

СИНТЕЗ ТОЧНОСТНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОБЪЕКТА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СОСТАВЕ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация

Рассматривается алгоритм синтеза точностного регулятора на примере объекта третьего порядка с одним входом и одним выходом. Объект записывается в форме Коши, при синтезе используется процедура LQ -оптимизации и восстановление вектора состояния объекта при помощи прямого наблюдателя.

Введение

Подзадача синтеза точностного регулятора возникает в частотном адаптивном управлении [1], использующем идентификационный алгоритм [2]. Уравнение объекта имеет вид:

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + bu(k-1) + f(k-1), \\ y(k) = cx(k), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния объекта, $n=3$ — порядок объекта, $u \in R^n$ — управление, $y \in R^1$ — выход объекта, $f \in R^n$ — неизмеряемое внешнее возмущение, ограниченное известным числом: $|f| \leq f^*$. Требуется построить регулятор по выходу

$$u(k) + g_1 u(k-1) + g_{n-1} u(k-n+1) = r_0 y(k) + \dots + r_{n-1} y(k-n+1) \quad (2)$$

так, чтобы в замкнутой системе под действием внешнего возмущения удовлетворялось требование точности, начиная с некоторого момента времени k^* , определяющим переходный процесс:

$$|y(k)| \leq y^*, \quad k > k^*.$$

Алгоритм синтеза регулятора

Алгоритм синтеза регулятора состоит из пяти этапов.

Первый этап.

Вначале найдём оптимальное управление $u(k) = Kx(k)$, доставляющее минимум функционалу J на возмущённых движениях системы:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k) Q x(k) + R u^2(k)), \quad (3)$$

здесь $Q = c^T \left(\frac{f^*}{y^*} \right)^2 c$ — матрица [1], определяющая точность управления; $R=1$.

Эта задача решается с помощью алгебраического уравнения Риккати. Пусть вектор–строка $K \in R^{1 \times 3}$ найден:

$$u(k) = Kx(k). \quad (4)$$

Неизвестный вектор $x(k)$ найдём с помощью прямого метода восстановления [3]. Для этого запишем три уравнения объекта в матричной форме:

$$\bar{y} = L^0 x(k-2) + l_1 u(k-2) + l_2 u(k-1), \quad (5)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y(k-2) \\ y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad L^0 = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix}, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ cb \\ cAb \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ cb \end{bmatrix}.$$

Уравнение (5) можно переписать как:

$$\psi(q)y(k) = q^2 L^0 x(k) + [l_1 \ l_2] \phi(q)u(k),$$

где $\psi^T(q) = \begin{bmatrix} q^2 & q & 1 \end{bmatrix}$, $\phi^T(q) = \begin{bmatrix} q^2 & q \end{bmatrix}$, q — оператор сдвига: $q^i x(k) = x(k-i)$.

Отсюда следует:

$$q^2 x(k) = l(q)u(k) + \lambda(q)y(k), \quad (6)$$

где $l(q) = -(L^0)^{-1}[l_1 \ l_2]\phi(q)$, $\lambda(q) = (L^0)^{-1}\psi(q)$.

Применив наблюдатель (6) к регулятору (3), получим регулятор по выходу

$$[q^2 - Kl(q)]u(k) = K\lambda(q)y(k), \quad (7)$$

здесь порядок числителя больше чем порядок знаменателя на единицу, т.е. регулятор (7) нереализуем.

Второй этап. Составляем расширенную систему. Для реализуемости регулятора введём новые переменные:

$$x_4(k) = u(k), \quad x_5(k) = \frac{x_4(k+1) - x_4(k)}{h}, \quad \mu(k) = \frac{x_5(k+1) - x_5(k)}{h}, \quad (8)$$

$$\bar{x}^T(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k) \ x_5(k)], \quad \tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix}. \quad (8')$$

Запишем теперь систему с вектором состояния $\bar{x}(k)$ и управлением $\mu(k)$ в форме Коши:

$$\bar{x}(k) = \Phi \bar{x}(k-1) + p\mu(k-1), \quad (9)$$

где $\Phi \in R^{5 \times 5}$, $p \in R^5$, член $\mu(k)$ — сигнал управления этой расширенной системы. Таким образом, ставится задача поиска оптимального закона управления для системы (9) в смысле функционала

$$\bar{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T(k)Qx(k) + x_4^2(k) + \varepsilon_1^2 x_5^2(k) + \varepsilon_2^2 [\mu(k)]^2\}, \quad (10)$$

где $\varepsilon_i^2 = \frac{C_2^i}{5^{2i} \omega_{cp}^{2i}}$ — достаточно малые коэффициенты [3], которые зависят от частоты среза системы ω_{cp} , а C_2^i — число сочетаний из 2 по i . Выражение (10) с учетом обозначений (8) переписывается как

$$\bar{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \bar{x}^T(k) \bar{Q} \bar{x}(k) + \bar{R} \mu^2(k) \right\}, \quad (11)$$

который с точностью до обозначений совпадает с функционалом (3).

Выражение (8) может быть записано как:

$$\begin{cases} x_4(k+1) = hx_5(k) + x_4(k), \\ x_5(k+1) = x_5(k) + h\mu(k). \end{cases} \quad (12)$$

С учетом уравнения объекта (1) и выражения (12), расширенная система управления (9) запишется как:

$$\begin{cases} x(k) &= Ax(k-1) + bx_4(k-1) \\ x_4(k) &= hx_5(k-1) + x_4(k-1), \\ x_5(k) &= x_5(k-1) + h\mu(k-1). \end{cases} \quad (13)$$

С учетом (13) матрицы системы (9) в блочной форме запишут вид:

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_3^2 & G \end{bmatrix}, \quad p^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad h],$$

где $\Phi \in R^{5 \times 5}$, $p \in R^5$, 0_3^2 — обозначение нулевой матрицы размером 2×3 , $B = [b \quad 0_1^3] \in R^{3 \times 2}$, $G = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{2 \times 2}$, а матрицы $\bar{Q}, \bar{R}$ функционала (11) примут вид:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & Q & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = \varepsilon_2^2, \quad (14)$$

где $Q \in R^{3 \times 3}$.

На третьем этапе для системы (9) ищется оптимальное в смысле (11) управление

$$\mu(k) = \bar{K} \bar{x}(k), \quad \bar{K} \in R^5. \quad (15)$$

На четвертом этапе составляется уравнение регулятора по выходу. Для этого представим выражение (15) в виде

$$\mu(k) = \tilde{u}(k) + K^{[2]} \tilde{x}(k), \quad \tilde{u}(k) = K^{[1]} x(k). \quad (16)$$

Тогда $\bar{K}$ запишется как $[K^{[1]} K^{[2]}] = \bar{K}$, здесь $K^{[1]}$ — строка длины 3, $K^{[2]}$ — строка длины 2.

Заметим, что справедливо выражение

$$u(k) = \tilde{c}\tilde{x}(k) \quad (17)$$

где $\tilde{c} = [1 \ 0]$

С учетом (16) и (17) выражение (12) запишется в компактной форме:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{b}\tilde{u}(k), \\ u(k) = \tilde{c}\tilde{x}(k), \end{cases} \quad (18)$$

с матрицами $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ hK^{[2]}(1) & hK^{[2]}(2) + 1 \end{bmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$.

Для получения уравнения регулятора запишем выражение, связывающее $\tilde{u}(k)$ и $u(k)$ в системе (18):

$$u(k) = \tilde{c}(Iz - \tilde{A})^{-1}\tilde{b}\tilde{u}(k). \quad (19)$$

$$c(Iz - A)^{-1}\tilde{b} = \frac{\xi(z)}{\tilde{d}(z)}, \quad (21)$$

где z — оператор сдвига: $z^i x(k) = x(k+1)$.

По построению $\xi(z) = h^2$,

$$\tilde{d}(z) = z^2 + z(-hK^{[2]}(2) - 2) + hK^{[2]}(2) - h^2 K^{[2]}(1) + 1.$$

Добавив к (19) уравнение наблюдателя (6) $q^2 x(k) = l(q)u(k) + \lambda(q)y(k)$, с учетом обозначений (21), (16) получим:

$$\tilde{d}(z)u(k) = h^2 K^{[1]}x(k),$$

откуда

$$\tilde{d}(q)u(k) = h^2 K^{[1]}(l(q)u(k) + \lambda(q)y(k)), \quad (22)$$

где $\tilde{d}(q) = z^{-2}\tilde{d}(z)$.

Регулятор (22) окончательно примет реализуемый вид:

$$(\tilde{d}(q) - h^2 K^{[1]}l(q))u(k) = h^2 K^{[1]}\lambda(q)y(k).$$

Список литературы

1. Александров А.Г. Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении // АиТ. 2000. № 4. С. 106-116.
2. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
3. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.