)$, получим (4.13):

$$\left(\check{d}(q) - K^{[1]}l(q) \right) u(k) = K^{[1]}\lambda(q)y(k).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Доказательство утверждения 1.

Для краткости приведем доказательство при $n = 3$. Рассмотрим выражение

$$(П.3.1) \quad \begin{aligned}q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b &= q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b - l(q) + l(q) = \\ &= l(q) + (L^0)^{-1}L^0 \left(q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b - l(q) \right).\end{aligned}$$

Преобразуем выражение $L^0 (q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b - l(q))$. Рассмотрим для этого выражения (4.5), (4.8), которые при $n = 3$ запишутся как $\psi(q) = \begin{bmatrix} q^\psi \\ q^{\psi-1} \\ q^{\psi-2} \end{bmatrix}$, $l(q) = -(L^0)^{-1}(l_1q^\psi + l_2q^{\psi-1})$. С использованием (4.7) получим:

$$\begin{aligned}
(\text{П.3.2}) \quad L^0 \left(q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b - l(q) \right) &= L^0 q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b + l_1q^\psi + l_2q^{\psi-1} = \\
&= \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b + \begin{bmatrix} 0 \\ cb \\ cAb \end{bmatrix} q^\psi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ cb \end{bmatrix} q^{\psi-1} = \\
&= \begin{bmatrix} q^{\psi+1}c(I - Aq)^{-1}b \\ q^{\psi+1}cA(I - Aq)^{-1}b \\ q^{\psi+1}cA^2(I - Aq)^{-1}b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ cbq^\psi \\ cAbq^\psi + cbq^{\psi-1} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} cq^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b \\ c(q^{\psi+1}A(I - Aq)^{-1} + Iq^\psi)b \\ c(q^{\psi+1}A^2(I - Aq)^{-1} + Aq^\psi + Iq^{\psi-1})b \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Проверим следующее выражение:

$$(\text{П.3.3}) \quad q^{\psi+1}A(I - Aq)^{-1} + q^\psi I = q^\psi(I - Aq)^{-1}.$$

Умножая на $(I - Aq)$ справа, легко убедиться в его справедливости. Умножив обе части (П.3.3) на q^{-1} , получим с использованием (П.3.3)

$$(\text{П.3.4}) \quad q^{\psi+1}A^2(I - Aq)^{-1} + Aq^\psi + Iq^{\psi-1} = q^{\psi-1}(I - Aq)^{-1}.$$

С учетом (4.8), а также с учетом (П.3.3), (П.3.4) выражение (П.3.2) примет вид

$$\begin{aligned}
(\text{П.3.5}) \quad &\begin{bmatrix} cq^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b \\ c(q^{\psi+1}A(I - Aq)^{-1} + Iq^\psi)b \\ c(q^{\psi+1}A^2(I - Aq)^{-1} + Aq^\psi + Iq^{\psi-1})b \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} q^\psi c(I - Aq)^{-1}bq \\ q^{\psi-1}c(I - Aq)^{-1}bq \\ q^{\psi-2}c(I - Aq)^{-1}bq \end{bmatrix} = \psi(q)c(I - Aq)^{-1}bq.
\end{aligned}$$

С учетом (П.3.5), (П.3.2), (4.6) выражение (П.3.1) преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned}
q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b &= l(q) + (L^0)^{-1}L^0 \left(q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b - l(q) \right) = \\
&= l(q) + (L^0)^{-1}\psi(q)c(I - Aq)^{-1}bq = l(q) + \lambda(q)c(I - Aq)^{-1}bq,
\end{aligned}$$

таким образом

$$(П.3.6) \quad q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b = l(q) + \lambda(q)c(I - Aq)^{-1}bq.$$

С использованием (П.3.6) выражение (4.15) запишется как

$$(П.3.7) \quad \begin{aligned} D^{(1)}(q) &= |I - Aq| \left(\tilde{d}(q) - K^{[1]}l(q) - K^{[1]}\lambda(q)c(I - Aq)^{-1}bq \right) = \\ &= |I - Aq| \left(\tilde{d}(q) - K^{[1]}(l(q) + \lambda(q)c(I - Aq)^{-1}bq) \right) = \\ &= |I - Aq| \left(\tilde{d}(q) - K^{[1]}q^{\psi+1}(I - Aq)^{-1}b \right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что (П.3.7) совпадает с (4.14), т.е. $D^{(1)}(q) = D(q)$. Утверждение при $n = 3$ доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sun J., Ioannou P.* Robust adaptive LQ control schemes // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. AC-37. No. 1. P. 100–106.
2. *Radenkovic M.S., Michel A.N.* Robust adaptive systems and self stabilization // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. AC-37. No. 9. P. 1355–1369.
3. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.
4. *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 6. С. 1308–1311.
5. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
6. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление с гарантированным результатом в условиях ограниченных возмущений // АиТ. 1994. Т. 55. № 2. С. 121–131.
Sokolov V.F. Adaptive Robust Control Providing a Guaranteed Result under Conditions of Bounded Disturbances // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 2. Part 2. P. 247–255.
7. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в l_1 -постановке // АиТ. 1998. Т. 59. № 3. С. 107–131.
Sokolov V.F. Adaptive Robust Control of a Discrete Scalar Object in the L_1 -Statement // Autom. Remote Control. 1998. V. 59. No. 3. Part 2. P. 392–411.
8. *Lilly J.H.* Adaptive state regulation in the presence of disturbances of known frequency range // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. V. AC-43. No. 7.
9. *Александров А.Г.* Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении // АиТ. 2000. № 4. С. 106–116.
Aleksandrov A.G. Frequency Adaptive Control of a Stable Plant under Unknown Bounded Disturbances // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 4. Part 2. P. 637–646.
10. *Александров А.Г.* Адаптивное управление на основе идентификации частотных характеристик // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2. С. 63–71.
11. *Трефилов П.А.* Частотный адаптивный регулятор ЧАР-1 // Межвуз. науч. сб. «Аналитические методы синтеза регуляторов», Саратов: Саратов. политех. ин-т, 1984.

12. Александров А.Г., Кариков Д.Г., Курицына Е.Ю. Частотный адаптивный регулятор с заданным интервалом дискретности // Тр. междунар. конф. “Идентификация систем и задачи управления”. М.: ИПУ, 2007. CD-ROM, ISBN 5-201-14992-8. С. 655–668.
13. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
14. Alexandrov A., Khomutov D. Frequency adaptive controller: experimental investigations // Proc. Tenth IASTED Int. Conf. May 26–28, 2008 Quebec City, Quebec, Canada, ISBN 978-0-88986-746-8. P. 96–101.
15. W-8x4x Hardware Specification, 2011. [online]. URL: http://www.icpdas.com/products/PAC/wincon-8000/8x4x_hardware_specification.htm. [Дата посещения: 20 сентября 2011].
16. High-Performance Rugged Embedded CPU with Data Acquisition, 2011. [online]. URL: <http://www.diamondsystems.com/products/athena>. [Дата посещения: 20 сентября 2011].
17. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назинным.

Поступила в редакцию 06.11.2012